УДК 517.929

К.Ж.Назарова

Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан
(E-mail: gjnazarova@mail.ru)

Существование изолированного решения нелинейной двухточечной краевой задачи и её свойства

Модифицированным методом параметризаций исследована двухточечная нелинейная краевая задача. В терминах функций правой части дифференциального уравнения и граничного условия установлены условия существования изолированного решения и их свойства.

Ключевые слова: нелинейная двухточечная краевая задача, метод параметризации, изолированные решения.

На отрезке $[0,T]$ рассматривается нелинейная двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \in (0,T), \qquad x \in R^n, \tag{1}$$

$$g[x(0),x(T)] = 0, \tag{2}$$

где $f : [0,T] \times R^n \to R^n$, $\quad g : R^n \times R^n \to R^n$ — непрерывные функции.

Нелинейные двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений часто встречаются при математическом моделировании реальных процессов естествознания и исследованы многими математиками. Их усилиями созданы различные методы исследования и решения краевых задач, позволяющие анализировать и решать широкий класс задач, имеющих важное значение не только для теории, но и для приложения. Одним из часто применяемых методов при решении краевых задач является метод стрельбы и его модификации [1–4]: метод параллельной пристрелки, метод интервальной пристрелки, метод двусторонней пристрелки, метод множественной двусторонней пристрелки и др.

Идея основного варианта метода стрельбы заключается в сведении решения исходной краевой задачи к многократному решению вспомогательных задач Коши для заданного дифференциального уравнения. Известные условия сходимости алгоритмов метода стрельбы в терминах исходных данных очень жесткие и не выполняются для многих краевых задач. В связи с этим возникает необходимость нахождения условий разрешимости задачи (1), (2) и сходимости предлагаемых алгоритмов в терминах исходных данных. Причем эти требования на данные задачи должны быть необходимыми и достаточными условиями существования решения. В [5] с этой целью применен основной метод параметризации и дополнительные параметры введены как значения искомого решения в начальных точках интервалов разбиения $[0,T]$.

В данной работе дополнительные параметры вводятся как значения искомого решения в серединах интервалов разбиения $[0,T]$. Если в [3, 4] введение параметров позволило обосновать метод параллельной пристрелки, то предлагаемый в работе модифицированный метод параметризации позволяет обосновать метод множественной двусторонней пристрелки. Преимущество метода множественной двусторонней пристрелки перед другими модификациями заключается в том, что он обладает более широкой областью начальных значений, для которой имеет место сходимость. Модифицированный метод параметризации и условия сходимости его алгоритмов устанавливают новые признаки разрешимости нелинейных двухточечных краевых задач. В нелинейных задачах изолированность решения играет такую же важную роль, как единственность решения в линейных задачах.

Рассмотрим двухточечную нелинейную краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = (1-x)x^2, \quad t \in [0,1], \quad x(0) = x(1),$$

имеющую два изолированных решения $x = 0, x = 1$. Если в правую часть этого дифференциального уравнения прибавим $\varepsilon > 0$, то получим возмущенную нелинейную краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = (1-x)x^2 + \varepsilon, \quad t \in (0,1),$$

$$x(0) = x(1),$$

которая имеет только одно решение:

$$x = \frac{1}{3} + \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{\frac{\varepsilon}{27} + \frac{\varepsilon^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{27} + \frac{\varepsilon^2}{4}}}.$$

Таким образом, малое изменение правой части дифференциального уравнения привело к потере одного решения. Изолированное решение, рассматриваемое как изолированный элемент множества решений, вообще говоря, не обладает свойством непрерывной зависимости решений от исходных данных. Поэтому изучается изолированное в более узком смысле решение задачи (1),(2). Приведем определение изолированного решения нелинейной двухточечной краевой задачи с непрерывно дифференцируемыми данными из [1].

Определение 1. Решение задачи (1),(2) — функция $x^*(t)$ — называется изолированным, если существует число $\rho_0 > 0$, при котором функции f, g соответственно в

$$G^*_{3,\rho_0} = \{(t,x) : \ t \in [0,T], \ \|x - x^*(t)\| < \rho_0\}, G^*_{4,\rho_0} = \{(\nu, w) : \ \|\nu - x^*(0)\| < \rho_0, \|w - x^*(T)\| < \rho_0\}$$

имеют равномерно непрерывные частные производные $f'_x(t,x), g'_v(v,w), g'_w(v,w)$ и линейная однородная двухточечная краевая задача

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(t, x^*(t))y, \qquad t \in [0,T], \qquad y \in R^n; \tag{3}$$

$$g'_\nu[x^*(0), x^*(T)]y(0) + g'_w[x^*(0), x^*(T)]y(T) = 0 \tag{4}$$

имеет только тривиальное решение $y(t) = 0$. Линеаризуя рассмотренную выше нелинейную краевую задачу при $x = 0, x = 1$, получим линейные однородные двухточечные краевые задачи

$$\frac{dy}{dt} = 0, \qquad y(0) = y(1);$$

$$\frac{dy}{dt} = -y, \qquad y(0) = y(1).$$

Так как однородная двухточечная краевая задача имеет множество решений при $x = 0$, то функция $x = 0$, являясь изолированным решением в обычном смысле, не является изолированным решением в смысле определения. А при $x = 1$ однородная двухточечная краевая задача имеет только тривиальное решение $y = 0$, отсюда функция $x = 1$, являясь изолированным в обычном смысле решением, является изолированным решением в смысле определения.

Замечание. Как при построении $U_0(f, g, L(t), L_1, L_2, h)$, так и при определении изолированного решения достаточно требовать существования непрерывных, а не равномерно непрерывных, частных производных $f_x^{'}(t,x)$, $g_v^{'}(v,w)$, $g_w^{'}(v,w)$. Так как $\rho>0$, $\rho_0>0$, то можно выбрать $\varepsilon>0$ такое, что $\rho_\varepsilon=\rho-\varepsilon>0$, $\rho_{0,\varepsilon}=\rho_0-\varepsilon>0$, и в замкнутых множествах

$$\bar{G}_1^0\left(R[t],\rho_\varepsilon\right)=\{(t,x)\,:\ t\in[0,T]\,,\ \left\|x-\lambda_r^{(0)}-u_r^{(0)}\left(t\right)\right\|\leq\left(R_r[t]+1\right)\rho_\varepsilon, t\in[(r-1)h,rh)\,,\ r=\overline{1,N},$$

$$\left\|x-\lambda_N^{(0)}-\lim_{t\to T-0}u_N^{(0)}(t)\right\|\leq\left(R_N(T)+1\right)\,\rho_\varepsilon\}\,;$$

$$\bar{G}_2^0\left(R[t],\rho_\varepsilon\right)=\{(\nu,w)\,:\ \left\|\nu-\lambda_1^{(0)}\right\|\leq\rho_\varepsilon,\quad\left\|w-\lambda_N^{(0)}-\lim_{t\to T-0}u_N^{(0)}(t)\right\|\leq\left(R_N(T)+1\right)\,\rho_\varepsilon\}\,;$$

$$\bar{G}_{3,\rho_{0,\varepsilon}}^0=\{(t,x)\,:\ t\in[0,T]\,,\ \|x-x^*(t)\|\leq\rho_{0,\varepsilon}\}\,;$$

$$\bar{G}_{4,\rho_{0,\varepsilon}}^0=\{(\nu,w)\,:\ \|\nu-x^*(0)\|\leq\rho_{0,\varepsilon},\quad\|w-x^*(T)\|\leq\rho_{0,\varepsilon}\}\,,$$

в силу конечномерности исходной системы, частные производные $f_x^{'}(t,x)$, $g_v^{'}(v,w)$, $g_w^{'}(v,w)$ будут равномерно непрерывными. Теперь достаточно рассмотреть эти производные в

$$G_1^0(R[t],\rho_\varepsilon), G_2^0(R[t],\rho_\varepsilon), G_{3,\rho_{0,\varepsilon}}^0, G_{4,\rho_{0,\varepsilon}}^0.$$

Следующее утверждение устанавливает существование изолированного решения в смысле определения.

Теорема 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 [6]. Тогда любое решение задачи (1), (2) в $S\left(x^{(0)}(t),(R[t]+1)\rho\right)$ является изолированным в смысле определения.

Доказательство. Пусть $x^*(t)$ — решение задачи (1), (2) в $S(x^{(0)}(t),(R[t]+1)\rho)$. В теореме 1 [6] было доказано, что это решение является изолированным элементом множества решений задачи (1), (2). Покажем, что $x^*(t)$ будет изолированным и в смысле определения. Рассмотрим линейную однородную краевую задачу (3), (4). По матрицам $A^*(t)={f'}_x(t,x^*(t))$, $B^*={g'}_v[x^*(0),x^*(T)]$, $C^*={g'}_w[x^*(0),x^*(T)]$ составим $(nN\times nN)$-матрицу специальной структуры:

$$Q_\nu(*,2h)=\left|\begin{array}{cccc} B^*[I+D_{\nu,1}(*,2h)]\cdot 2h & 0 & \ldots & C^*[I+D_{\nu,N}(*,2Nh)]\cdot 2h \\ I+D_{\nu,1}(*,2h) & -I-D_{\nu,2}(*,2h) & \ldots & 0 \\ 0 & I+D_{\nu,2}(*,2h) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -I-D_{\nu,N}(*,2h) \end{array}\right|,$$

для $r=\overline{1,N}$

$$D_{\nu,r}(*,t)=\int\limits_{(2r-1)h}^{t}A^*(\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(2r-1)h}^{t}A^*(\tau_1)\int\limits_{(2r-1)h}^{\tau_1}A^*(\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\ldots+$$

$$+\int\limits_{(2r-1)h}^{t}A^*(\tau_1)\int\limits_{(2r-1)h}^{\tau_1}A^*(\tau_2)\ldots\int\limits_{(2r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}A^*(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_2d\tau_1, t\in[2(r-1)h,2rh).$$

Обозначив через λ_r^* значение функции $x^*(t)$ при $t=(2r-1)h$ и на интервале $[2(r-1)h, 2rh)$ введя функцию $u_r^*(t)=x^*(t)-\lambda_r^*$, $r=\overline{1,N}$, нетрудно показать, что матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,2h}(\lambda^*,u^*)}{\partial\lambda}$ совпадает с $Q_\nu(*,2h)$. Действительно, матрица Якоби имеет вид

$$\frac{\partial Q_{\nu,2h}(\lambda,u)}{\partial\lambda}=\left(\frac{\partial Q^{(r)}_{\nu,2h}(\lambda_1,\ldots,\lambda_N,u_1,\ldots,u_N)}{\partial\lambda_s}\right),\quad r,s=\overline{1,N}.$$

В силу того, что пара $(\lambda_r^*,u_r^*(t))$ на интервале $[2(r-1)h,2rh)$, $r=\overline{1,N}$, удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра $u_r^*(t)=\int\limits_{(2r-1)h}^{t} f(\tau,\lambda_r^*+u_r^*(\tau))d\tau$, получим равенства

$$\frac{\partial Q^{(1)}_{\nu,2h}(\lambda_1^*,...,\lambda_N^*,u_1^*,...,u_N^*)}{\partial\lambda_1}=2hg'_{\nu}\left[\lambda_1^*+\int\limits_h^0 f\left(\tau_1,\lambda_1^*+...+\int\limits_h^{\tau_{\nu-1}} f\left(\tau_\nu,\lambda_1^*+u_1^*\left(\tau_\nu\right)\right)d\tau_\nu...\right)d\tau_1,\right.$$

$$\left.\lambda_N^*+\int\limits_{(2N-1)h}^{2Nh} f\left(\tau_1,\lambda_N^*+...+\int\limits_{(2N-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f\left(\tau_\nu,\lambda_N^*+u_N^*\left(\tau_\nu\right)\right)d\tau_\nu...\right)d\tau_1\right]\times\left[I+\int\limits_h^0 f'_x\left(\tau_1,\lambda_1^*+...\right.\right.$$

$$\left.\left....+\int\limits_h^{\tau_{\nu-1}} f\left(\tau_\nu,\lambda_1^*+u_1^*\left(\tau_\nu\right)\right)d\tau_\nu...\times\left[...\left[I+\int\limits_h^{\tau_{\nu-1}} f'_x\left(\tau_\nu,\lambda_1^*+u_1^*\left(\tau_\nu\right)\right)d\tau_\nu\right]...\right]\right)d\tau_1\right]=$$

$$=2hg'_\vartheta\left[\lambda_1^*+u_1^*\left(0\right),\lambda_N^*+\lim_{t\to2Nh-0}u_N^*\left(t\right)\right]\times\left[I+\int\limits_h^0 f'_x\left(\tau_1,\lambda_1^*+u_1^*\left(\tau_1\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[...\left[\int\limits_h^{\tau_{\nu-1}} f'_x\left(\tau_\nu,\lambda_1^*++u_1^*\left(\tau_\nu\right)\right)d\tau_\nu\right]...\right]d\tau_1=2hg'_\vartheta\left[\lambda_1^*+u_1^*\left(0\right),\lambda_N^*+\lim_{t\to2Nh-0}u_N^*\left(t\right)\right]\times\right.$$

$$\times\left[I+D_{\nu,1}\left(*,2h\right)\right]=2hg'_\vartheta\left[x^*(0),x^*(T)\right]\times\left[I+D_{\nu,1}\left(*,2h\right)\right]=2hB^*\left[I+D_{\nu,1}\left(*,2h\right)\right],$$

$$\frac{\partial Q^{(1)}_{\nu,2h}(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_N^*,u_1^*,\ldots,u_N^*)}{\partial\lambda_s}=0,s=\overline{2,N-1};$$

$$\frac{\partial Q^{(1)}_{\nu,2h}(\lambda_1^*,...,\lambda_N^*,u_1^*,...,u_N^*)}{\partial\lambda_N}=2hg'_{w}\left[\lambda_1^*+\int\limits_h^0 f\left(\tau_1,\lambda_1^*+...+\int\limits_h^{\tau_{\nu-1}} f\left(\tau_\nu,\lambda_1^*+u_1^*\left(\tau_\nu\right)\right)d\tau_\nu...\right)d\tau_1,\right.$$

$$\left.\lambda_N^*+\int\limits_{(2N-1)h}^{2Nh} f\left(\tau_1,\lambda_N^*+...+\int\limits_{(2N-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f\left(\tau_\nu,\,\lambda_N^*+u_N^*\left(\tau_\nu\right)\right)d\tau_\nu...\right)d\tau_1\right]\times\left[I+\int\limits_{(2N-1)h}^{2Nh} f'_x\left(\tau_1,\lambda_N^*+...\right.\right.$$

$$...+\int\limits_{(2N-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f\left(\tau_\nu,\lambda_N^*+u_N^*(\tau_\nu)\right)d\tau_\nu...\times\left[...\left[I+\int\limits_{(2N-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f'_x\ \left(\tau_\nu,\lambda_N^*+u_N^*\left(\tau_\nu\right)\right)d\tau_\nu\right]...\right]\,)\,d\tau_1]=$$

$$= 2hg'_w \left[\lambda_1^* + u_1^*(0)\,,\ \lambda_N^* + \lim_{t\to 2Nh-0} u_N^*(t)\right] \times$$

$$\times \left[I + \int\limits_{(2N-1)h}^{2Nh} f'_x(\tau_1, \lambda_N^* + u_N^*(\tau_1)) \left[\ldots \left[I + \int\limits_{(2N-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f'_x(\tau_\nu, \lambda_N^* + u_N^*(\tau_\nu))\right] d\tau_\nu \ldots\right] .d\tau_1\right] =$$

$$= 2hg'_w[x^*(0), x^*(T)][I + D_{\nu,N}(*,2h)] = 2hC^*[I + D_{\nu,N}(*,2h)],$$

для $s = r-1$, $r = \overline{2,N}$, имеем

$$\frac{\partial Q^{(r)}_{\nu,2h}(\lambda_1^*, ..., \lambda_N^*, u_1^*, ..., u_N^*)}{\partial \lambda_s} = I + \int\limits_{(2s-1)h}^{2sh} f'_x(\tau_1,\ \lambda_s^* + ... + \int\limits_{(2s-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_s^* + u_s^*(\tau_\nu))\, d\tau_\nu \ldots) \times$$

$$\times \left[\ldots \left[I + \int\limits_{(2s-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f'_x\ (\tau_\nu, \lambda_s^* + left. + u_s^*(\tau_\nu))\ d\tau_\nu\right] . .\right] d\tau_1 = I + \int\limits_{(2s-1)h}^{2sh} f'_x(\tau_1, \lambda_s^* + u_s^*(\tau_1)) \times$$

$$\times \left[\ldots \left[I + \int\limits_{(2s-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f'_x(\tau_\nu, \lambda_s^* + u_s^*(\tau_\nu)) d\tau_\nu\right] \ldots\right] d\tau_1 = I + D_{\nu,s}(*,2h)\,;$$

$$\frac{\partial Q^{(r)}_{\nu,2h}(\lambda_1^*, ..., \lambda_N^*, u_1^*, ..., u_N^*)}{\partial \lambda_r} = -I - \int\limits_{(2s+1)h}^{2sh} f'_x\left(\tau_1, \lambda_{s+1}^* + ... + \int\limits_{(2s+1)h}^{\tau_{\nu-1}} f\left(\tau_\nu, \lambda_{s+1}^* + u_{s+1}^*(\tau_\nu)\right) d\tau_\nu \ldots\right) \times$$

$$\times \left[\ldots \left[I + \int\limits_{(2s+1)h}^{\tau_{\nu-1}} f'_x\left(\tau_\nu, \lambda_{s+1}^* + \quad + u_{s+1}^*(\tau_\nu)\right) d\tau_\nu\right] \ldots\right] d\tau_1 = -I - \int\limits_{(2s+1)h}^{2sh} f'_x\left(\tau_1, \lambda_{s+1}^* + u_{s+1}^*(\tau_1)\right) \times$$

$$\times \left[\ldots \left[I + \int\limits_{(2s+1)h}^{\tau_{\nu-1}} f'_x\left(\tau_\nu, \lambda_{s+1}^* + u_{s+1}^*(\tau_\nu)\right) d\tau_\nu\right] \ldots\right] d\tau_1 = -I - D_{\nu,s+1}(*,2h)\,; \qquad r = \overline{2,N};$$

$$\frac{\partial Q^{(r)}_{\nu,2h}(\lambda_1^*, ..., \lambda_N^*, u_1^*, ..., u_N^*)}{\partial \lambda_s} = 0, \qquad s \neq r-1, \quad s \neq r, \quad r = \overline{2,N},$$

т.е. $\dfrac{\partial Q_{\nu,2h}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda} = Q_\nu(*,2h)$. Тогда, в силу условий теоремы 1, матрица $Q_\nu(*,2h)$ обратима и выполняются неравенства

$$\|f'_x(t, x^*(t))\| \leq L(t), \qquad \|g'_\vartheta[x^*(0), x^*(T)]\| \leq L_1, \qquad \|g'_w[x^*(0), x^*(T)]\| \leq L_2,$$

$$\left\|[Q_\nu(*,2h)]^{-1}\right\| \leq \gamma_\nu(2h),$$

$$q_\nu(2h) = \gamma_\nu(2h) \max(1, 2h \max(\|B^*\|, \|C^*\|)) \max_{r=\overline{1,N}} \left\{ e^{\int\limits_{(2r-1)h}^{2rh} L(t)dt} - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{1}{i!} \left(\int\limits_{(2r-1)h}^{2rh} L(t)dt \right)^i + \right.$$

$$+e^{\int\limits_{2(r-1)h}^{(2r-1)h} L(t)dt} - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{1}{i!} \left| \left(\int\limits_{(2r-1)h}^{2(r-1)h} L(t)dt \right)^i \right| \Bigg\} < 1.$$

При этих условиях существование только тривиального решения однородной задачи (3),(4) устанавливается по схеме доказательства теоремы 2 [7]. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Краевая задача (1), (2) имеет изолированное решение тогда и только тогда, когда для любого $\nu \in \mathbb{N}$ существуют $h = h(\nu) > 0 : 2Nh = T(N = 1, 2, \ldots)$, $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t], R[t], \rho) \in$ $\in U_0(f, g, L(t), L_1, L_2, 2h)$, при которых матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,2h}(\lambda, u)}{\partial \lambda}$ обратима для любых $(\lambda, u[t]) \in$ $\in S(\lambda^{(0)}, \rho) \times S(u^{(0)}[t], R[t]\rho)$ и выполнены неравенства (1)–(3) теоремы 1 [5].

Доказательство. Пусть $x^*(t)$ — изолированное решение задачи (1), (2) и функции f, g соответственно в G^*_{3,ρ_0}, G^*_{4,ρ_0} имеют равномерно непрерывные частные производные $f'_x(t, x)$, $g'_v(v, w)$, $g'_w(v, w)$. Тогда существуют числа α, L_1, L_2, при которых справедливы неравенства $\|f'{}_x(t, x)\| \leq$ $\leq \alpha$, $(t, x) \in G^*_{3,\rho_0}$ $\|g'{}_v(v, w)\| \leq L_1$, $\|g'{}_w(v, w)\| \leq L_2$ $(v, w) \in G^*_{4,\rho_0}$, и однородная двухточечная краевая задача (3), (4) имеет только тривиальное решение, а соответствующая неоднородная краевая задача

$$\frac{dy}{dt} = f'{}_x(t, x^*(t))y + p(t), \quad t \in [0, T], \quad y \in R^n,$$

$$g'{}_v[x^*(0), x^*(T)]y(0) + g'{}_w[x^*(0), x^*(T)]y(t) = d$$

имеет единственное решение при любых $p(t)$, d. Применяя теорему 3 [6], получим, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$ существует $h = h(\nu) : 2Nh = T$, при которых матрица $Q_\nu(*, 2h) : R^{nN} \to R^{nN}$ обратима и выполняются неравенства

$$a)\ ||[Q_\nu(*, 2h)]^{-1}|| \leq \gamma^*_\nu(2h);$$

$$b)\ q^*_\nu(2h) = \gamma^*_\nu(2h) \max(1, 2h \max(L_1, L_2)) \max_{r=\overline{1,N}} \left\{ e^{\int\limits_{(2r-1)h}^{2rh} L(t)dt} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{1}{i!} \left(\int\limits_{(2r-1)h}^{2rh} L(t)dt \right)^i + e^{\int\limits_{2(r-1)h}^{(2r-1)h} L(t)dt} - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{1}{i!} \left| \left(\int\limits_{(2r-1)h}^{2(r-1)h} L(t)dt \right)^i \right| \right\} < 1.$$

При найденном шаге $2h > 0$ за $\left(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t]\right)$ возьмем

$$\lambda^* = (\lambda^*_1, \lambda^*_2, ..., \lambda^*_N) \in R^{nN}, u^*[t] = (u^*_1(t), u^*_2(t), \ldots, u^*_N(t))',$$

где $\lambda^*_r = x^*[(2r-1)h]$, $u^*_r(t) = x^*(t) - x^*[(2r-1)h]$, $t \in [2(r-1)h, 2rh]$, $r = \overline{1, N}$. Функции $R_r(t)$ определяются равенствами $R_r(t) = e^{\alpha\|[t-(2r-1)h]\|} - 1$, $t \in [2(r-1)h, 2rh]$, $r = \overline{1, N}$. Выберем числа $\rho_1 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, удовлетворяющие неравенствам

$$a) e^{\alpha h}\rho_1 < \rho_0, \quad b) \varepsilon_1 \gamma^*_\nu(2h) < 1, \quad c) q^*_\nu(2h) < 1 - \varepsilon_1 \gamma^*_\nu(2h). \tag{5}$$

Если построим множества

$$G^*_1(R[t], \rho_1) = \Big\{(t, x) : \ t \in [0, T], \quad \|x - \lambda^*_r - u^*_r(t)\| < e^{\alpha\|t-(2r-1)h\|}\rho_1 \ ,$$

$$t\in[2\,(r-1)\,h,2rh)\,,\quad r=\overline{1,N},\quad \left\|x-\lambda_N^*-\lim_{t\to T-0}u_N^*\,(t)\right\|<e^{\alpha h}\rho_1,t=T\Big\}\,,$$

$$G_2^*\,(R\,[t]\,,\rho_1)=\Big\{(\upsilon,w):\|\upsilon-\lambda_1^*-u_1^*\,(0)\|\le e^{\alpha\|t-(2r-1)h\|}\rho_1,$$

$$\left\|w-\lambda_N^*-\lim_{t\to T-0}u_N^*\,(t)\right\|\le e^{\alpha h}\rho_1\Big\}\,,$$

тогда из равенств

$$\|x-\lambda_r^*-u_r^*\,(t)\|=\|x-x^*\,(t)\|\,,\quad t\in[2\,(r-1)\,h,2rh)\,,\quad r=\overline{1,N},$$

$$\left\|x-\lambda_N^*-\lim_{t\to 2Nh-0}u_N^*\,(t)\right\|=\|x-x^*\,(T)\|\,,\quad x^*\,(0)=\lambda_1^*+u_1^*\,(0)\,,\quad x^*\,(T)=\lambda_N^*+\lim_{t\to 2Nh-0}u_N^*\,(t)\,,$$

в силу условия (5 a), получим, что $G_1^*(R[t],\rho_1)\subset G_{3,\rho_0}^*$, $G_2^*(R[t],\rho_1)\subset G_{4,\rho_0}^*$. Тогда из равномерной непрерывности частных производных $f_x^{'}(t,x)$, $g_v^{'}(v,w)$, $g_w^{'}(v,w)$ соответственно в G_{3,ρ_0}^*, G_{4,ρ_0}^* следует равномерная непрерывность матрицы Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,2h}(\lambda,u)}{\partial\lambda}$ в $S(\lambda^*,\rho_1)\times S(u^*[t],e^{\alpha h}\rho_1)$. Поэтому для $\varepsilon_1>0$ найдется $\rho^*=\rho^*(\varepsilon_1)\in(0,\rho_1]$ такое, что

$$\left\|\frac{\partial Q_{\nu,2h}\,(\lambda,u)}{\partial\lambda}-\frac{\partial Q_{\nu,2h}\,(\lambda^*,u^*)}{\partial\lambda}\right\|\le\varepsilon_1,$$

если

$$(\lambda,u)\in S(\lambda^*,\rho^*)\times S(u^*[t],e^{\alpha h}\rho^*).$$

Так как $\varepsilon_1\gamma_\nu^*(2h)<1$, то отсюда и из теоремы о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов следует, что матрица Якоби обратима при всех $(\lambda,u[t])\in S(\lambda^*,\rho^*)\times S(u^*[t],e^{\alpha h}\rho^*)$ и

$$\left\|\frac{\partial Q_{\nu,2h}\,(\lambda,u)}{\partial\lambda}\right\|\le\frac{\gamma_\nu^*\,(2h)}{1-\varepsilon_1\gamma_\nu^*\,(2h)},$$

т.е. неравенство (1) теоремы 1 [5] выполняется с $\gamma_\nu(2h)=\dfrac{\gamma_\nu^*(2h)}{1-\varepsilon_1\gamma_\nu^*(2h)}$. В силу (5 c) неравенство (2) теоремы 1 [5] выполняется с числом

$$q_\nu(2h)=\frac{\gamma_\nu^*(2h)}{1-\varepsilon_1\gamma_\nu^*(2h)}\max(1,2hmax(\parallel B^*\parallel,\parallel C^*\parallel)\max_{r=\overline{1,N}}\{e^{\int\limits_{(2r-1)h}^{2rh}L(t)dt}-$$

$$-\sum_{i=0}^{\nu}\frac{1}{i!}(\int\limits_{(2r-1)h}^{2rh}L(t)dt)^i+e^{\int\limits_{2(r-1)h}^{(2r-1)h}L(t)dt}-\sum_{i=0}^{\nu}\frac{1}{i!}|(\int\limits_{(2r-1)h}^{2(r-1)h}L(t)dt)^i|\}<1.$$

Учитывая, что $Q_{\nu,2h}(\lambda^*,u^*)=0$, установим справедливость неравенства (3) теоремы 1 [6]. Теорема 2 доказана.

Если $x^*(t)$ является изолированным решением, то по теореме 2 существуют

$$\nu\in\mathbb{N},h>0:2Nh=T,\rho_1>0,\ R[t]\ge 0,$$

при которых условия теоремы 1 [6] выполняются в

$$S(\lambda^*,\rho_1)\times S(u^*[t],R[t]\rho_1),$$

где

$$\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_N^*)' \in R^{nN}, \ \ u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \ldots, u_N^*(t))',$$

$$\lambda_r^* = x^*[(2r-1)h], u_r^*(t) = x^*(t) - x^*[(2r-1)h], t \in [2(r-1)h, 2rh), r = \overline{1, N}.$$

Тогда, согласно теоремам 1, 2, это решение будет изолированным в обычном смысле. Наряду с (1), (2) рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{f}\,(t, x)\,, \quad t \in (0, T)\,, \quad x \in R^n; \tag{1'}$$

$$\tilde{g}\,[x\,(0)\,, \quad x\,(T)] = 0, \tag{2'}$$

где $\tilde{f} : [0, T] \times R^n \to R^n$, $\tilde{g} : R^n \to R^n$ непрерывны. Предположим, что $x^*(t)$ — изолированное решение задачи (1), (2) и $\lambda_r^* = x^*[(2r-1)h]$, $u_r^*(t) = x^*(t) - x^*[(2r-1)h]$, $t \in [2(r-1)h, 2rh)$, $r = \overline{1, N}$. По определению изолированного решения

$$\left\|{f'}_x\,(t,x)\right\| \leq \alpha, (t,x) \in G^*_{3,\rho_0}, \left\|{g'}_v(v,w)\right\| \leq L_1, \qquad \left\|{g'}_w(v,w)\right\| \leq L_2\,(v,w) \in G^*_{4,\rho_0}$$

и существует единственное тривиальное решение линейной однородной двухточечной задачи (3), (4), где $\rho_0 > 0, \alpha, L_1, L_2$ — неотрицательные числа. Из теоремы 2 при $\nu = 1$ следует существование чисел $h > 0 : 2Nh = T$, $\rho_1 \in (0, \rho_0]$, при которых матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{1,2h}(\lambda, u)}{\partial \lambda}$ обратима для всех $(\lambda, u) \in S(\lambda^*, \rho_1) \times S(u^*[t], (e^{\alpha h} - 1)\rho_1)$ и:

1) $\left\| \left[\frac{\partial Q_{1,2h}(\lambda,u)}{\partial \lambda}\right]^{-1} \right\| \leq \gamma_1\,(2h)\,;$

2) $q_1(2h) = \gamma_1(2h) \times 2\max(1, 2h\max(L_1, L_2))[e^{\alpha h} - 1 - \alpha h] < \frac{1}{4}$;

3) $2\rho_1 e^{\alpha h} < \rho_0$.

В следующем утверждении устанавливается непрерывная зависимость изолированных решений от исходных данных. При этом используются найденные выше числа

$$h > 0 : 2Nh = T, \quad \rho_1 > 0, \alpha, L_1, L_2, \gamma_1(2h)$$

и функции $\omega_i(\delta), i = 1, 2,$ определяемые равенствами

$$\omega_1(\delta) = \omega({g'}_v(v,w), \ \ G_2^*(e^{\alpha h} - 1, \rho_1), \delta), \ \ \omega_2(\delta) = \omega({g'}_w(v,w), \ \ G_2^*(e^{\alpha h} - 1, \rho_1), \delta),$$

где

$$\omega(F(z), G, \delta) = \sup_{\|z'-z''\|<\delta, z', z'' \in G} \| \ F(z') - F(z'') \ \| \,.$$

При наших предположениях $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega_i(\delta) = 0, i = 1, 2.$

Теорема 3. Пусть $x^*(t)$ — изолированное решение задачи (1), (2), и функции $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ соответственно в $G_1^*(e^{\alpha h} - 1, \rho_1)$, $G_2^*(e^{\alpha h} - 1, \rho_1)$ имеют непрерывные частные производные $\tilde{f}'_x\,(t,x)$, $\tilde{g}'_\vartheta\,(\vartheta, w)$, $\tilde{g}'_w\,(\vartheta, w)$, удовлетворяющие предположениям:

$$\left\|\tilde{f}\,(t,x) - f\,(t,x)\right\| \leq \varepsilon_1,$$

$$\left\|\tilde{f}'_x\,(t,x) - {f'}_x\,(t,x)\right\| \leq \varepsilon_2,$$

$$\left\|\tilde{g}\,(\vartheta, w) - g\,(v, w)\right\| \leq \varepsilon_3,$$

$$\left\|\tilde{g}'_\vartheta(\vartheta,w) - g'_v(\vartheta,w)\right\| \le \varepsilon_4,$$
$$\left\|\tilde{g}'_w(\vartheta,w) - g'_w(\vartheta,w)\right\| \le \varepsilon_5,$$
$$\varepsilon_i - const, i = \overline{1,5}.$$

Тогда при выполнении неравенств

1) $\gamma_1(2h) \times h\{\max(1, 2h\max(\varepsilon_4 + L_1, \varepsilon_5 + L_2)) \cdot \varepsilon_2 + 2 \times [\varepsilon_4 + \omega_1(\varepsilon_1 h) + \varepsilon_5 + \omega_2(\varepsilon_1 h)](1+\alpha h)\} < \dfrac{1}{4}$;

2) $\gamma_1(2h)\max(1, 2h\max(L_1+\varepsilon_4, L_2+\varepsilon_5))[e^{(\alpha+\varepsilon_2)h} - 1 - (\alpha+\varepsilon_2)h] < \dfrac{1}{4}$;

3) $e^{\varepsilon_2 h} < 2$;

4) $4\gamma_1(2h) \times h[\max(1, 2h\max(L_1, L_2)) \cdot \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3] < \rho_1$

задача (1'), (2') в $S(x^*(t), e^{\alpha h}\rho_1)$ имеет изолированное решение $\widetilde{x}(t)$ и справедлива оценка

$$\max_{t\in[0,T]} \|\tilde{x}(t) - x^*(t)\| \le 4e^{\alpha h}\gamma_1(2h)h\left[\max\left(1, 2h\max\left(L_1, L_2\right)\right)\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3\right]. \tag{6}$$

Доказательство. Из условий теоремы следует обратимость матрицы Якоби $\dfrac{\partial Q_{1,2h}(\lambda,u)}{\partial\lambda}$ при всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^*, \rho_1) \times S(u^*[t], (e^{\alpha h}-1)\rho_1)$ и справедливость оценок

$$\left\|\left[\frac{\partial Q_{1,2h}(\lambda,u)}{\partial\lambda}\right]^{-1}\right\| \le \gamma_1(2h),$$

$$\left\|\frac{\partial\tilde{Q}_{1,2h}(\lambda,u)}{\partial\lambda} - \frac{\partial Q_{1,2h}(\lambda,u)}{\partial\lambda}\right\| \le \{\max\left(1, 2h\max\left(\varepsilon_4 + L_1, \varepsilon_5 + L_2\right)\right) \cdot \varepsilon_2 + 2\left(\varepsilon_4 + \omega_1\left(\varepsilon_1 h\right) + \right.$$
$$\left. + \omega_2\left(\varepsilon_1 h\right) + \varepsilon_5\right)\left(1 + \alpha h\right)\} \cdot h.$$

Тогда по теореме о малых возмущениях матрица $\dfrac{\partial\tilde{Q}_{1,2h}(\lambda,u)}{\partial\lambda}$ обратима и $\left\|\left[\frac{\partial\tilde{Q}_{1,2h}(\lambda,u)}{\partial\lambda}\right]^{-1}\right\| \le$ $\le \tilde{\gamma}_1(2h) = \frac{4}{3}\gamma_1(2h)$. Так как по выбору $\varepsilon_2 > 0$, $e^{(\alpha+\varepsilon_2)h}\rho_1 < \rho_0$, то для всех $(t,x) \in G_1^*(e^{\alpha h}-1, \rho_1)$, выполняется неравенство $\left\|\tilde{f}'_x(t,x)\right\| \le \left\|\tilde{f}'_x(t,x) - f'_x(t,x)\right\| + \|f'_x(t,x)\| \le \tilde{\alpha} = \alpha + \varepsilon_2$, а для всех $(v,w) \in G_2^*(e^{\alpha h}-1, \rho_1)$ — $\|\tilde{g}'_v(v,w)\| \le \|\tilde{g}'_v(v,w) - g'_v(v,w)\| + \|g'_v(v,w)\| \le \tilde{L}_1 = L_1 + \varepsilon_4$ $\|\tilde{g}'_w(v,w)\| \le \|\tilde{g}'_w(v,w) - g'_w(v,w)\| + \|g'_w(v,w)\| \le \tilde{L}_2 = L_2 + \varepsilon_5$ и ввиду неравенства (2) теоремы 1

$$\tilde{q}_1(2h) = \tilde{\gamma}_1(2h) \times 2\max\left(1, 2h\max\left(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2\right)\right)\left(e^{\tilde{\alpha}h} - 1 - \tilde{\alpha}h\right) =$$
$$= \frac{4}{3}\gamma_1(2h) \times 2\max\left(1, 2h\max\left(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2\right)\right)\left(e^{\tilde{\alpha}h} - 1 - \tilde{\alpha}h\right) < \frac{1}{3}.$$

Принимая во внимание неравенство (4) и соотношение $Q_{1,2h}(\lambda^*, u^*) = 0$, получим

$$\left\|\tilde{Q}_{1,2h}(\lambda^*, u^*)\right\| = \left\|\tilde{Q}_{1,2h}(\lambda^*, u^*) - Q_{1,2h}(\lambda^*, u^*)\right\| \le$$
$$\le [\max(1, 2h\max(L_1, L_2)) \cdot \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3] \cdot h,$$

что при выбранных $\widetilde{h} = h > 0 : 2Nh = T$, $\nu = 1$, $\rho_1 > 0$, $\tilde{\alpha} > 0, \tilde{L}_1 > 0, \tilde{L}_2 > 0$ матрица Якоби $\dfrac{\partial\tilde{Q}_{1,2h}(\lambda,u)}{\partial\lambda}$ обратима для любых$(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^*, \rho_1) \times S(u^*[t], (e^{\tilde{\alpha}h}-1)\rho_1)$ и выполняются неравенства (1)–(3) теоремы 1 [6]. Если учесть, что $\left(\lambda^*, u^*[t], e^{\tilde{\alpha}h}-1, \rho_1\right) \in U_*\left(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\alpha}, \tilde{L}_1, \tilde{L}_2, 2h\right)$

то отсюда и из теорем 1, 2 [6] следует существование изолированного решения $\widetilde{x}(t)$ задачи (1', 2') в $S(x^*(t),(R[t]+1)\rho)$.

Для изолированного решения $x^*(t)$ задачи (1),(2) из оценки (16) из [6] при $k=0$ имеем, что $\left\|x^*(t)-x^{(0)}(t)\right\| \le \frac{\gamma_1(2h)}{1-q_1(2h)} e^{\left|\int\limits_{(2r-1)h}^{t} L(\tau)d\tau\right|} \cdot \left\|Q_{1,2h}\left(\lambda^{(0)},u^{(0)}\right)\right\|$, $t\in[2(r-1)h,2rh)$, $r=\overline{1,N}$. Учитывая, что здесь в качестве $x^*(t)$выступает $\widetilde{x}(t)$, а в качестве $x^{(0)}(t)$ — функция $x^*(t)$, из последней оценки следует, что

$$\|\tilde{x}(t)-x^*(t)\| \le \frac{\tilde{\gamma}_1(2h)}{1-\tilde{q}_1(2h)} e^{\left|\int\limits_{(2r-1)h}^{t} \tilde{\alpha} d\tau\right|} \cdot \|Q_{\nu,2h}(\lambda^*,u^*)\|, t\in[2(r-1)h,2rh), \quad r=\overline{1,N}.$$

В силу неравенства (4) получим

$$\|\tilde{x}(t)-x^*(t)\| \le \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\gamma_1(2h)\,e^{\tilde{\alpha}h}\left[\max\left(1,2h\max\left(L_1,L_2\right)\right)\cdot\varepsilon_1+2\varepsilon_3\right]h \le$$

$$\le 4\gamma_1(2h)\,e^{\tilde{\alpha}h}\left[\max\left(1,2h\max\left(L_1,L_2\right)\right)\cdot\varepsilon_2+2\varepsilon_3\right]h,\quad t\in[2(r-1)h,2rh),\ \ r=\overline{1,N},$$

откуда следует справедливость оценки (6). Теорема 3 доказана.

Список литературы

1 Keller H. Numerical methods for two-point boundary value problems. — Blaisdell: Walthan, 1968. — 184 p.

2 Roberts S.M., Shipman J.S. Two-point boundary-value problems: Shooting methods. — New York: Elsevier, 1972. — 269 p.

3 Монастырный П.И. О сходимости метода интервальной пристрелки // Журнал вычисл. математики и мат. физики. — 1978. — Т. 18. — № 6. — С. 1139-1145.

4 Монастырный П.И. О связи изолированности решений со сходимостью методов пристрелки // Диф. уравнения. — 1980. — Т. 16. — 4. — С. 732-740.

5 Джумабаев Д.С., Темешева С.М. Метод параметризации решения нелинейных двухточечных краевых задач// Журнал Вычисл. математики и мат. физики. — 2007. — Т.47. — № 1. — С.39-63.

6 Джумабаев Д.С., Назарова К.Ж. Об одном варианте метода параметризациии для нелинейной двухточечной краевой задачи. — 2006. — Т.6. — №2(20). — С. 60-67.

7 Назарова К.Ж. О корректности линейной двухточечной краевой задачи. — 2004. — Т.4. — №3(13). — С. 58-67.

К.Ж.Назарова

Бейсызық екі нүктелі шеттік есептің оқшауланған шешімінің бар болуы және оның қасиеттері

Бейсызық екі нүктелі шеттік есебі модификацияланған параметрлеу әдісімен қарастырылды. Дифференциалдық теңдеудің оң бөлігіндегі функция терминдері және шеттік шарттар арқылы оқшауланған шешімнің бар болу шарты және оның қасиеттері тағайындалды.

K.Zh.Nazarova

The existence of isolated solutions of nonlinear two-point boundary value problem and their properties

We investigated the two-point nonlinear boundary value problem by the modified method of parametrization. Conditions the existence and their properties in terms of the functions of the right side of the differential equations and boundary conditions are installed.

References

1 Keller H. *Numerical methods for two-point boundary value problems*, Blaisdell: Walthan, 1968, 184 p.

2 Roberts S.M., Shipman J.S. *Two-point boundary-value problems: Shooting methods*, New York: Elsevier, 1972, 269 p.

3 Monastyrnyy P.I. *Computational Mathematics and Matematical Physics*, 1978, 18, 6, p. 1139-1145.

4 Monastyrnyy P.I. *Differential Equations*, 1980, 16, 4, p. 732-740.

5 Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, 47, 1, p. 37–61.

6 Dzhumabaev D.S., NazarovaK.Zh. *Mathematical journal*, 2006, 6, 2(20), p. 60-67.

7 Nazarova K.Zh. *Mathematical journal*, 2004, 4, 3(13), p. 58-67.