

---

# КОНДЕНСАЦИЯ ЛАНҒАН КҮЙДІҢ ФИЗИКАСЫ ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

УДК 530.1: 537.86+621.396.96

А.А.Потапов

*Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН, Москва, Россия  
(E-mail: potapov@cplire.ru)*

## **О фрактально-скейлинговой или масштабно-инвариантной радиолокации: взгляд из юбилейного 2015 года**

Основная цель работы — истолкование основных направлений радиофизики, радиотехники и радиолокации на «фрактальном» языке, что создает новые пути и обобщения на будущие перспективные радиосистемы. В основе созданного автором впервые в России и в мире научного направления лежат концепция фрактальных радиосистем, топология выборки, глобальный фрактально-скейлинговый метод и фрактальная парадигма. Исследования проведены в рамках современного фундаментального междисциплинарного направления «Фрактальная радиофизика и фрактальная радиоэлектроника: Проектирование фрактальных радиосистем», предложенного и развиваемого автором в ИРЭ им.В.А.Котельникова РАН с целью создания прорывных информационных технологий. Данными вопросами автор занимается ровно 35 лет. Полученные автором результаты крупной научной и практической значимости были опубликованы в четырех отчетных докладах Президиума Российской академии наук (2008, 2010, 2012, 2013) и в докладе Правительству Российской Федерации (2012).

*Ключевые слова:* радиофизика, радиотехника, радиолокация, фрактал, скейлинг, динамический хаос.

### *Введение*

Богатство содержания и роль классической статистической радиофизики, радиотехники и радиолокации дает одновременно и громадные возможности для выработки альтернативных методов. В данной работе приведенные альтернативные решения в проблемах современной радиолокации базируются на идеях и методах нового научного фундаментального направления «Фрактальная радиофизика и фрактальная радиоэлектроника: Проектирование фрактальных радиосистем». Данное направление инициировано автором примерно с 1980 г. в ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН и к настоящему времени широко развито в его работах.

Интенсивное развитие современной радиолокационной техники и технологии ставит перед теорией радиолокации и новые требования. Одни из этих требований не затрагивают основ теории и сводятся в основном к увеличению точности, улучшению существующих и разработке новых методов расчета, другие же являются более фундаментальными и касаются самих основ теории радиолокации. Эти последние требования представляются наиболее важными как в теоретическом, так и в практическом плане.

Цель работы — не только изложить свою позицию, определить и предложить *новый вид радиолокации на основе фрактально-скейлинговых или масштабно-инвариантных принципов*, но и, что не менее важно, привлечь внимание к классическим вопросам общей статистической теории с современных позиций фрактального анализа, дробного исчисления и глобального фрактально-скейлингового метода.

Много комментариев требуется к этому тезису, и все дальнейшее будет этими комментариями.

### 1. Предпосылки к обсуждаемой проблеме

Как хорошо известно, советская «нелинейная» школа физиков, математиков и механиков в XX в. в области теории колебаний и радиофизики завоевала ведущее место в мировой науке. В основе данной работы лежат многолетние идеи и решения автора о необходимости перехода в науке к введенному им «фрактальному мышлению». На деле это означает, перефразируя слова С.М.Рытова о «нелинейном мышлении» из его интервью от 19 февраля 1991 г. [1; 246], найти математические средства, научиться мыслить понятиями этой математической теории, сделать эти понятия своими, привыкнуть к ним. Тогда и появится новая интуиция.

Возвращаясь к первому абзацу, следует отметить, что математический аппарат уже существует. Это — дробное исчисление и теория фракталов [2–11]. Дробный математический анализ имеет давнюю историю и чрезвычайно богатое содержание.

Необходимо сказать, что вся современная радиотехника базируется на классической теории целочисленной меры и целочисленного исчисления. Таким образом, исторически «за бортом» оказалась обширная область математического анализа, называемая дробным исчислением, имеющая дело с производными и интегралами произвольного (вещественного или комплексного) порядка, а потом также и вся теория фракталов (!).

В настоящее время в радиофизике, радиоэлектронике и обработке многомерных сигналов, как отмечено выше, преимущественно, привычно и повсеместно используются целочисленные меры (интегралы и производные целого порядка), гауссовская статистика, марковские процессы и т.п. [6, 7, 12, 13]. Замечу, что теория марковских процессов достигла уже своего насыщения и исследования проводятся на уровне резкого усложнения синтезированных алгоритмов. Улучшение классических радиолокационных обнаружителей сигналов и их математическое обеспечение, по сути, достигли своего насыщения и предела. Это заставляет изыскивать принципиально новые пути решения проблемы увеличения чувствительности или повышения дальности действия различных радиосистем.

Одновременно замечу, что в науке часто бывает так, что математический аппарат играет роль «прокрустова ложа» для идеи. За сложной математической символикой и ее значениями бывает трудно разглядеть совершенно простую идею.

В частности, одну из таких простых идей и выдвинул *первым в мире* автор в конце 70-х годов XX в., а именно, предлагая ввести в широкую практику радиофизики, радиотехники и радиолокации фракталы, скейлинг и дробное исчисление. После долгих интеллектуальных битв данная идея полностью показала свои преимущества и положительно воспринята большинством думающего научного сообщества. Сейчас по данному фундаментальному направлению список авторских работ с учениками насчитывает более 700 публикаций, в том числе 20 монографий.

С созданием в 70-х годах XX в. фрактальной геометрии (Б.Мандельброт, 1924–2010 гг.) в науку и технику начали стремительно проникать идеи дробных размерностей, дробных операторов, недифференцируемых функций, скейлинга. Данные математические понятия, объединенные с физикой фракталов, образуют новые «мостики», довольно неожиданные, между не только смежными дисциплинами, что зачастую приводит к эффективным методам решения задач, иногда трудно разрешимых на данном уровне развития классических научных направлений.

В принципе, фракталы и дробные операторы невозможны друг без друга [2–10, 12]. Дробное исчисление имеет богатую и где-то даже драматическую историю. Первая зафиксированная в истории попытка обсуждения такой идеи содержится в переписке Г.Лейбница с Я.Бернулли и Г.Лопиталем. Отметим, что громадное значение имели работы члена-корреспондента Петербургской академии наук А.В.Летникова (1(13).01.1837 – 27.02.(10.03).1888), который за время своей 20-летней научной деятельности разработал полную теорию дифференцирования с произвольным указателем. В настоящее время его работы преданы почти полному забвению, поэтому в [4, 10] воспроизведен основной цикл работ А.В.Летникова (к 175-летию со дня его рождения) и много биографических материалов, ставших библиографической редкостью. Эта область математики — приоритет и гордость России!

Уравнения с дробными производными описывают *немарковские процессы с памятью*. Именно сегодня они востребованы и в теории, и на практике.

Относительно радиолокации. Радиолокация с момента своего зарождения прошла большой и сложный путь развития. Радиолокатор — одно из сложнейших устройств — создавался на самой заре радиоэлектроники [6–8, 12, 13], и он стимулировал разработку и создание важных устройств, которые чрезвычайно широко используются сегодня. Радиолокатор и по сей день является одним из важнейших

средств и используется всеми странами мира. И сегодня работа по совершенствованию радиолокаторов и их технологий ведется постоянно и ей не видно конца. Прогресс в радиолокационной технике был связан в основном с применением статистической теории обнаружения сигналов и оценки их параметров на фоне шумов и помех. В основе этой теории лежат допущения теории статистических решений и других разделов классической математики. Проблема обнаружения объекта сводится к обнаружению сигнала, излучаемого или переизлучаемого этим объектом на фоне различного рода случайных шумов и помех. При этом проблемы оптимальной обработки радиолокационных сигналов остаются в центре внимания специалистов. В классической теории общепринято, что помехи на основе первой центральной предельной теоремы описываются гауссовским марковским процессом.

В настоящее время уже совершенно очевидно, что применение идей масштабной инвариантности — «скейлинга» совместно с теорией множеств, теорией дробной размерности, общей топологией, геометрической теорией меры и теорией динамических систем — открывает большие потенциальные возможности и новые перспективы в обработке многомерных сигналов и в родственных научных и технических областях. Другими словами, полное описание процессов современной обработки сигналов и полей невозможно с помощью формул классической математики [6–9, 12]. При фрактально-скейлинговом подходе, предложенном и развиваемом автором в течение 35 лет, описание и обработка сигналов и полей проводится исключительно в пространстве дробной меры с применением гипотез скейлинга и распределений с тяжелыми хвостами.

Основное внимание было уделено принципам, а не деталям, которые подробно изложены в [6–9, 12, 14–19]. Для понимания достаточно владеть основными понятиями общей теории множеств, теории размерности и теории вероятностей.

## 2. Кратко о теории дробной меры и нецелой размерности

Основным свойством фракталов является нецелое значение их размерности. Развитие теории размерности началось с работ Пуанкаре, Лебега, Брауэра, Урысона и Менгера. В различных областях математики возникают множества, в том или ином смысле пренебрежимо малые и не различимые в смысле меры Лебега. Для различения таких множеств с патологически сложной топологической структурой необходимо привлекать нетрадиционные характеристики малости, например, емкость, потенциал, меры и размерность Хаусдорфа и т.п. Наиболее плодотворным оказалось применение дробной размерности Хаусдорфа, тесно связанной с понятиями энтропии, фракталами и странными аттракторами в теории динамических систем [6–9, 11].

Понятие меры и размерность Хаусдорфа — одно из тех обязательных понятий, не усвоив которые органически ни один исследователь не может стать специалистом по фракталам и детерминированному хаосу. Эта дробная размерность определяется  $p$ -мерной мерой с произвольным вещественным положительным числом  $p$ , которую ввел Хаусдорф в 1919 г. В общем случае понятие меры не связано ни с метрикой, ни с топологией. Однако мера Хаусдорфа может быть построена в произвольном метрическом пространстве на основе его метрики, а сама размерность Хаусдорфа связана с топологической размерностью.

Понятия, введенные Хаусдорфом, основываются на конструкции Каратеодори (1914 г.). Пусть  $(M, \rho)$  — метрическое пространство,  $F$  — семейство подмножеств пространства  $M$  и  $f$  — такая функция на  $F$ , что  $0 \leq f(G) \leq \infty$  при  $C \in F$  и  $f(\emptyset) = 0$ . Построим вспомогательные меры  $m_f^\varepsilon$ , а затем основную меру  $\Lambda_f$  следующим образом. При  $E \subset M$  и  $\varepsilon > 0$  значение  $m_f^\varepsilon$  определяется как точная нижняя грань множества чисел:

$$m_f^\varepsilon = \inf \sum_i f(G_i) \tag{1}$$

по всевозможным счётным  $\varepsilon$ -покрытиям  $\{G_i\}$ ,  $G_i \in F$ .

Из неравенства  $m_f^{\varepsilon_1}(E) \geq m_f^{\varepsilon_2}(E)$  для  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$  следует существование предела

$$\Lambda(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} m_f^\varepsilon(E) = \sup m_f^\varepsilon(E). \tag{2}$$

Ясно, что  $m_f^\varepsilon$  и  $\Lambda(E)$  — внешние меры на  $M$ . Пусть  $\rho(a, B) > \varepsilon > 0$ . Рассмотрим произвольное  $\varepsilon$ -покрытие  $\{G_i\}$  множества  $A \cup B$ , состоящее из некоторого числа множеств. Тогда семейства  $\{A \cap G_i\}$  и  $\{B \cap G_i\}$  не пересекаются и покрывают множества  $A$  и  $B$  соответственно, поэтому

$$m_f^\varepsilon(A \cup B) \geq m_f^\varepsilon(A) + m_f^\varepsilon(B) \quad (3)$$

или

$$\Lambda_f(A \cup B) = \Lambda_f(A) + \Lambda_f(B). \quad (4)$$

Класс  $\Lambda_f$ -измеримых множеств пространства  $M$  образует  $\sigma$ -кольцо, на котором внешняя мера  $\Lambda_f$  регулярна. Мету  $\Lambda_f$  также называют результатом применения конструкции Каратеодори к функции  $f$ , а внешнюю меру  $m_f^\varepsilon$  — приближающей мерой порядка  $\varepsilon$ . Мера  $\Lambda_f$  довольно тонко отражает свойства функции  $f$  и семейства  $F$ , хотя обычно и не является продолжением  $f$ .

Укажем два простых утверждения, которые описывают поведение приближающих мер на убывающей последовательности  $C_1 \supset C_2 \supset \dots$  компактных подмножеств пространства  $M$ . Если элементы семейства  $F$  являются открытыми подмножествами  $M$ , то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m_f^\varepsilon(G_i) = m_f^\varepsilon(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i). \quad (5)$$

Если  $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$  и  $f(S) = \inf \{f(T)\} : T \in F, S \subset \text{Int } T, d(T) \leq \varepsilon$  для всех таких  $S \in F$ , что  $d(S) \leq \varepsilon_0$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m_f^\varepsilon(G_i) \leq m_f^{\varepsilon_0}(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i), \quad (6)$$

где  $d$  — диаметр множеств,  $\text{Int}$  — множество всех внутренних точек множества  $T$ .

Пусть  $X$  — ограниченное компактное метрическое пространство,  $F$  — семейство всех непустых компактных множеств из  $X$ , функция  $f: F \rightarrow [0, +\infty]$  непрерывных относительно метрики Хаусдорфа и  $f(C) > 0$  для всех таких  $C \in F$ , что  $d(C) > 0$ . Если  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$  образуют возрастающую последовательность подмножеств пространства  $X$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_f^\varepsilon(A_k) = m_f^\varepsilon(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k). \quad (7)$$

Определим  $h$ -меру Хаусдорфа. Пусть  $h(r)$  — непрерывная монотонно возрастающая функция от  $r$  ( $r \geq 0$ ), для которой  $h(0) = 0$ . Класс таких функций обозначим через  $H_0$ . Применив конструкцию Каратеодори к функции  $f(E) = h[d(E)]$  при  $E \neq \emptyset$  и  $f(\emptyset) = 0$  (здесь  $d(E)$  — диаметр множества  $E$ ), получим  $\Lambda_h$ -меру Каратеодори, которую называют  $h$ -мерой Хаусдорфа. Если при этом  $h(r) = \gamma(\alpha)r^\alpha$ , где  $\alpha$  — фиксированное положительное, не обязательно целое число, а  $\gamma(\alpha)$  — положительная константа, зависящая только от  $\alpha$ , то  $h$ -меру Хаусдорфа называют  $\alpha$ -мерной мерой или  $\alpha$ -мерой Хаусдорфа  $H_\alpha$ , которая является борелевской регулярной мерой.

Конструкцию  $h$ -меры Хаусдорфа можно представить себе следующим образом. Покроем  $\alpha$  произвольной последовательностью кругов  $C_v$  радиусом  $r_v \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0; v = 1, 2, \dots$ ) и обозначим через  $m_h^\varepsilon(\alpha, h) \geq 0$  нижнюю грань соответствующих сумм  $\sum_{v=1}^{\infty} h(r_v)$ . Это число возрастает при убывании  $\varepsilon$ .

По определению

$$\Lambda_h(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m_h^\varepsilon(\alpha, h), \quad (8)$$

следовательно

$$0 \leq \Lambda_h(E) \leq +\infty. \quad (9)$$

Предел (8) является *внешней*  $h$ -мерой Хаусдорфа, которая на  $\sigma$ -кольце  $\Lambda_h$ -измеримых множеств пространства  $M$  является борелевски регулярной мерой. Выбирая в качестве  $h(r)$  различные функции, мы получаем: линейную меру ( $h(r) = 2\pi r$ ), плоскую меру ( $h(r) = \pi r^2$ ) и логарифмическую меру ( $h(r) = 1/\ln r$ ).

Из условия  $E_1 \subset E_2$  следует  $\Lambda_h(E_1) \leq \Lambda_h(E_2)$ , т.е.  $h$ -мера Хаусдорфа — монотонно возрастающая функция множества. С использованием  $h$ -меры размерность множества определяется следующим образом. Если  $0 < \Lambda_h(A) < \infty$ , то  $\langle h \rangle$  называется метрической размерностью (размерностью Хаусдорфа)

множества  $A$ . Если  $h(r) = cr^\alpha$  и  $0 = \Lambda_n(A) < \infty$ , то размерность множества  $A$  обозначается через  $\langle \alpha \rangle$ , здесь  $c$  — константа. Множество определенной размерности имеет для каждой внешней размерности  $h$ -меру, равную 0, для каждой низшей —  $h$ -меру, равную  $\infty$ .

Дальнейшим обобщением понятия размерности является *размерность Хаусдорфа – Безиковича*, которая вводится через неотрицательные числа  $\alpha_0 = \alpha_0(E)$  в виде равенства

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha : H_\alpha(E) \neq 0\} = \inf\{\alpha : H_\alpha(E) = 0\} \quad (10)$$

для множества  $E$ . Размерность Хаусдорфа – Безиковича множества определяется поведением  $H_\alpha(E)$  не как функции от  $E$ , а как функции от  $\alpha$ .

Корректность определения (10) подтверждает следующее свойство  $H_\alpha$ -меры. Если  $H_{\alpha_1}(E) < \infty$ , то  $H_\alpha(E) = 0$  для любого  $\alpha_2 > \alpha_1$ . Если мера  $H_{\alpha_2}(E)$  отлична от нуля, то  $H_{\alpha_1}(E) = \infty$  для любого положительного  $\alpha_1 < \alpha_2$ . Отсюда следует, что для множества  $E \subset M$  или  $H_\alpha(E) = 0$  для любого  $\alpha > 0$ , тогда  $\alpha_0(E) = 0$  по определению, или существует точка «перескока»  $\alpha_0$ , такая что  $H_\alpha(E) = \infty$  для  $\alpha < \alpha_0$  и  $H_\alpha(E) = 0$  для  $\alpha > \alpha_0$ . Данное число  $\alpha_0$  и есть размерность Хаусдорфа – Безиковича.

Если при определении  $H_\alpha$ -меры Хаусдорфа покрытия осуществляют шарами одинакового диаметра, то такую меру называют энтропийной. Тогда размерность (10) называют энтропийной или размерностью Колмогорова. Для множеств положительной  $k$ -мерной меры Лебега обе размерности совпадают и равны  $K$ . Размерность Хаусдорфа – Безиковича характеризует внешнее свойство множества. Поэтому целесообразно ввести понятие Хаусдорфа – Безиковича множества в точке, которая характеризовала бы его внутреннюю структуру.

В этом случае число

$$\alpha_E(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_0(E \cap O_n(x_0)) \quad (11)$$

называют локальной размерностью Хаусдорфа–Безиковича множества  $E$  в точке  $x_0$ . Здесь  $\{O_n(x_0)\}$  — произвольная последовательность стягивающих окрестностей точки  $x_0 \in M$ .

Каждое ограниченное замкнутое множество  $E$   $m$ -мерного евклидова пространства содержит точку  $x_0 \in E$  такую, что

$$\alpha_E(x_0) = \alpha_0(E). \quad (12)$$

Функцию  $\alpha_E(x)$  называют функцией локальной размерности Хаусдорфа – Безиковича, если:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha_E(x) \leq \alpha_0(E) \text{ для любого } x \in M, \\ \alpha_E(x) &= 0, \text{ если множество } E \text{ — замкнутое и } x \notin E, \\ \alpha_E(x) &= 0 \text{ для всех изолированных точек множества } E. \end{aligned} \quad (13)$$

Размерность Хаусдорфа – Безиковича является метрическим понятием, но существует ее фундаментальная связь с топологической размерностью  $\dim E$ , которую установили Л.С.Понтрягин и Л.Г.Шнирельман, введя в 1932 г. понятие метрического порядка, а именно нижняя грань размерности Хаусдорфа – Безиковича для всех метрик компакта  $E$  равна его топологической размерности:  $\dim E \leq \alpha(E)$ . Один из широко используемых методов для оценки хаусдорфовой размерности множеств, известный как принцип распределения масс, предложил Фростман в 1935 г.

Множества, размерность Хаусдорфа – Безиковича которых является дробным числом, называют фрактальными множествами, или фракталами. Более строго, множество  $E$  называется фрактальным (фракталом) в широком смысле (в смысле Б.Мандельброта), если его топологическая размерность не совпадает с размерностью Хаусдорфа – Безиковича, а именно  $\alpha_0(E) > \dim E$ . Например, множество  $E$  всех иррациональных точек  $[0; 1]$  является фрактальным в широком смысле, так как  $\alpha_0(E) = 1$ ,  $\dim E = 0$ . Множество  $E$  называется фрактальным (фракталом) в узком смысле, если  $\alpha_0(E)$  не является целым. Фрактальное множество в узком смысле является таким и в широком смысле.

Как впервые было показано А.С.Безиковичем в 1929 г., существуют глубокие различия между лебеговскими множествами и фракталами. В первую очередь, эти особенности касаются плотностей. Геометрические свойства фрактального множества  $E$  определяются поведением функции

$$D(x, \varepsilon) = \frac{H_\alpha(E \cap O(x, \varepsilon))}{\varepsilon^\alpha} \quad (14)$$

для малых  $\varepsilon$ , где  $x$  — произвольная точка множества  $E$ . Верхней  $\alpha$ -плотностью множества  $E$  в точке  $x$  называется

$$\bar{D}_\alpha(E, x) = \overline{\lim}_{\varepsilon \leq 0} D(x, \varepsilon), \quad (15)$$

соответственно, нижняя  $\alpha$ -плотность множества  $E$  в точке  $x$  записывается в виде

$$\underline{D}_\alpha(E, x) = \underline{\lim}_{\varepsilon \leq 0} D(x, \varepsilon). \quad (16)$$

Когда  $\bar{D}_\alpha(E, x) = \underline{D}_\alpha(E, x)$ , то их общее значение называют  $\alpha$ -плотностью множества  $E$  в точке  $x$  и обозначают  $D_\alpha(E, x)$ . Если  $\varepsilon \rightarrow 0+$ , то  $\bar{D}_\alpha(E, x)$  и  $\underline{D}_\alpha(E, x)$  называют правосторонней, при  $\varepsilon \rightarrow 0-$  — левосторонней, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  — двусторонней верхней и нижней  $\alpha$ -плотностью соответственно.

Можно отметить, что для почти всех (в смысле  $H_\alpha$  — Хаусдорфа) точек  $\alpha$ -множества на прямой односторонняя верхняя (правая и левая)  $\alpha$ -плотность равна единице, односторонняя нижняя  $\alpha$ -плотность равна 0 ( $0 < \alpha < 1$ ). Для двусторонних плотностей почти во всех точках  $\alpha$ -множества на прямой двусторонняя  $\alpha$ -плотность не существует, т.е. верхняя  $\alpha$ -плотность отличается от нижней.

### 3. К понятию «фрактал» в радиолокации

В общем виде радиолокационное изображение (РЛИ) всегда можно представить как множество элементов  $X_k$ , значения которых пропорциональны эффективной площади рассеяния (ЭПР)  $k$ -го элемента разрешения радиолокационной станции (РЛС) [20]. На рисунке 1а показано РЛИ местности, полученное на длине волны  $\lambda = 8,6$  мм с вертолета. На рисунке 1б показано РЛИ того же участка местности, полученное РЛС на длине волны  $\lambda \approx 30$  см. Оба изображения являются двумерными с уровнем серого, пропорциональным ЭПР.

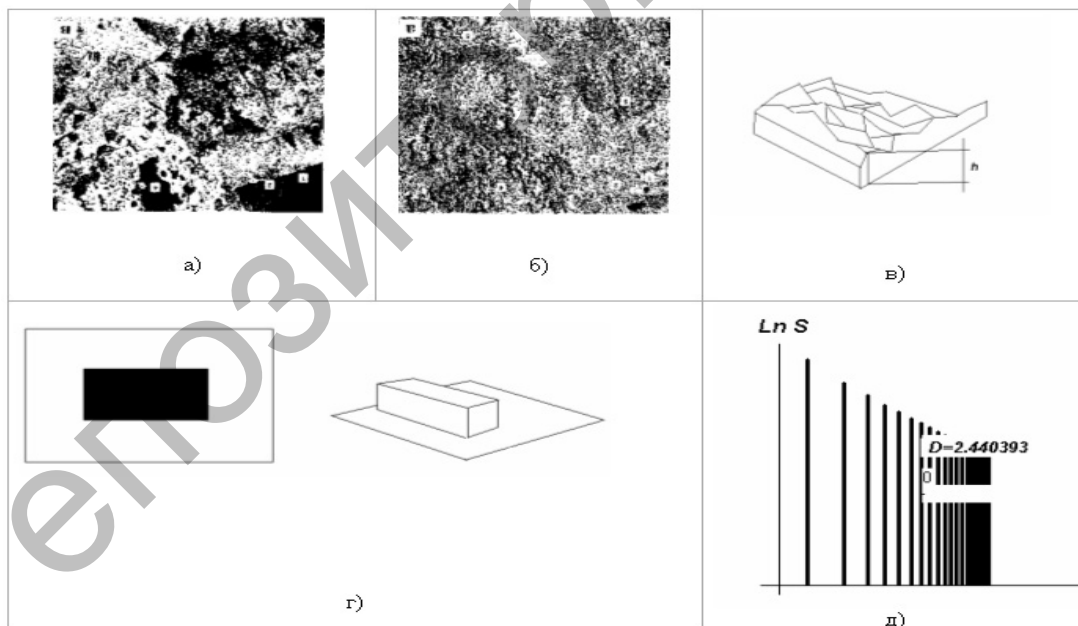


Рисунок 1. Примеры, объясняющие сущность фрактальной обработки (а-в), и фрактальная пространственная сигнатура (д)

Предположим, что для каждого РЛИ построена поверхность (рис. 1в) с высотой  $h$ , также пропорциональной уровню серого. Пусть требуется измерить площадь получившейся поверхности. На РЛИ, соответствующем  $\lambda \approx 30$  см, площадь получится меньше, чем для РЛИ на  $\lambda = 8,6$  мм из-за того, что с уменьшением длины волны различаем больше деталей местности.

Зондирующая электромагнитная волна является в этом случае некоторой «измерительной» линейкой. При этом начинает сказываться все более тонкая структура пространственно-временных сигналов или волновых полей.

Если в нашем распоряжении имеется РЛИ, полученное в еще более коротковолновом диапазоне, то его площадь будет больше, и т.д. Уменьшая длину волны  $\lambda$ , будем получать возрастающие значения площадей. Тогда возникает вопрос: а какова в действительности площадь поверхности, с которой получены РЛИ? Если поверхность покрыта простыми объектами, например прямоугольным возвышением (рис 1з), и размеры этого возвышения гораздо больше длины волны, то площади РЛИ объектов на коротких и длинных волнах будут примерно одинаковыми. Тогда на поставленный вопрос можно было бы ответить, подсчитав число элементов разрешения, покрывающих объект. Площадь  $S$  поверхности в этом случае была бы равна

$$S \equiv S(\lambda) = N(\lambda)\delta(\lambda), \quad (17)$$

где  $\delta(\lambda)$  — площадь элемента разрешения РЛС;  $N(\lambda)$  — число элементов разрешения, необходимых для покрытия объекта;  $\lambda$  — длина волны РЛС. Как уже было отмечено, для простого объекта (рис. 1з) величина  $S(\lambda) = const$ .

Для РЛИ на рисунках 1а и 1б можно построить зависимость  $S(\lambda) = f(\lambda)$ , а, предположив, что  $\delta(\lambda) = K(\lambda)$ , где  $K$  — известная функция, затем построить зависимость  $S(\lambda) = f(\delta)$ . Оказывается, что измеренная площадь  $S$  поверхности прекрасно описывается формулой

$$S(\lambda) = k\lambda^{-D}. \quad (18)$$

Тогда с помощью простой операции логарифмирования мы можем вычислить параметр  $D$ . Зависимость  $\log S(\lambda) = f(\log \delta)$ , определяющая собой *фрактальную сигнатуру*  $D(t, f, \bar{r})$  РЛИ, показана на рисунке 1д. Она характеризует пространственный *фрактальный кепстр* изображения (данное понятие введено автором в 90-х годах XX в.). Дробный параметр  $D$  называется *размерностью Хаусдорфа – Безиковича*, или *фрактальной размерностью* [6–8]. Для РЛИ объектов, имеющих простой геометрический вид (прямоугольники, круги, гладкие кривые), эта размерность совпадает с топологической, т.е. равна значению 2 для двумерных РЛИ и определяется угловым коэффициентом прямых (18) в двойных логарифмических координатах. Однако значение  $D$  для большинства изображений *реальных покровов* и *метеорологических образований* оказывается большим, чем топологическая размерность  $D_0 = 2$ , что подчеркивает их сложность и хаотичность.

#### 4. Тектурные и фрактальные меры в радиофизике и радиолокации

Радиолокатор совместно с объектами наблюдения и средой распространения радиоволн образует пространственно-временной радиолокационный канал зондирования. При радиолокационном зондировании полезный сигнал от цели является частью общего волнового поля, создаваемого всеми отражающими элементами наблюдаемых фрагментов окружающего цель фона, поэтому на практике сигналы от этих элементов образуют помеховую составляющую. Для создания радиосистем автоматического распознавания реальных неоднородных изображений ландшафтов целесообразно использование концепции текстуры [6–9, 20]. Текстура описывает пространственные свойства участков изображений земной поверхности с локально однородными статистическими характеристиками. Обнаружение и идентификация цели происходит тогда, когда цель затеняет участок фона, изменяя при этом интегральные параметры текстуры.

Многие естественные объекты, такие как почва, растительность, облака и т.п. проявляют фрактальные свойства в некоторых масштабах [20]. В настоящее время анализ естественных текстур претерпел значительные изменения из-за использования метрик, заимствованных во фрактальной геометрии. После текстуры было введено понятие фракталов, т.е. признаков, основанных на теории дробной меры, для принципиально иного подхода к решению современных радиолокационных задач. Фрактальная размерность  $D$  или ее сигнатура в различных участках изображения поверхности является мерой текстуры, т.е. свойств пространственной корреляции рассеяния радиоволн от соответствующих участков поверхности. На уже далеких начальных этапах автором вначале была подвергнута детальному исследованию концепция текстуры при радиолокации земных покровов и объектов на их фоне. В дальнейшем особое внимание было обращено на разработку тектурных методов обнаружения объектов на фоне земных покровов при малых отношениях сигнал/фон (см., напр., [20–22] и ссылки в них).

5. Методы определения фрактальной размерности  $D$  и фрактальных сигнатур  $D(t, f, \bar{r})$ 

При фрактальном подходе естественно сосредоточить внимание на описании, а также обработке радиофизических сигналов и полей исключительно в пространстве дробной меры с применением гипотезы физического скейлинга и распределений с тяжелыми хвостами или устойчивых распределений. Фрактально-скейлинговые методы обработки сигналов, волновых полей и изображений в широком смысле основаны на той части информации, которая при классических методах обработки безвозвратно терялась. Иначе говоря, классические методы обработки сигналов принципиально выделяют только ту составляющую информации, которая связана с целочисленной мерой.

Фрактальные методы могут функционировать на всех уровнях сигнала: амплитудном, частотном, фазовом и поляризованном. *Ничего подобного в литературе до авторских исследований и работ в мире просто не существовало.*

Безусловной ценностью размерности Хаусдорфа – Безиковича является возможность ее экспериментального определения [6–8]. Некоторое множество может быть измерено  $d$ -мерными ( $d$  — целое) образцами со стороной  $l_1$ . Тогда количество образцов  $N_1$ , покрывающих множество, будет  $N_1 = A / l_1^d$ . Значение  $d$  должно быть основано на предварительных сведениях о размерности множества, теоретически если  $d$  будет меньше топологической размерности, то  $N_1 \rightarrow \infty$ , а если  $d > R^n$ , где  $R^n$  — евклидово пространство, то  $N_1 \rightarrow 0$ . Образец с размером  $l_2$  даст оценку  $N_2 = A / l_2^d$ , тогда размерностью подобия будет

$$D = -\log_{l_2/l_1} N_2 / N_1. \quad (17)$$

Определим размерность по Хаусдорфу следующим образом. Рассмотрим в  $d$ -мерном пространстве некоторое множество точек  $N_0$ , если для того чтобы покрыть это множество, необходимо  $N(\varepsilon)$ -мерных пробных тел (куб, сфера) с характерным размером  $\varepsilon$ , причем

$$N(\varepsilon) \approx 1 / \varepsilon^D \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (18)$$

определяется законом подобия.

Практическая реализация описанного метода наталкивается на трудности, связанные с большим объемом вычислений. Связано это с тем, что для вычисления размерности Хаусдорфа – Безиковича нужно измерять не просто соотношение, а верхнюю грань этого соотношения. Действительно, выбрав конечный масштаб большим двух дискретов временного ряда или одного элемента изображения, мы создаем возможность «промахнуться» мимо некоторых особенностей фрактала.

Во многих случаях решить эту проблему помогает построение *фрактальной сигнатуры*  $D(t, f, \bar{r})$  [6–9] или же зависимости оценок типа (17) и (18) от масштаба наблюдения (рис. 1d). Фрактальная сигнатура характеризует также пространственный *фрактальный кепстр* изображения. Помимо классической корреляционной размерности в ИПЭ В.А.Котельникова РАН, нами были разработаны различные оригинальные методы измерения фрактальной размерности, в том числе: дисперсионный, учет сингулярностей, по функционалам, триадный, на основе метрики Хаусдорфа, вычитания выборок, на основе операции «Исключающее ИЛИ» и т.п. [6–9]. При отработке и математическом моделировании алгоритмов использовались исключительно собственные данные: аэрофотосъемка (АФС) и радиолокационные изображения (РЛИ) на длинных миллиметровых волнах [20]. Продолжительные сезонные измерения рассеивающих характеристик земных покровов на длине волны 8,6 мм в натуральных условиях проводились еще в 80-е годы XX в. автором совместно с борта лётной лаборатории, расположенной на вертолете.

Существенным преимуществом дисперсионной размерности является ее простота реализации, быстрое действие и эффективность вычислений. В 1998 г. нами было предложено вычислять фрактальную размерность с помощью локально-дисперсионного метода (см., напр., [6–9, 14–19, 21–27]). Параметры измеряющего фрактальные сигнатуры  $D$  алгоритмов достаточно сильно влияют на ошибки измерений. В разработанных алгоритмах применяют два характерных окна: масштабное и измерительное. Объективные измерения получаются при масштабных окнах, превышающих размеры измерительного окна. С помощью масштабного окна выбирается необходимый масштаб измерений. Это окно определяет минимальное и максимальное значения масштабов, в которых наблюдается скейлинг. Поэтому масштабное окно служит для селекции распознаваемого объекта и последующего описания его в рамках фрактальной теории. С помощью измерительного окна по обычным методам статистики определяется локальная дисперсия яркости или интенсивности изображения. Локально-

дисперсионный метод измерений фрактальной размерности  $D$  основан на измерении дисперсии интенсивности/яркости фрагментов изображения на двух пространственных масштабах:

$$D \approx \frac{\ln \sigma_2^2 - \ln \sigma_1^2}{\ln \delta_2 - \ln \delta_1} \tag{19}$$

В формуле (19)  $\sigma_1, \sigma_2$  — среднеквадратические отклонения на первом  $\delta_1$  и втором  $\delta_2$  масштабах фрагмента изображения соответственно. Точностные характеристики локально-дисперсионного метода исследованы в [22–27]. Определение одномерных фрактальных сигнатур по площади исследуемых изображений в различных направлениях дает новый метод измерения анизотропии изображений поверхности. Следует отметить, что предложенный локально-дисперсионный метод измерения фрактальных сигнатур позволяет непосредственно получить эмпирические распределения фрактальных размерностей  $D$ .

В [28] доказано, что в гауссовском случае дисперсионная размерность случайной последовательности сходится к размерности Хаусдорфа соответствующего стохастического процесса. Принципиальная сложность состоит в том, что любой численный метод включает дискретизацию (или дискретную аппроксимацию) анализируемого процесса или объекта, а дискретизация разрушает фрактальные свойства. Для разрешения этого противоречия необходима разработка специальной теории, основанной на методах фрактальной интерполяции и аппроксимации. Разнообразные топологические и размерные эффекты при фрактально-скейлинговом обнаружении и обработке многомерных сигналов были изучены автором в [15, 16, 21–27].

*б. Фрактальная обработка сигналов и изображений в интенсивных помехах и шумах*

Автором было впервые показано, что фрактальная обработка как нельзя лучше подходит для решения современных задач при обработке малоcontrastных изображений и обнаружении сверхслабых сигналов в интенсивных помехах, когда современные радиолокаторы практически не функционируют [6–9, 20, 29]. При фрактальном подходе, как отмечено выше, естественно сосредоточить внимание на описании, а также обработке радиофизических сигналов (полей), исключительно в пространстве дробной меры с применением гипотезы скейлинга и универсальных распределений с «тяжелыми хвостами» или устойчивых распределений [30]. Разработанная автором классификация фракталов, лично одобренная Б.Мандельбротом [31, 32] в декабре 2005 г. в США, приведена на рисунке 2, где описаны их свойства при условии, что  $D_0$  — топологическая размерность пространства вложения.



Рисунок 2. Авторская классификация фрактальных множеств и сигнатур



Рисунок 3. Текстуры и фрактальные методы обработки малоcontrastных изображений и сверхслабых сигналов в интенсивных помехах

Разрабатываемые автором с учениками текстурные и фрактальные цифровые методы (рис. 3) позволяют частично преодолевать априорную неопределенность в радиолокационных задачах с помощью *геометрии или топологии выборки* — одномерной или многомерной [33]. При этом большое значение приобретают топологические особенности выборки, а не усредненные реализации, имеющие другой характер.

#### 7. Созданные прорывные технологии и фрактальные радиосистемы

Коренное отличие предложенных автором фрактально-скейлинговых методов от классических связано с принципиально иным (дробным) подходом к основным составляющим физического сигнала. Это позволило нам перейти на новый уровень информационной структуры реальных немарковских сигналов и полей. Таким образом, это *принципиально новая радиотехника*.

За 35 лет научных исследований созданный автором глобальный фрактально-скейлинговый метод полностью оправдал себя, найдя многочисленные приложения (рис. 4). Это своего рода вызов времени. Все это обозначено мной кратко и выразительно — *фрактальная парадигма* [6–9, 14–27, 29, 33–50].



Рисунок 4. Эскиз развития автором прорывных информационных технологий на основе фракталов, дробных операторов и эффектов скейлинга для нелинейной физики и радиотехники

Фрактальная геометрия — громадная и гениальная заслуга математика Б.Мандельброта. Но ее радиофизическое/радиотехническое и практическое воплощение — заслуга Российской (сейчас — Международная) научной школы фрактальных методов и дробных операторов под руководством проф. А.А.Потапова (ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН; см. также сайт автора [www.potapov-fractal.com](http://www.potapov-fractal.com)).

Несколько утрируя, можно сказать, что фракталы составляли тонкую амальгаму на мощном остове науки конца XX в. В современной ситуации интеллектуальное фиаско потерпели попытки приуменьшить их значение и опираться только на классические знания. Во фрактальных исследованиях я всегда основываюсь на своих трех глобальных тезисах:

1. Обработка искаженной негауссовскими шумами информации в пространстве дробной меры с использованием скейлинга и устойчивых негауссовских вероятностных распределений (1981 г.) (рис. 1–4).
2. Применение непрерывных недифференцируемых функций (1990 г.) (рис. 1).
3. Фрактальные радиосистемы (2005 г.) (рис. 4, 5) [6–9, 17–19, 35–39].

Логическое объединение указанной выше триады проблем в общий «фрактальный анализ и синтез» и создает основу *фрактально-скейлингового метода* (2006 г.) и единой глобальной идеи фрактального естествознания и *фрактальной парадигмы* (2011 г.), предложенных и интенсивно развиваемых автором [17, 18].



Рисунок 5. Авторская концепция фрактальных радиосистем, устройств и радиоэлементов

Далее, опираясь на изложенный выше материал, перейдем к концепции *фрактального радиолокатора*, а также к вопросам использования его масштабно-инвариантных принципов в различных системах мониторинга.

#### 8. Принципы фрактально-скейлинговой или масштабно-инвариантной радиолокации

В настоящее время работы по фрактальной радиолокации в мире проводятся исключительно в ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН. В соответствии с требованиями, которые предъявляются к перспективным радиолокаторам, рассмотрим обобщенную функциональную схему классической системы (рис. 6). Она, с одной стороны, достаточно проста, а с другой — содержит все принципиально необходимые элементы. Также здесь может идти речь и об одноканальной радиолокационной станции (РЛС) и о многоканальной РЛС.

Синхронизирующее устройство обеспечивает координацию работы всех элементов схемы РЛС. Генерирование и излучение электромагнитной энергии производится с помощью передающего устройства, состоящего из модулятора, генератора высокой частоты (ВЧ) и передающей антенны. Отраженные сигналы поступают к приемной антенне. Приемное устройство выполняет все необходимые преобразования поступающих сигналов, связанные с их разделением, усилением, выделением от шумов. Выходное устройство предназначается для выполнения заключительных операций по обработке сигналов и преобразования их к виду, требуемому получателем информации. Выходное устройство, в зависимости от результатов измерений, может оказывать то или иное воздействие на

приемник (линия *Б*), антенну (линия *В*) и передающее устройство (линии *Г* и *Д*), что позволяет автоматически изменять требуемым образом вид излучаемых колебаний, условия приема и обработки сигналов, приближая их к наилучшим для конкретной ситуации. Связь выходного устройства с приемной антенной обеспечивает возможность автоматического измерения угловых координат и управление антенной при пеленгации цели. В свою очередь, от антенного устройства в выходное устройство вводятся данные (линия *Е*) об угловом положении антенны.

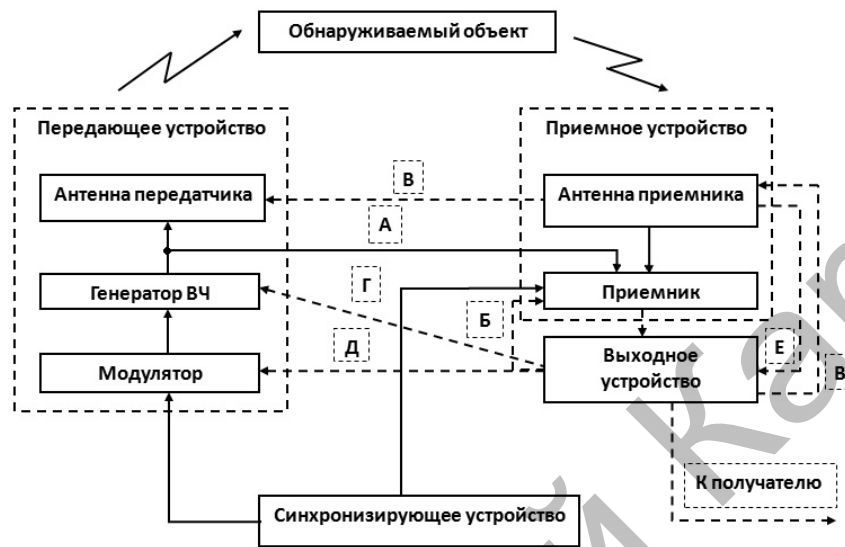


Рисунок 6. Обобщенная функциональная схема классического радиолокатора

От данных рисунка 6 можно перейти непосредственно к фрактальному радиолокатору. На рисунке 7 изображены практически все точки приложения гипотетических или проектируемых в настоящее время фрактальных алгоритмов, элементов, узлов и процессов, которые можно ввести в схему на рисунке 6. Идеология фрактальной РЛС базируется на концепции фрактальных радиосистем (рис. 5).

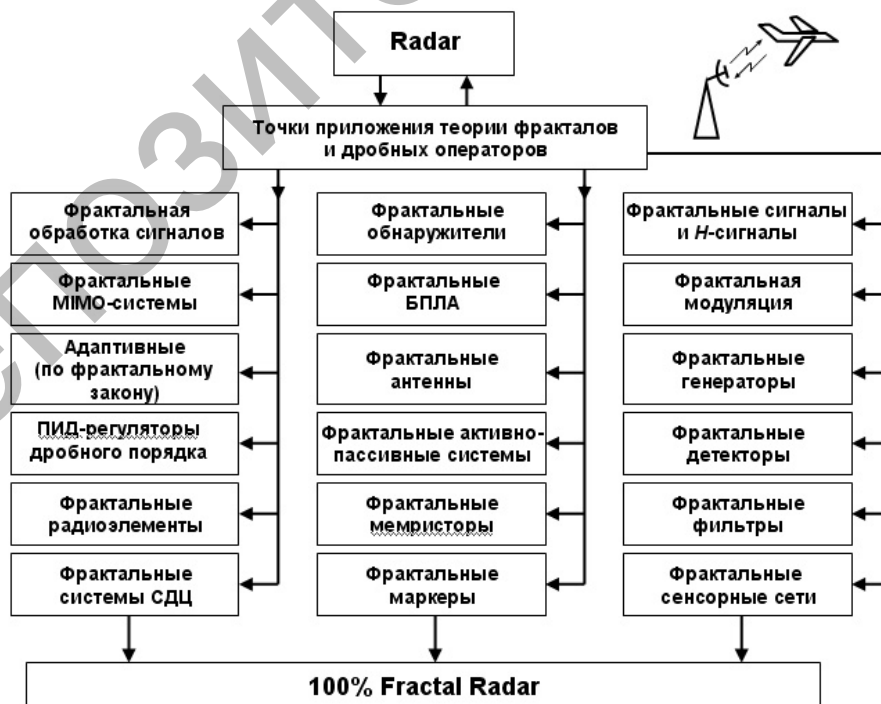


Рисунок 7. Точки приложения фракталов, скейлинга и дробных операторов в классическом радиолокаторе с целью перехода к фрактальной РЛС

9. Фрактально-скейлинговые обнаружители сигналов

Обработка принятых радиолокационных сигналов, естественно, ведется во всех блоках РЛС, включая антенну, приемник, измерители, и может быть охарактеризована совокупностью математических операций, которые необходимо выполнить для определения тех или иных параметров сигнала. Однако, несмотря на математическую общность между всеми видами обработки в тракте РЛС, на каждом ее этапе решаются свои задачи и используется, как правило, различная техника. Таким образом, наряду с общей задачей определения оптимальных алгоритмов обработки сигнала в целом, которая решается при проектировании РЛС, возникает задача выбора оптимальных методов обработки сигналов и способов их реализации на различных ее этапах. Процесс обработки радиолокационных сигналов и полученных при этом данных можно разделить на два этапа: этап извлечения первичной радиолокационной информации и этап обработки данных по первичной информации.

Принципы первого в мире фрактального обнаружителя сигналов были открыты и предложены мной еще в 1989 г. (!). Выход (также впервые в мире) на действующий макет фрактального непараметрического обнаружителя радиолокационных сигналов (ФНОРС) произведен в 2004–2005 гг. [45–47]. Отмечена высокая устойчивость предложенных нами алгоритмов. Один из главных выводов, сделанных нами еще в 80-е годы XX в.: *работа по точечной оценке фрактальной размерности D приводит к абсурдным результатам*. В то же время почти все авторы, использующие фрактальную обработку (и часто не понимая ее физический смысл), дают исключительно точечные оценки, да еще со среднеквадратическим отклонением (абсурд!).

В своих работах мы ввели фрактальные сигнатуры и фрактальные кепстры, и проблема точности цифровой фрактальной обработки в режиме реального времени была решена. Эффективность работы фрактального обнаружителя зависит, естественно, как от точности измерения фрактальной сигнатуры, так и от чувствительности метода оценки к наличию обнаруживаемого объекта.

Идеология перехода к фрактально-скейлинговым обнаружителям также базируется на концепции фрактальных радиосистем (рис. 5). Основные виды предложенных автором в течение 2011–2014 гг. избранных семейств (кластеров) схем новых динамических фрактальных обнаружителей сигналов (ФОС) приведены на рисунке 8 [35–39]. Здесь я ограничился лишь основными функциональными примерами для иллюстрации разработанных общих теоретических и эвристических принципов синтеза динамических фрактальных обнаружителей.



Рисунок 8. Основные виды предложенных автором фрактально-скейлинговых обнаружителей сигналов

В случае комплексирования классического обнаружителя с фрактальным обнаружителем повышается вероятность правильного обнаружения и распознавания. На данном этапе эта задача уже не имеет глубокого научного интереса, а относится практически к рядовым инженерным техническим

решениям. Этот этап мы закрыли, сделав вывод, что более интересна в научном плане для открытия и фиксации новых радиофизических эффектов композиция двух фрактальных обнаружителей с различными пространственными координатами (рис. 8).

Значительный интерес представляет разработка адаптивных методов применительно к фрактальной обработке информации. Для адаптивной задачи характерно изменение параметров и/или структуры системы в соответствии с внешними условиями. В работе [37] рассмотрен исключительно фрактальный адаптивный обнаружитель (ФАО).

Данные рисунка 8 иллюстрируют неисчерпаемые возможности методов фрактального обнаружения сигналов. На основе общих логических правил и данных рисунка 8 возможен синтез множества других типов фрактальных обнаружителей. Кстати, на рисунке 8 специально не обозначены функциональные связи между отдельными разновидностями фрактальных обнаружителей, а везде обозначены лишь одни стрелки, чтобы научная платформа динамических фрактальных обнаружителей была максимально свободной для будущих исследователей, конструкторов и технологов. Универсальность алгоритмов обеспечивает возможность исследования весьма широких классов задач.

В настоящее время рассматривается, в частности, очень важный вопрос о синтезе на основе теории фрактального лабиринта принципиально нового, «не энергетического» фрактального обнаружителя сигналов по их сингулярностям и топологии принятой выборки. То есть я предлагаю *максимально «уйти» от энергии принимаемого сигнала*.

В моих исследованиях впервые вводится постулат «*максимум топологии при минимуме энергии*» для всей фрактально-скейлинговой обработки принимаемого сигнала [6–9, 14–17].

#### 10. К вопросу перспективных направлений фрактальных исследований

На основе исключительно собственных работ (см. также сайт автора — <http://www.potapov-fractal.com>) попытаемся дать картину наиболее *перспективных направлений фрактальных исследований* в области прогресса современных фундаментальных и прикладных наук:

1. Исследование возможностей текстурных (пространственных и спектральных), фрактальных и энтропийных признаков для радиолокационных задач обнаружения.
2. Синтез новых моделей рассеяния радиолокационных сигналов земными покровами на основе теории детерминированного хаоса, странных аттракторов и фрактальных вероятностных распределений — устойчивых распределений.
3. Исследование волновых явлений (распространение и рассеяние волн, процессы диффузии) во фрактальных неоднородных средах на основе операторов дробного интегрирования. Дальнейшее развитие фрактальной электродинамики.
4. Синтез моделей каналов радиолокационных и телекоммуникационных систем на основе пространственных фрактальных обобщенных корреляторов и фрактальных частотных функций когерентности.
5. Исследование возможностей распознавания формы или контуров целей с помощью фрактальных, текстурных и энтропийных признаков. Работа на сингулярностях входной функции.
6. Исследование потенциальных возможностей и ограничений фрактальных методов обработки радиолокационных и связанных сигналов, в том числе фрактальной модуляции и демодуляции, фрактального кодирования и сжатия информации, фрактального синтеза изображений, фрактальных фильтров. Переход к фрактальным радиосистемам. Фракталы в акустоэлектронике (2012 г.).
7. Исследование адаптивной пространственно-временной обработки сигналов на основе дробной размерности и дробных операторов.
8. Поиск и исследование новых комбинированных методов обнаружения и распознавания классов мало контрастных целей в интенсивных негауссовских помехах.
9. Исследование возможностей создания новых сред для передачи информации, многодиапазонных фрактальных поглощающих материалов, конструирование фрактальных антенн и фрактальных частотно-селективных поверхностей и объемов. Дальнейшее развитие теории и техники фрактальных импедансов.
10. Синтез новых классов фракталов и мультифракталов с обобщением понятия меры множеств.
11. Изучение вида или топологии выборки одномерного (многомерного) сигнала для задач, например, искусственного интеллекта с целью создания словарей фрактальных признаков на основе фрактальных примитивов, являющихся элементами фрактального языка с фрактальной грамматикой, т.е. исследование *проблемы «размерностного склероза»* физических сигналов и сигнатур. Эти поня-

тия, введенные автором, предполагают исследование топологических особенностей каждой конкретной индивидуальной выборки, а не усредненных реализаций, имеющих зачастую другой характер.

12. Прогноз механизмов формирования и характеристик шероховатости с целью управления геометрическими параметрами микрорельефа для получения заданных физико-химических и эксплуатационных свойств изделий при современных неравновесных технологиях обработки их поверхностного слоя. Фракталы в нанотехнологиях. (В 2008 г. автор предложил новую концепцию, а именно «Скейлинг шероховатого фрактального слоя и нанотехнологии».)

13. Развитие фрактальной неинерциальной релятивистской радиолокации в искривленном пространстве–времени связанных структур [49, 50], т.е. фрактальной геометрии пространства–времени детерминированных структур. (В настоящее время в США данное фундаментальное научное направление получило яркое название «Фрактальная космология — *Fractal Cosmology*». Наши работы с соавторами значатся в списке основных публикаций (arXiv: Cornell University, USA) по этому главному теоретическому направлению.)

### 11. Официально признанные результаты фрактальных исследований

Результаты нашей научной деятельности в ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН по фрактально-скейлинговой обработке информации в интенсивных помехах, а также по фрактальным радиосистемам и фрактальным радиоэлементам опубликованы в четырех отчетных докладах *Президиума Российской академии наук* (Научные достижения РАН. — М.: Наука, 2008, 2010, 2012, 2013 гг.) и в *Докладе Правительству Российской Федерации*. Об итогах реализации в 2011 г. Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2008–2012 гг. В трех томах. — М.: Наука, 2012. Приведем кратко текст этих официально признанных достижений.

– В книге «Отчетный доклад Президиума Российской академии наук. Научные достижения Российской академии наук в 2007 году» (М.: Наука, 2008. 204 с.) в подразделе «Локационные системы», раздел «Информационные технологии и вычислительные системы» (с. 41), приведен следующий текст: «Создан эталонный словарь фрактальных признаков оптических и радиоизображений, необходимый для реализации принципиально новых фрактальных методов обработки радиолокационной информации и синтеза высокоинформативных устройств обнаружения и распознавания слабых сигналов на фоне интенсивных негауссовских помех. Установлено, что для эффективного решения задач радиолокации и проектирования фрактальных обнаружителей многомерных радиосигналов существенное значение имеют дробная размерность, фрактальные сигнатуры и кепстры, а также текстурные сигнатуры фона местности. (ИРЭ РАН)» — 2007 г., опубликовано в 2008 г.

– В книге «Отчетный доклад Президиума Российской академии наук. Научные достижения Российской академии наук в 2009 году» (М.: Наука, 2010. 616 с.) в подразделе «Локационные системы. Геоинформационные технологии и системы», раздел «Нанотехнологии и информационные технологии» (с. 24), приведен следующий текст: «Впервые в мировой практике предложены и экспериментально доказаны принципы построения новых, фрактальных адаптивных радиосистем и фрактальных радиоэлементов для современных задач радиотехники и радиолокации. Принцип действия таких систем и элементов основан на введении дробных преобразований излучаемых и принятых сигналов в пространстве нецелой размерности при учете их скейлинговых эффектов и негауссовской статистики. Это позволяет выйти на новый уровень информационной структуры реальных немарковских сигналов и полей. (ИРЭ РАН)» — 2009 г., опубликовано в 2010 г.

– В книге «Отчетный доклад Президиума Российской академии наук. Научные достижения Российской академии наук в 2011 году» (М.: Наука, 2012. 620 с.) в подразделе «Локационные системы. Геоинформационные технологии и системы», раздел «Информатика и информационные технологии» (с. 199–200), и в книге «Доклад Правительству Российской Федерации. Об итогах реализации в 2011 году Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2008–2012 гг. В трех томах» (М.: Наука, 2012. 1016 с.) на с. 242 приведен следующий текст: «На основе фрактального анализа проведено систематическое исследование электродинамических свойств фрактальных антенн. Подтверждены широкополосные и многодиапазонные свойства фрактальных антенн и зависимость числа резонансов от номера итерации фракталов. Показано, что на основе миниатюрных фрактальных антенн возможна эффективная реализация частотно-избирательных сред и защитных экранов, искажающих радиолокационный портрет цели. Изучены фрактальные частотно-избирательные 3D-среды или фрактальные «сэндвичи» (инженерные радиоэлектронные микро- и наноконструкции). (ИРЭ РАН)» — 2011 г., опубликовано в 2012 г.

– В книге «Отчетный доклад Президиума Российской академии наук. Научные достижения Российской академии наук в 2012 году» (М.: Наука, 2013. 616 с.) в подразделе «Элементная база микроэлектроники, наноэлектроники и квантовых компьютеров. Материалы для микро- и наноэлектроники. Нано- и микросистемная техника. Твердотельная электроника», раздел «Нанотехнологии и информационные технологии» (с. 195), приведен следующий текст: «Установлено, что в физической основе функционирования мемристора лежит целочисленный квантовый эффект Холла. Получены соотношения между током и напряжением для произвольного типа мемристора. Результаты направлены на практическую реализацию мемристоров как новых элементов электронных схем. (НИИ ПМА КБНЦ РАН, ИРЭ РАН)» — 2012 г., опубликовано в 2013 г.

## 12. Заключение

Фрактально-скейлинговые методы, впервые предложенные и разработанные автором, имеют в своей основе конструктивную теорию дробной меры и могут *значительно превосходить* по своим возможностям классические методы радиотехники. Этим доказана и утверждена практическая уместность фундаментальной теории дробной меры. В результате в научном мире образовалось новое смысловое пространство с его необычными для классической физики свойствами и задачами. При этом центральными связующими понятиями оказались «фрактал, дробные операторы, скейлинг, негауссовская статистика, дробная размерность, топология выборки». Идея о преимуществах фрактальной обработки в радиолокации впервые приобретает роль руководящей идеи не только для объяснения принципов и методов обработки сигналов, но и для построения новых, не рассматриваемых ранее фрактально-скейлинговых методов и для создания фрактального радиолокатора на основе предложенной автором концепции фрактальных радиосистем.

Таким образом:

1. Доказаны принципиальная возможность и высокая эффективность фрактально-скейлинговых методов обработки радиолокационной информации при сверхмалых отношениях сигнал/шум.
2. Введен принцип «*максимум топологии при минимуме энергии*» для принимаемого сигнала, позволяющий более эффективно использовать преимущества фрактально-скейлинговой обработки информации.
3. Использование фрактального принципа приводит к переоценке ценностей в области обнаружения подвижных и неподвижных объектов на фоне интенсивных помех и шумов.
4. Определены и обоснованы основные принципы построения фрактальных радиосистем, узлов и фрактальных радиоэлементов.

В статье автор коснулся лишь некоторых наиболее важных вопросов, связанных с использованием фракталов и эффектов скейлинга в радиофизике и радиолокации. В развитии фрактальных направлений уже пройдены многие важные этапы, в том числе и этап становления этой области наук. Однако много задач еще предстоит решить. Не результаты, не конкретные решения представляют самую большую ценность, а именно *метод решения*, подход к нему. Метод автором создан [17, 18]. И еще одно. В книге (Гвай И.И. О малоизвестной гипотезе Циолковского / С предисл. и под ред. д.т.н. П.К.Ощепкова. — Калуга: Калужское книжное изд-во, 1959. 248 с., с. 24–25) можно найти такие слова: «Новые научные гипотезы почти всегда требуют и новых необычных аргументаций потому, что эти гипотезы оперируют именно с новым, а не с ожидаемым, и необходимые закономерности, которые эта гипотеза обещает создать в будущем, не являются очевидными с первого взгляда. В этом — основная уязвимость новых гипотез, тогда как устоявшиеся и закрепленные практикой теории зачастую кажутся незыблемыми. Но ни одна даже лучшая гипотеза не может считаться законченной и абсолютно неподвижной, а ученый, идущий по следу, как говорил Леонардо да Винчи, никогда не обгонит»).

Автор поставил изложенные выше вопросы еще в 1980 г. и в течение 35 лет успешно работает над их разрешением и развитием.

## Список литературы

- 1 Сергей Михайлович Рытов: Жизнь, воспоминания, интервью, записки, стихи, документы / Сост. В.М.Березанская, Н.С.Рытова; Под ред. А.А.Гиппиуса. — М.: ЛЕНАНД, 2012. — 552 с.
- 2 Oldham K.B., Spanier J. The Fractional Calculus. — N.Y.: Academic Press, 1974. — 234 p.

- 3 Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
- 4 Потапов А.А. Краткое историческое эссе о зарождении и становлении теории дробного интегрирования // Нелинейный мир. — 2003. — Т. 1, № 1–2. — С. 69–81.
- 5 Учайкин В.В. Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008. — 512 с.
- 6 Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. — М.: Логос, 2002. — 664 с.
- 7 Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Университетская кн., 2005. — 848 с.
- 8 Потапов А.А. Фракталы и хаос как основа новых прорывных технологий в современных радиосистемах. Дополнение к кн.: Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах / Пер. с англ.; Под ред. Т.Э.Кренкеля. — М.: Техносфера, 2006. С. 374–479.
- 9 Потапов А.А., Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Пахомов А.А., Герман В.А. Новейшие методы обработки изображений: Монография / Под ред. А.А.Потапова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 496 с. (по гранту РФФИ № 07-07-07005).
- 10 Потапов А.А., Черных В.А. Дробное исчисление А.В.Летникова в физике фракталов. — Saarbrücken: LAMBERT Academic Publishing, 2012. — 688 с.
- 11 Rogers C.A. Hausdorff Measures. — London: Cambridge University Press, 1970. — 179 p.
- 12 Бункин Б.В., Реутов А.П., Потапов А.А. и др. Вопросы перспективной радиолокации: Монография. — М.: Радиотехника, 2003. — 512 с.
- 13 Справочник по радиолокации: В 2 кн. / Под ред. М.Сколника; Пер. с англ. под общ. ред. д.т.н., проф. В.С.Вербы. — М.: Техносфера, 2014. — Кн. 1. — 672 с; Кн. 2. — 680 с.
- 14 Потапов А.А. О фрактальной радиофизике и фрактальной радиоэлектронике // Инновации в радиотехнических информационно-телекоммуникационных технологиях: Сб. докл. Юбилейной науч.-техн. конф., посвящ. 60-летию ОАО «Радиотехнический институт имени академика А.Л.Минца» и факультета радиоэлектроники летательных аппаратов МАИ (Москва, 24–26 октября 2006 г.). — М.: Изд. ЗАО «Экстра Принт», 2006. — Ч. 1. — С. 66–84.
- 15 Потапов А.А. Фрактальные модели и методы на основе скейлинга в фундаментальных и прикладных проблемах современной физики // Необратимые процессы в природе и технике: Сб. науч. тр. / Под ред. В.С.Горелика и А.Н.Морозова. — М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана и Физический ин-т им. П.Н.Лебедева РАН, 2008. — Вып. II. — С. 5–107.
- 16 Потапов А.А. Фракталы, скейлинг и дробные операторы в обработке информации (Московская научная школа фрактальных методов в ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН, 1981–2011 гг.) // Необратимые процессы в природе и технике: Сб. науч. тр. / Под ред. В.С.Горелика и А.Н.Морозова. — М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана и Физический ин-т им. П.Н.Лебедева РАН, 2012. — Вып. IV. — С. 5–117.
- 17 Потапов А.А. Фрактальный метод и фрактальная парадигма в современном естествознании. — Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2012. — 108 с.
- 18 Потапов А.А. Фрактальный метод, фрактальная парадигма и метод дробных производных в естествознании // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н.И.Лобачевского. Сер. Мат. моделирование. Оптимальное управление. — 2012. — № 5(2). — С. 172–180.
- 19 Potapov A.A. The Global Fractal Method and the Fractal Paradigm in Fundamental Radar Problems // Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors: Book of Abstracts Int. Conf. Dedicated to the Memory of L.P.Shil'nikov (1934–2011) (Nizhni Novgorod, Russia, July 1–5, 2013). — Nizhni Novgorod: Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, 2013. — P. 98.
- 20 Потапов А.А. Синтез изображений земных покровов в оптическом и миллиметровом диапазонах волн: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук (01.04.03 — Радиофизика). — М.: ИРЭ РАН, 1994. — 436 с.
- 21 Потапов А.А. Новые информационные технологии на основе вероятностных текстурных и фрактальных признаков в радиолокационном обнаружении малоконтрастных целей // Радиотехника и электроника. — 2003. — Т. 48, № 9. — С. 1101–1119.
- 22 Potapov A.A. The Textures, Fractal, Scaling Effects and Fractional Operators as a Basis of New Methods of Information Processing and Fractal Radio Systems Designing // Proc. SPIE. — 2009. — Vol. 7374. — P. 73740E-1–73740E-14.
- 23 Potapov A.A., German V.A. Detection of Artificial Objects with Fractal Signatures // Pattern Recognition and Image Analysis. — 1998. — Vol. 8, № 2. — P. 226–229.
- 24 Потапов А.А., Герман В.А. Применение фрактальных методов для обработки оптических и радиолокационных изображений земной поверхности // Радиотехника и электроника. — 2000. — Т. 45, № 8. — С. 946–953.
- 25 Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. Элементы теории фракталов // Радиотехника и электроника. — 2000. — Т. 45, № 11. — С. 1285–1292.
- 26 Потапов А.А. Новые информационные технологии на основе вероятностных текстурных и фрактальных признаков в радиолокационном обнаружении малоконтрастных целей // Радиотехника и электроника. — 2003. — Т. 48, № 9. — С. 1101–1119.
- 27 Потапов А.А., Герман В.А. О методах измерения фрактальной размерности и фрактальных сигнатур многомерных стохастических сигналов // Радиотехника и электроника. — 2004. — Т. 49, № 12. — С. 1468–1491.
- 28 Пригарин С.М., Хан К., Винклер Г. Дисперсионная размерность случайных последовательностей и ее применение // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2009. — Т. 12, № 4. — С. 435–448.
- 29 Потапов А.А. Статистический подход к описанию изображений текстур земной поверхности в оптическом и радиодиапазоне // Математические методы распознавания образов (ММО-IV): Тез. докл. Всесоюз. конф. (Рига, 24–26 окт. 1989 г.). — Рига: Изд. МИПКРРиС, 1989. — Ч. 4. — С. 150–151.
- 30 Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. — М.; Л.: ГТТИ, 1949. — 264 с.
- 31 Потапов А.А. Моя встреча с Б.Мандельбротом // Нелинейный мир. — 2007. — Т. 5, № 6. — С. 402–404.

- 32 *Потапов А.А.* Бенуа Мандельброт (1924–2010) — человек, «преодолевший пропасть размерностей» // Успехи современной радиоэлектроники. — 2011. — № 3. — С. 5–10.
- 33 *Потапов А.А.* Топология выборки // Нелинейный мир. — 2004. — Т. 2, № 1. — С. 4–13.
- 34 *Потапов А.А.* Методы обработки малоконтрастных изображений и сверхслабых сигналов интегральными операторами и дробными фрактально-скейлинговыми методами // Инновационные разработки Института радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова Российской академии наук: Сб. посвящ. 60-летию со дня образования ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН. — М.: Република, 2013. — С. 15.
- 35 *Потапов А.А.* Можно ли построить фрактальную радиосистему? // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 2007. — Т. 14, № 4. — С. 742–744.
- 36 *Потапов А.А.* Концепция фрактальных радиосистем и фрактальных устройств: анализ и синтез // Динамика сложных систем. — 2008. — Т. 2, № 1. — С. 11–29.
- 37 *Потапов А.А.* О применении показателя Херста  $H$  в адаптивной фрактальной обработке информации и синтезе новых классов фрактальных « $H$ -сигналов» // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 2008. — Т. 15, № 6. — С. 1121–1123.
- 38 *Потапов А.А.* Новые виды и методы синтеза динамических фрактальных обнаружителей пространственно-временных сигналов // Электромагнитные волны и электронные системы. — 2014. — Т. 19, № 2. — С. 24–40.
- 39 *Потапов А.А.* Колебания, волны, структуры и системы на примерах глобального фрактально-скейлингового метода (множества меры нуль, сингулярности, скейлинг, топология выборки, спрайты, джеты, эльфы, мемристоры, осцилляторы, фрактальные лабиринты, робастные антенные решетки и фрактальные обнаружители) // Нелинейный мир. — 2014. — Т. 12, № 4. — С. 3–38.
- 40 *Потапов А.А., Шифрин Я.С., Кузеев П.Р.* Генетические и самоаффинные методы проектирования фрактальных антенн // Антенны. — 2014. — № 3(202). — С. 25–48.
- 41 *Потапов А.А.* Применение теории фракталов и эффектов скейлинга при обработке малоконтрастных изображений и сверхслабых сигналов в интенсивных помехах // Забавихинские научные чтения: Сб. материалов XI Междунар. конф., посвящ. 95-летию Е.И.Забавихина (Снежинск, Челябинская обл., 16–20 апреля 2012 г.). — Снежинск: Изд-во РФЯЦ-ВНИИТФ, 2012. — С. 311–312.
- 42 *Леонов К.Н., Потапов А.А., Ушаков П.А.* Использование инвариантных свойств хаотических сигналов в синтезе новых помехоустойчивых широкополосных систем передачи информации // Радиотехника и электроника. — 2014. — Т. 59, № 12. — С. 1209–1229.
- 43 *Foukzon J., Men'kova E., Potapov A.A.* The Solution Classical Feedback Optimal Control Problem for  $m$ -Persons Differential Game with Imperfect Information // Open Journal of Optimization. — 2013. — Vol. 2, № 1. — P. 16–25 (<http://www.scirp.org/journal/ojop>).
- 44 *Potapov A.A.* The Global Fractal Method, Fractal Paradigm and the Fractional Derivatives Method in Fundamental Radar Problems and Designing of Revolutionary Radio Signals Detectors // Zbornik radova Konferencije MIT — Matematicke i informacione tehnologije (Vrnjackoj Banji od 5. do 9. septembra i u Becicima od 10. do 14. septembra 2013. godine). — Kosovska Mitrovica: Prirodno-matematički fakultet Ulverziteta u Pristini (Serbia), 2014. — P. 539–552.
- 45 *Потапов А.А., Герман В.А.* Фрактальный непараметрический обнаружитель радиосигналов // Радиотехника. — 2006. — № 5. — С. 30–36.
- 46 *Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Потапов А.А., Герман В.А.* Применение теории фракталов, дробной меры и скейлинговых эффектов в схемах обнаружителей радиосигналов // Нелинейный мир. — 2006. — Т. 4, № 4–5. — С. 165–171.
- 47 *Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Потапов А.А., Герман В.А.* Идеи скейлинга и дробной размерности в схеме фрактального обнаружителя радиосигналов // Радиотехника и электроника. — 2006. — Т. 51, № 8. — С. 968–975.
- 48 *Потапов А.А., Лактюшкин А.В.* Частотная функция когерентности пространственно-временного радиолокационного канала формирования изображений анизотропной фрактальной поверхности и фрактальных объектов // Радиотехника и электроника. — 2015. — Т. 60, № 9.
- 49 *Подосенов С.А., Потапов А.А., Соколов А.А.* Импульсная электродинамика широкополосных радиосистем и поля связанных структур / Под ред. А.А.Потапова. — М.: Радиотехника, 2003. — 720 с.
- 50 *Подосенов С.А., Потапов А.А., Фоукзон Дж., Менькова Е.Р.* Неголономные, фрактальные и связанные структуры в релятивистских сплошных средах, электродинамике, квантовой механике и космологии: В 3 т. / Под ред. А.А.Потапова. — М.: ЛЕНАНД, 2015. — 1200 с.

А.А.Потапов

### **Фрактал-скейлингті немесе масштаб-инвариантты радиолокация туралы: мерейтойлық 2015 жылдан көзқарас**

Мақаланың негізгі мақсаты — радиофизиканың, радиотехниканың және радиолокацияның негізгі бағыттарын «фрактал» ұғымдары негізінде талдау арқылы радиожүйелердің болашақтағы даму жолдарын саралап анықтау. Ресейде және бүкіл дүние жүзі бойынша автордың жасаған ғылыми бағытының негізінде фракталдық радиожүйе, топологиялық теру, фрактал-скейлингті әдіс және фракталдық парадигма ұғымдары жатады. Зерттеу автордың В.А.Котельников атындағы ИРЭ-да үзікті ақпараттар технологиясы үшін жасап, дамытқан «Фракталдық радиофизика және фракталдық радиоэлектроника: фракталдық радиожүйелерді жобалау» деген қазіргі заманғы іргелі пәнаралық бағыт аясында жүргізілген. Бұл мәселемен автор 35 жыл бойы айналысуда. Автордың зерттеу

барысында алынған нәтижелері Ресей академиясының Президиумының мәжілісіндегі (2008, 2010, 2012, 2013) және Ресей Федерациясының Үкіметінде жасалған баяндамаларында келтірілген.

A.A.Potapov

## On the problem of fractal-scaling or scale-invariant radiolocation: a view from the jubilee 2015

The main purpose of this work is to interpret the main directions of radio physics, radio engineering and radio location in «fractal» language that makes new ways and generalizations on future promising radio systems. The fractal radio systems conception, sampling topology, global fractal-scaling approach and the fractal paradigm underlies the scientific direction established by the author for the first time in Russia and over the world. The researchers are performed in the framework of up-to-date interdisciplinary direction «Fractal radio physics and fractal radio electronics: Designing of the fractal radio systems», which was proposed and is being developed by the author in V.A.Kotelnikov IREE RAS with the purpose of creation of groundbreaking informational technologies. The author has been investigating these issues for exactly 35 years. The results of big practical and scientific importance obtained by the author were published in four summary reports of the Presidium of Russian academy of science (2008, 2010, 2012, and 2013) and in the report for the Government of Russian Federation (2012).

### References

- 1 Sergei Mihailovich Rytov: *Life, remembrances, interview, messages, verses, documents*, Compilers V.M.Berezanskaya, N.S.Rytova, Ed. by A.A.Gippius, Moscow: LENAND, 2012, 552 p.
- 2 Oldham K.B., Spanier J. *The Fractional Calculus*, N.Y.: Academic Press, 1974, 234 p.
- 3 Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integrals and derivatives of fractional order and some their applications*, Minsk: Nauka i tehnika, 1987, 688 p.
- 4 Potapov A.A. *Nonlinear world*, 2003, 1, 1–2, p. 69–81.
- 5 Uchaikin V.V. *Method of fractional derivatives*, Ulyanovsk: Artishok, 2008, 512 p.
- 6 Potapov A.A. *Fractals in radio and radar*, Moscow: Logos, 2002, 664 p.
- 7 Potapov A.A. *Fractals in radio and radar: Sample topology*, 2nd ed., revised and expanded, Moscow: Universitetskaya kniga, 2005, 848 p.
- 8 Potapov A.A. *Fractals and chaos as the basis for new breakthrough technologies in modern radio systems*. Addition to book: Kronover R. *Fractals and chaos in dynamical systems*, Moscow: Tekhnosfera, 2006, p. 374–479.
- 9 Potapov A.A., Gulyaev Yu.V., Nikitov S.A., Pakhomov A.A., Herman V.A. *Newest image processing methods*, Ed. by A.A.Potapov, Moscow: Fismatlit, 2008, 496 p. (Monograph on a grant from the RFBR № 07-07-07005).
- 10 Potapov A.A., Chernih V.A. *A.V.Lemnikov's Fractional calculus in Fractals physics*, Saarbrücken: LAMBERT Academic Publishing, 2012, 688 c.
- 11 Rogers C.A. *Hausdorff Measures*, London: Cambridge University Press, 1970, 179 p.
- 12 Bunkin B.V., Reutov A.P., Potapov A.A. et al. *Questions of perspective radio-location*: Collective monograph, Moscow: Radiotekhnika, 2003, 512 p.
- 13 *Reference book on a radio-location*, In 2 books, Ed. by M.Skolnik, Transl. from English under a general ed. by Dr. of engineering sci., prof. B.C.Verba, Moscow: Tekhnosfera, 2014, 1, 672 p.; 2, 680 p.
- 14 Potapov A.A. *Innovations in the radio information and telecommunication technologies*: Proceedings of the Jubilee scientific and engineering conf., dedicated to the 60th anniversary of «Radio Engineering Institute named after Academician A.L.Mints» and the Faculty of Radio Electronics of aircraft MAI (Moscow, 24–26 October, 2006), Moscow: «Ekstra Print» company publ., 2006, 1, p. 66–84.
- 15 Potapov A.A. *Irreversible processes in the wild and technique*: Coll. of scientific works, Ed. by V.S.Gorelik and A.N.Morozov, Moscow: N.E.Bauman Moscow State Technical University and Physical Institute named after P.N.Lebedev of Russian Academy of Sciences, 2008, 2, p. 5–107.
- 16 Potapov A.A. *Irreversible processes in the wild and technique*: Coll. of scientific works, Ed. by V.S.Gorelik and A.N.Morozov, Moscow: N.E.Bauman Moscow State Technical University and Physical Institute named after P.N.Lebedev of Russian Academy of Sciences, 2012, 4, p. 5–117.
- 17 Potapov A.A. *A fractal method and fractal paradigm are in modern natural science*, Voronezh: Nauchnaya kniga, 2012, 108 p.
- 18 Potapov A.A. *Bull. of the Nizhny Novgorod University named after N.I.Lobachevsky. Series Mathematical modeling. Optimal control*, 2012, 5(2), p. 172–180.
- 19 Potapov A.A. *Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors*: Book of Abstracts Int. Conf. Dedicated to the Memory of L.P.Shil'nikov (1934–2011) (Nizhni Novgorod, Russia, July 1–5, 2013), Nizhni Novgorod: Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, 2013, p. 98.

- 20 Potapov A.A. *Synthesis image Earth's surface in the optical and millimeter wave bands: the dissertation of the doctor of physical and mathematical sciences (01.04.03 — Radiophysic)*, Moscow: IRE of the RAS, 1994, 436 p.
- 21 Potapov A.A. *Radiotechnics and Electronics*, 2003, 48, 9, p. 1101–1119.
- 22 Potapov A.A. *Proc. SPIE*, 2009, 7374, p. 73740E-1–73740E-14.
- 23 Potapov A.A., German V.A. *Pattern Recognition and Image Analysis*, 1998, 8, 2, p. 226–229.
- 24 Potapov A.A., German V.A. *Radiotechnics and Electronics*, 2000, 45, 8, p. 946–953.
- 25 Potapov A.A. *Radiotechnics and Electronics*, 2000, 45, 11, p. 1285–1292.
- 26 Potapov A.A. *Radiotechnics and Electronics*, 2003, 48, 9, p. 1101–1119.
- 27 Potapov A.A., German V.A. *Radiotechnics and Electronics*, 2004, 49, 12, p. 1468–1491.
- 28 Prigarin S.M., Han K., Vinkler G. *Siberian Journal of Computational Mathematic*, 2009, 12, 4, p. 435–448.
- 29 Potapov A.A. *Mathematical methods for pattern recognition: Abstracts of the All-Union Conference (Riga, 24–26 October, 1989)*, Riga: Publishing house MIPKRRIS, 1989, 4, p. 150–151.
- 30 Gnedenko B.V., Kolmogorov A.N. *Limit distributions for sums of independent random variables*, Moscow, Leningrad: GTTI Publ., 1949, 264 p.
- 31 Potapov A.A. *Nonlinear world*, 2007, 5, 6, p. 402–404.
- 32 Potapov A.A. *The success of modern electronics*, 2011, 3, p. 5–10.
- 33 Potapov A.A. *Nonlinear world*, 2004, 2, 1, p. 4–13.
- 34 Potapov A.A. *Innovative development of the Institute of Radio Engineering and Electronics named after V.A.Kotelnikov of Russian Academy of Sciences: Coll. devoted to the 60th anniversary of IREE named after V.A.Kotelnikov*, Moscow: Repablika, 2013, p. 15.
- 35 Potapov A.A. *Review of Applied and Industrial Mathematics*, 2007, 14, 4, p. 742–744.
- 36 Potapov A.A. *Dynamics of complex systems*, 2008, 2, 1, p. 11–29.
- 37 Potapov A.A. *Review of Applied and Industrial Mathematics*, 2008, 15, 6, p. 1121–1123.
- 38 Potapov A.A. *Electromagnetic waves and electronic systems*, 2014, 19, 2, p. 24–40.
- 39 Potapov A.A. *Nonlinear world*, 2014, 12, 4, p. 3–38.
- 40 Potapov A.A., Shifrin Ya.S., Kuzeyev R.R. *Antennas*, 2014, 3(202), p. 25–48.
- 41 Potapov A.A. *Zababakhin scientific readings: The collection of materials of the XI International Conf. (Snezhinsk, Chelyabinsk region, 16–20 April, 2012)*, Snezhinsk: Publisher RFYaZ-VNIITF, 2012, p. 311–312.
- 42 Leonov K.N., Potapov A.A., Ushakov P.A. *Radiotechnics and Electronics*, 2014, 59, 12, p. 1209–1229.
- 43 Foukzon J., Men'kova E., Potapov A.A. *Open Journal of Optimization*, 2013, 2, 1, p. 16–25 (<http://www.scirp.org/journal/ojop>).
- 44 Potapov A.A. *Zbornik radova Konferencije MIT — Matematicke i informacione tehnologije (Vrnjackoj Banji od 5. do 9. septembra i u Becicima od 10. do 14. septembra 2013. godine)*. Kosovska Mitrovica: Prirodno-matematički fakultet Ulverziteta u Pristini (Serbia), 2014, p. 539–552.
- 45 Potapov A.A., German V.A. *Radiotechnics*, 2006, 5, p. 30–36.
- 46 Gulyaev Yu.V., Nikitov S.A., Potapov A.A., German V.A. *Nonlinear world*, 2006, 4, 4–5, p. 165–171.
- 47 Gulyaev Yu.V., Nikitov S.A., Potapov A.A., German V.A. *Radiotechnics and Electronics*, 2006, 51, 8, p. 968–975.
- 48 Potapov A.A., Laktyunkin A.V. *Radiotechnics and Electronics*, 2015, 60, 9.
- 49 Podosenov S.A., Potapov A.A., Sokolov A.A. Pulse broadband radio systems and field electrodynamics associated structures, Ed. by A.A.Potapov, Moscow: Radiotekhnika, 2003, 720 p.
- 50 Podosenov S.A., Potapov A.A., Foukzon D., Menkova E.R. Nonholonomic, fractal and related structures in the relativistic continuum environments, electrodynamics, quantum mechanics and cosmology: In 3 vols., Ed. by A.A.Potapov, Moscow: LENAND, 2015, 1200 p.