УДК 517.96

Б.Т.Калимбетов, Н.С.Иманбаев, М.А.Темирбеков

Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан
(E-mail: bkalimbetov@mail.ru)

Асимптотика решений сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения с быстро убывающим ядром

В статье рассмотрена задача Коши для интегро-дифференциального уравнения с быстро убывающим ядром второго порядка с малым параметром при старшей производной. Введением дополнительных независимых переменных исходная сингулярно возмущенная задача сведена к регулярно-возмущенной. Авторами показана инвариантность интегрального оператора относительно пространства экспоненциальных функций. Доказана нормальная и однозначная разрешимость общеитерационных задач в пространстве экспоненциальных функций, а также асимптотическая сходимость формальных решений к точному.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, интегро-дифференциальное уравнение, регуляризация задачи, итерационная задача, асимптотическая сходимость.

В настоящей работе рассматривается сингулярно возмущенная задача

$$L_\varepsilon y(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a^2(x) y + \int_0^x e^{\frac{-\gamma(x-s)}{\varepsilon}} k(x,s) y(s,\varepsilon) ds = h(x), \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \quad y'(0,\varepsilon) = y^1 / \varepsilon \qquad (1)$$

для интегро-дифференциального уравнения с быстро убывающим ядром $e^{\frac{-\gamma(x-s)}{\varepsilon}} k(x,s)$. При $\gamma = 0$ задача (1) рассматривалась С.А.Ломовым в [1], где для (1) строились регуляризованные асимптотические решения при $\varepsilon \to +0$. При $\gamma > 0$ ядро $e^{\frac{-\gamma(x-s)}{\varepsilon}} k(x,s)$ быстро изменяется (если $\varepsilon \to +0$), и стоящая в нем экспонента $e^{\frac{-\gamma(x-s)}{\varepsilon}}$ порождает новую сингулярность, не описываемую спектром предельного оператора дифференциальной части задачи (1). Причина этого явления кроется в том, что при $\gamma = 0$ интегральный оператор $I(x,\varepsilon)$ задачи (1) является подчиненным по отношению к оператору $\Phi_\varepsilon \equiv \varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} + a^2(x)$, так как при $\gamma = 0$ оператор $I(x,\varepsilon) \sim \varepsilon$ означает, что интегральный оператор при разложении в ряд по степеням ε имеет порядок малости ε (то есть пропорционален коэффициентам по ε). Это вполне нормальная символика в теории возмущений.

При $\gamma > 0$ оператор $I(x,\varepsilon)$ уже не будет пропорциональным параметру ε, потому в качестве главного оператора задачи (1) при $\gamma > 0$ выступает не оператор Φ_ε, а оператор $\Phi_\varepsilon + K_0$, где K_0 — некоторый интегральный оператор, порождаемый оператором $I(x,\varepsilon)$. Все это усложняет рассмотрение задачи (1). Хотя для развития алгоритма метода регуляризации здесь также используются идеи работы [1], все теоремы, привлекаемые для обоснования алгоритма, существенно изменяются при $\gamma > 0$. В частности, изменяются теоремы о нормальной и однозначной разрешимости соответствующих итерационных задач, так как в них участвует интегральный оператор K_0, который отсутствует при $\gamma = 0$. Формулировке этих теорем, их доказательству, а также обоснованию асимптотической сходимости формальных решений к точным уделяется основное внимание в настоящей работе.

Рассмотрим задачу (1) в предположении, что $a(x) > 0 \ \forall x \in [0,T]$, $a(x), h(x) \in C^\infty[0,T]$, ядро $k(x,s) \in C^\infty(G)$, $G = \{(x,s): 0 \le s \le x \le T\}$, $\gamma > 0$ — постоянная, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, и при этих условиях построим регуляризованное асимптотическое решение задачи (1) (при $\varepsilon \to +0$).

1. Частичная регуляризация задачи. Следуя [1], введем регуляризирующие переменные

$$\tau_1 = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(s) ds \equiv \varphi_1(x,\varepsilon) \equiv \frac{\psi_1(x)}{\varepsilon}.$$

Кроме того, введем дополнительную регуляризирующую переменную, учитывающую существенно особую сингулярность $e^{\frac{-\gamma x}{\varepsilon}}$:

$$\tau_2 = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \gamma ds \equiv \varphi_2(x,\varepsilon) \equiv \frac{\psi_2(x)}{\varepsilon}.$$

Вместо искомой вектор-функции $y(x,\varepsilon)$ будем рассматривать некоторую вектор-функцию $\tilde{y}(x,\tau,\varepsilon)$, такую что ее сужение совпадает с искомым решением, то есть

$$\tilde{y}(x,\tau,\varepsilon)\Big|_{\tau=(\varphi_1,\varphi_2)} \equiv y(x,\varepsilon). \tag{2}$$

Дифференцируя вектор-функцию $\tilde{y}(x,\tau,\varepsilon)$ (где $\tau=(\varphi_1,\varphi_2)$) по x, будем иметь:

$$\varepsilon^2\frac{d^2\tilde{y}(x,\tau,\varepsilon)}{dx^2} = \varepsilon^2\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial x^2} + \varepsilon\left[2a(x)\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial x\partial\tau_1} - 2\gamma\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial x\partial\tau_2} + a'(x)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau_1}\right] + a^2(x)\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial\tau_1{}^2} - 2\gamma a(x)\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial\tau_1\partial\tau_2} + \gamma^2\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial\tau_2{}^2}.$$

Отсюда ясно, что для функции (2) естественно поставить следующую задачу:

$$\begin{gathered} L_\varepsilon\tilde{y}(x,\tau,\varepsilon) \equiv (L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2)\tilde{y} + e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int_0^x e^{\frac{\gamma s}{\varepsilon}} k(x,s)\tilde{y}\left(s,\varphi(s,\varepsilon),\varepsilon\right)ds = h(x); \\ \tilde{y}(x,\tau,\varepsilon)\Big|_{\substack{x=0\\ \tau=0}} = y^0, \quad \left[\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x} + a(x)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau_1} - \gamma\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau_2}\right]_{\substack{x=0\\ \tau=0}} = y^1, \end{gathered} \tag{3}$$

где операторы L_0, L_1, L_2 имеют вид

$$L_0 \equiv a^2(x)\frac{\partial^2}{\partial\tau_1{}^2} - 2\gamma a(x)\frac{\partial^2}{\partial\tau_1\partial\tau_2} + \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial\tau_2{}^2} + a^2(x),\ L_1 \equiv 2a(x)\frac{\partial^2}{\partial x\partial\tau_1} - 2\gamma\frac{\partial^2}{\partial x\partial\tau_2} + a'(x)\frac{\partial}{\partial\tau_1},\ L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

В задаче (3) пока не произведена регуляризация интегрального члена, поэтому ее еще нельзя считать «расширенной» по отношению к исходной задаче (1). Для построения «расширенной» задачи займемся регуляризацией интегрального оператора.

2. Полная регуляризация задачи. Предположим, что задача (3) имеет решение в виде ряда

$$y(x,\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k(x,\tau) \tag{4}$$

с коэффициентами $y_k(x,\tau) \equiv y_k(x,\tau_1,\tau_2)$, имеющими вид

$$y_k(x,\tau) = c_1{}^{(k)}(x)e^{-i\tau_1} + c_2{}^{(k)}(x)e^{i\tau_1} + c_3{}^{(k)}(x)e^{\tau_2} + c_0{}^{(k)}(x), \tag{5}$$

где все $c_i^{(k)}(x) \in C^\infty[0,T],\ i=\overline{0,3}$. Подставляя ряд (4) с коэффициентами (5) в интегральный член задачи (3), получим интегралы, имеющие вид

$$I_0(x,\varepsilon) = e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int_0^x e^{\frac{\gamma s}{\varepsilon}} k_0(x,s)ds, \quad I_1(x,\varepsilon) = e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int_0^x k_1(x,s)e^{\frac{\gamma s - i\psi_1(s)}{\varepsilon}}ds;$$

$$I_2(x,\varepsilon) = e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int_0^x k_2(x,s)e^{\frac{\gamma s + i\psi_1(s)}{\varepsilon}}ds, \qquad I_3(x,\varepsilon) = e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int_0^x k_3(x,s)ds,$$

где $k_j(x,s) \equiv k(x,s)c_j(s), \quad j=\overline{0,3}$.

Регуляризация интегралов $I_0 - I_3$ заключается в построении для них формального ряда по степеням малого параметра ε. Для осуществления такой операции применим интегрирование по частям к каждому из интегралов $I_0 - I_3$.

Рассмотрим интеграл $I_0(x,\varepsilon)$. Произведем в нем следующие действия:

$$I_0(x,\varepsilon) = e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int_0^x k_0(x,s)ds = e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int_0^x k_0(x,s)d\left(e^{\frac{\gamma s}{\varepsilon}}\right)\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right) = \varepsilon e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\left[\frac{k_0(x,s)}{\gamma}e^{\frac{\gamma s}{\varepsilon}}\Big|_{s=0}^{s=x} - \int_0^x e^{\frac{\gamma s}{\varepsilon}}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{k_0(x,s)}{\gamma}\right)ds\right] =$$

$$= \varepsilon e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\left[\frac{k_0(x,x)}{\gamma}e^{\frac{\varphi_2(x)}{\varepsilon}} - \frac{k_0(x,s)}{\gamma} - \int_0^x e^{\frac{\gamma s}{\varepsilon}}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{k_0(x,s)}{\gamma}\right)ds\right] = \varepsilon\frac{k_0(x,x)}{\gamma} - \varepsilon\frac{k_0(x,0)}{\gamma}e^{\frac{\varphi_2(x)}{\varepsilon}} - \varepsilon e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int_0^x e^{\frac{\gamma s}{\varepsilon}}\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{k_0(x,s)}{\gamma}\right]ds.$$

Итак, после однократного интегрирования по частям в $I_0(x,\varepsilon)$ выделяются внеинтегральные члены, которые при $\varphi=\tau$ имеют вид слагаемых суммы (5), а интегральный член снова является интегралом типа $I_0(x,\varepsilon)$. Многократное интегрирование по частям приводит к формальному ряду

$$I_0(x,\varepsilon)\equiv I_0(x,\tau,\varepsilon)=\varepsilon\left[\frac{k_0(x,x)}{\gamma}-\frac{k_0(x,0)}{\gamma}e^{\tau_2}\right]+\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k\left[v_0{}^{(k)}(x)+v_2{}^{(k)}(x)e^{\tau_2}\right].$$

Переходим к интегралу $I_1(x,\varepsilon)$. Интегрируя его по частям, будем иметь

$$I_1(x,\varepsilon)=e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int_0^x k_1(x,s)d\left(e^{\frac{\gamma s-i\psi_1(s)}{\varepsilon}}\right)\left(\frac{\varepsilon}{\gamma-ia(s)}\right)=\varepsilon e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\left[\frac{k_1(x,s)}{\gamma-ia(s)}e^{\frac{\gamma s-i\psi_1(s)}{\varepsilon}}\Big|_{s=0}^{s=x}-\int_0^x e^{\frac{\gamma s-i\psi_1(s)}{\varepsilon}}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{k_0(x,s)}{\gamma-ia(s)}\right)ds=\right.$$

$$=\varepsilon\frac{k_1(x,x)}{\gamma-ia(x)}e^{\frac{-i\varphi_1(x)}{\varepsilon}}-\varepsilon\frac{k_1(x,0)}{\gamma-ia(0)}e^{\frac{\varphi_2(x)}{\varepsilon}}-e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int_0^x e^{\frac{\gamma s-i\psi_1(s)}{\varepsilon}}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{k_1(x,s)}{\gamma-ia(s)}\right)ds.$$

И здесь после однократного интегрирования по частям внеинтегральные члены имеют при $\varphi=\tau$ вид слагаемых суммы (5), а интегральный член — вид интеграла типа $I_0(x,\varepsilon)$. Многократное интегрирование по частям приводит к формальному ряду по степеням ε:

$$I_1(x,\tau,\varepsilon)=\varepsilon\left[\frac{k_1(x,x)}{\gamma-ia(x)}e^{-i\tau_1}-\frac{k_1(x,0)}{\gamma-ia(0)}e^{\tau_2}\right]+\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k\left[v_1{}^{(k)}(x)e^{-i\tau_1}+v_2{}^{(k)}(x)e^{\tau_2}\right].$$

Поступая аналогичным образом, для интеграла $I_2(x,\varepsilon)$ получим следующий формальный ряд по степеням ε:

$$I_2(x,\tau,\varepsilon)=\varepsilon\left[\frac{k_2(x,x)}{\gamma+ia(x)}e^{i\tau_1}-\frac{k_2(x,0)}{\gamma+ia(0)}e^{\tau_2}\right]+\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k\left[w_1{}^{(k)}(x)e^{i\tau_1}+w_2{}^{(k)}(x)e^{\tau_2}\right].$$

Интеграл $I_3(x,\varepsilon)$ уже регуляризован, то есть

$$I_3(x,\tau,\varepsilon)=e^{\tau_2}\int_0^x k_3(x,s)ds.$$

Назовем выписанные выше формальные ряды для интегралов I_0-I_3 формулами *регуляризации интегралов*. Применение этих формул к сумме (5), взятой на сужение $\tau=\varphi$, приводит к следующему формальному ряду по степеням ε:

$$e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int_0^x e^{\frac{\gamma s}{\varepsilon}}k(x,s)y_k\left(s,\varphi(s,\varepsilon),\varepsilon\right)ds=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j d_{3j}{}^{(k)}(x)e^{-\varphi_2(x,\varepsilon)}+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\left[d_{ij}{}^{(k)}(x)e^{-i\varphi_1(x,\varepsilon)}+d_{2j}{}^{(k)}(x)e^{i\varphi_1(x,\varepsilon)}+d_{0j}{}^{(k)}(x)\right],$$

а подстановка ряда (4) в интегральный член задачи (3) — к формальному ряду

$$\begin{aligned}e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int_0^x e^{\frac{\gamma s}{\varepsilon}}k(x,s)y_k\left(s,\varphi(s,\varepsilon),\varepsilon\right)ds&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{k+j}c_{3j}{}^{(k)}(x)e^{-\varphi_2(x,\varepsilon)}+\\&+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^{k+j}\left[c_{1j}{}^{(k)}(x)e^{-i\varphi_1(x,\varepsilon)}+c_{2j}{}^{(k)}(x)e^{i\varphi_1(x,\varepsilon)}+c_{0j}{}^{(k)}(x)\right].\end{aligned}\tag{6}$$

Этим показана инвариантность интегрального оператора относительно класса $U\big|_{x=\varphi}$, где U — пространство сумм (5). Теперь расширенную задачу (3) можно записать в виде

$$\tilde{L}_\varepsilon\tilde{y}(x,\tau,\varepsilon)=(L_0+\varepsilon L_1+\varepsilon^2L_2)\tilde{y}+K\tilde{y}=h(x),\ \tilde{y}(x,\tau,\varepsilon)\Big|_{\substack{x=0\\ \tau=0}}=y^0,\left[\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}+a(x)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau_1}-\gamma\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau_2}\right]_{\substack{x=0\\ \tau=0}}=y^1,\tag{7}$$

где оператор K сопоставляет каждому формальному ряду (4) с коэффициентами $y_j(x,\tau)\in U$ формальный ряд (6), в котором все $\varphi_j(x,\varepsilon)$ заменены на τ_j ($j=1,2$). Для дальнейшего расчета удобно представить оператор K в виде $K\tilde{y}=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\sum_{j=0}^{s}K_jy_{s-j}(x,\tau)$, где оператор K_j определяется следующим образом. Возьмем произвольную функцию $y(x,\tau)\in U$ в виде суммы (5) и произведем последовательное интегрирование по частям в интеграле $e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int\limits_0^x e^{\frac{\gamma s}{\varepsilon}}k(x,s)y\left(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)ds$ с выделением внеинтегральных членов порядка $1,\varepsilon,...,\varepsilon^s$ включительно. Затем во внеинтегральных членах заменим $\varphi_j(x,\varepsilon)$ на τ_j, $j=1,2$. Тогда $K_s y(x,\tau)$ есть коэффициент при ε^s во внеинтегральных членах. Из этого определения, в частности, следует, что

$$K_0 y_j(x,\tau)=e^{\tau_2}\int\limits_0^x k(x,s)c_3^{(j)}(s)ds;$$

$$K_1 y_j(x,\tau)=\frac{k(x,x)}{\gamma-ia(x)}c_1^{(j)}(x)e^{-i\tau_1}+\frac{k(x,x)}{\gamma+ia(x)}c_2^{(j)}(x)e^{i\tau_1}+$$

$$+\frac{k_2(x,x)}{\gamma}c_0^{(j)}(x)-\left[\frac{k(x,0)}{\gamma-ia(0)}c_1^{(j)}(0)-\frac{k(x,0)}{\gamma+ia(0)}c_2^{(j)}(0)+\frac{k(x,0)}{\gamma}c_0^{(j)}(0)\right]e^{\tau_2}.$$

Подставив теперь ряд (4) в задачу (7), произведем приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε (с учетом формулы регуляризации интегралов). Получим следующие итерационные задачи:

$$L_0 y(x,\tau)+K_0 y_0(x,\tau)=h(x),\ y_0(0,0)=y^0,\ ly_0\equiv\left[a(x)\frac{\partial y_0}{\partial\tau_1}-\gamma\frac{\partial y_0}{\partial\tau_2}\right]_{\substack{x=0\\ \tau=0}}=y^1; \qquad (\varepsilon^0)$$

$$L_0 y_1(x,\tau)+K_0 y_1(x,\tau)=-L_1 y_0(x,\tau)+K_1 y_0(x,\tau),\ y_1(0,0)=0,\ ly_1=-\left.\frac{\partial y_0}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\ \tau=0}}; \qquad (\varepsilon^1)$$

$$L_0 y_2(x,\tau)+K_0 y_2(x,\tau)=-L_1 y_1(x,\tau)-L_2 y_0(x,\tau)-K_1 y_1(x,\tau)-K_2 y_0(x,\tau),\ y_2(0,0)=0,\ ly_2=-\left.\frac{\partial y_1}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\ \tau=0}}; \qquad (\varepsilon^2)$$

$$L_0 y_k(x,\tau)+K_0 y_k(x,\tau)=-L_1 y_{k-1}-L_2 y_{k-2}-\sum_{j=1}^{k}K_j y_{k-j},\ y_k(0,0)=0,\ ly_k=-\left.\frac{\partial y_{k-1}}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\ \tau=0}},\ k\ge 2,\ (\varepsilon^k),$$

где L_0, L_1, L_2, K_j — операторы, описанные выше.

3. Разрешимость итерационных задач. Для описания разрешимости итерационных задач (ε^k) в пространстве U введем в него скалярное произведение. Пусть

$$y(x,\tau)=y_1(x)e^{-i\tau_1}+y_2(x)e^{i\tau_1}+y_3(x)e^{\tau_2}+y_0(x),\quad z(x,\tau)=z_1(x)e^{-i\tau_1}+z_2(x)e^{i\tau_1}+z_3(x)e^{\tau_2}+z_0(x) —$$

два произвольных элемента пространства U. Скалярное (при каждом $x\in[0,T]$) произведение в U определим следующим образом:

$$<y,z>\overset{\partial ef}{=}\sum_{j=0}^{2}y_j(x)\overline{z_j(x)}+\int\limits_0^T y_3(x)\overline{z_3(x)}dx.$$

Теперь нетрудно построить оператор, сопряженный к оператору

$$(L_0+K_0)y\equiv\left[\left(a^2(x)\frac{\partial^2}{\partial\tau_1{}^2}-2\gamma a(x)\frac{\partial^2}{\partial\tau_1\partial\tau_2}+\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial\tau_2{}^2}+a^2(x)\right)+K_0\right]y.$$

Он будет иметь вид $L_0+K_0^*$, где K_0^* действует по закону

$$K_0^* y(x,\tau)\equiv K_0^*\left[y_1(x)e^{-i\tau_1}+y_2(x)e^{i\tau_1}+y_3(x)e^{\tau_2}+y_0(x)\right]=e^{\tau_2}\int\limits_x^T k(s,x)y_3(s)ds.$$

Убедимся в этом. Соотношение $<L_0 y,z>\equiv<y,L_0 z>$ проверяется так же, как и в [1]. Проверим соотношение $<K_0 y,z>\equiv<y,K_0^* z>$.

Имеем

$$<K_0 y,z>=<e^{\tau_2}\int\limits_0^x k(s,x)y_3(s)ds,\ e^{\tau_2}z_3(x)>=\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^x k(x,s)y_3(s)ds\overline{z_3(x)}\right)dx=$$

$$= \int_0^T ds \left(\int_s^T k(x,s) y_3(s) \overline{z_3(x)} dx \right) = \int_0^T \left(y_3(s) \overline{\int_0^T k(x,s) \overline{z_3(x)} dx} \right) ds = < y, K_0^* z > .$$

Следовательно, оператор K_0^* имеет указанный выше вид.

Построим базис оператора $L_0 + K_0^*$. Для этого решим уравнение $(L_0 + K_0^*) y = 0$. Подставляя сюда (6), получим уравнение

$$0 \cdot y_1(x) e^{-i\tau_1} + 0 \cdot y_2(x) e^{i\tau_1} + \left[\left[\gamma^2 + a^2(x) \right] y_3(x) + \int_x^T k(s,x) y_3(s) ds \right] e^{\tau_2} + a^2(x) y_0(x) = 0.$$

Приравнивая отдельно коэффициенты при $e^{\pm\tau_1}, e^{\tau_2}$ и свободные члены, получим систему уравнений:

$$\left[\gamma^2 + a^2(x) \right] y_3(x) - \int_x^T k(s,x) y_3(s) ds = 0;$$
$$a^2(x) y_0(x) = 0;$$
$$0 \cdot y_1(x) = 0;$$
$$0 \cdot y_2(x) = 0.$$

Первое уравнение имеет только тривиальное решение в пространстве $C^\infty[0,T]$. То же справедливо относительно второго уравнения. Следовательно, ядро оператора $L_0 + K_0^*$ состоит из функций вида $y(x,\tau) = y_1(x) e^{-i\tau_1} + y_2(x) e^{i\tau_1}$, $y_1(x), y_2(x) \in C^\infty[0,T]$, а базис ядра $L + K_0^*$ образуют функции $y_1(x,\tau) = e^{-i\tau_1}$, $y_2(x,\tau) = e^{i\tau_1}$.

Рассмотрим в U следующее уравнение:

$$L_0 y(x,\tau) + K_0 y(x,\tau) = H(x,\tau), \tag{8}$$

где $H(x,\tau)$ — соответствующая правая часть.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $a(x) > 0$ $\forall x \in [0,T]$, $a(x) \in C^\infty[0,T]$, $\gamma > 0$ — постоянная, $k(x,s) \in C^\infty(G)$ — ядро, $G = \{(x,s) : 0 \le s \le x \le T\}$. Пусть, кроме того, $H(x,\tau) \in U$. Тогда для разрешимости уравнения (8) в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы

$$< H(x,\tau), y_j(x,\tau) > \equiv 0 \quad \forall x \in [0,T], \ j = 1,2, \tag{9}$$

где $y_j(x,\tau)$ — базисные элементы ядра сопряженного оператора $L_0 + K_0^*$.

Доказательство. Пусть $H(x,\tau) = h_1(x) e^{-i\tau_1} + h_2(x) e^{i\tau_1} + h_3(x) e^{\tau_2} + h_0(x)$. Будем определять решение уравнения (8) в виде

$$y(x,\tau) = y_1(x) e^{-i\tau_1} + y_2(x) e^{i\tau_1} + y_3(x) e^{\tau_2} + y_0(x). \tag{10}$$

Подставляя (10) в уравнение (8), получим равенство

$$[\gamma^2 + a^2(x)] y_3(x) e^{\tau_2} + a^2(x) y_0(x) + e^{\tau_2} \int_0^x k(x,s) y_3(s) ds = h_1(x) e^{-i\tau_1} + h_2(x) e^{i\tau_1} + h_3(x) e^{\tau_2} + h_0(x).$$

Приравнивая здесь отдельно коэффициенты при $e^{\pm\tau_1}, e^{\tau_2}$ и свободные члены, получим уравнения

$$0 \cdot y_1(x) = h_1(x);$$
$$0 \cdot y_2(x) = h_2(x);$$
$$\left[\gamma^2 + a^2(x) \right] y_3(x) + \int_0^x k(x,s) y_3(s) ds = h_3(x); \tag{11}$$
$$a^2(x) y_0(x) = h_0(x).$$

Последнее уравнение (11) имеет единственное решение $y_0(x) = h_0(x) / a^2(x) \in C^\infty[0,T]$, так как $a(x) \ne 0$. Третье уравнение (11) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода с ядром

$k_0(x,s)=k(x,s)/\left[\gamma^2+a^2(x)\right]\in C^\infty(G),\ \ G=\{(x,s):0\le s\le x\le T\}$ и свободным членом $h_3(x)/\left[\gamma^2+a^2(x)\right]\in$ $\in C^\infty[0,T]$. Известно, что такое уравнение однозначно разрешимо в классе $C^\infty[0,T]$ (гладкость решения доказывается дифференцированием по x).

Таким образом, для разрешимости в U уравнения (8) необходимо и достаточно, чтобы были разрешимы в $C^\infty[0,T]$ первые два уравнения (11). Это возможно тогда и только тогда, когда $h_1(x)\equiv h_2(x)\equiv 0\quad \forall x\in[0,T]$, что эквивалентно условию (9). Теорема доказана.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 1 следует, что решение уравнения (8) при условиях (9) определяется в виде

$$y(x,\tau)=y_1(x)e^{-i\tau_1}+y_2(x)e^{i\tau_1}+\frac{h_0(x)}{a^2(x)}+\left[\frac{h_3(x)}{\gamma^2+a^2(x)}+\int_0^x R(x,s)\frac{h_3(s)}{\gamma^2+a^2(s)}ds\right]e^{\tau_2},\tag{12}$$

где $R(x,s)=\sum_{m=0}^{\infty}K_{m+1}(x,s)$ — резольвента ядра $k_0(x,s)\equiv\dfrac{k(x,s)}{\left[\gamma^2+a^2(x)\right]}$, то есть $k_1(x,s)=k(x,s), k_2(x,s)=$ $=\int_s^x k(x,t_1)k_1(t_1,s)dt_1,\dots,k_m(x,s)=\int_s^x k(x,t_1)k_{m-1}(t_1,s)dt_1$, $y_1(x),y_2(x)\in C^\infty[0,T]$ — произвольные функции.

Докажем теперь следующий результат.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, и функция $H(x,\tau)\in U$ удовлетворяет условиям ортогональности (9). Тогда уравнение (8) при следующих дополнительных условиях имеет вид

$$y(0,0)=y_*^{\,0},\quad ly_0\equiv\left[a(x)\frac{\partial y}{\partial\tau_1}-\gamma\frac{\partial y}{\partial\tau_2}\right]_{\substack{x=0\\ \tau=0}}=y_*^{\,1};\tag{13}$$

$$<-L_1y-K_1y+g(x,\tau),\ y_j(x,\tau)>\equiv 0\quad\forall x\in[0,T],\ j=1,2,\tag{14}$$

где $g(x,\tau)\in U$ — известная функция, однозначно разрешимая в пространстве U.

Доказательство. В силу условий (9) уравнение (8) имеет решение (10) в U, где функции $y_0(x),\ y_3(x)$ определены однозначно (см. (12)), а функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ пока не найдены. Подчиним (12) начальным условиям (13) и получим систему уравнений

$$\begin{cases}y_1(0)+y_2(0)=z_1^{\,0};\\ -ia(0)y_1(0)+ia(0)y_2(0)=z_2^{\,0},\end{cases}\tag{15}$$

где $z_1^{\,0}=y_*^{\,0}-y_3(0)-y_0(0),\ z_2^{\,0}=y_*^{\,1}+\gamma y_3(0).$ Из (15) находим, что

$$y_1(0)=\frac12\left(z_1^{\,0}+\frac{iz_2^{\,0}}{a(0)}\right),\qquad y_2(0)=\frac12\left(z_1^{\,0}-\frac{iz_2^{\,0}}{a(0)}\right).\tag{16}$$

Подчиним теперь решение (12) условиям (14). Найдем сначала L_1y и K_1y. Имеем

$$L_1y\equiv-2i[a(x)y_1'(x)-\frac{a(x)}{2}y_1(x)]e^{-i\tau_1}+2i[a(x)y_2'(x)-\frac{a'(x)}{2}y_2(x)]e^{i\tau_1}-2\gamma y_3'(x)e^{\tau_2};$$

$$K_1y(x,\tau)\equiv\frac{k(x,x)}{\gamma-ia(x)}y_1(x)e^{-i\tau_1}+\frac{k(x,x)}{\gamma+ia(x)}y_2(x)e^{i\tau_1}-\frac{k(x,x)}{\gamma}y_0(x)-$$
$$-\left[\frac{k(x,0)}{\gamma-ia(0)}y_1(0)-\frac{k(x,0)}{\gamma+ia(0)}y_2(0)+\frac{k(x,0)}{\gamma}y_0(0)\right]e^{\tau_2}.$$

Условия (14) приводят к уравнениям

$$-2i\left[a(x)y_1'(x)-\frac{a'(x)}{2}y_1(x)\right]+\frac{k(x,x)}{\gamma-ia(x)}y_1(x)+g_1(x)=0;\tag{17}$$

$$2i\left[a(x)y_2'(x)-\frac{a'(x)}{2}y_2(x)\right]+\frac{k(x,x)}{\gamma+ia(x)}y_2(x)+g_2(x)=0,\tag{18}$$

где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — коэффициенты при $e^{-i\tau_1}$ и $e^{i\tau_1}$ в функции $g(x,\tau)\in U$ соответственно. Учитывая, что $a(x)\ne 0\quad\forall x\in[0,T]$, найдем однозначно решение системы (17), (18) с начальными условиями

(16), а значит, определим решение (10) уравнения (8) в пространстве U однозначным образом. Теорема доказана.

4. Асимптотическая сходимость формальных решений. С помощью развитого выше алгоритма построим решения $y_0(x,\tau),\ldots,y_k(x,\tau)$ итерационных задач $(\varepsilon^0),\ldots,(\varepsilon^k)$ соответственно. Суммируя полученные результаты, будем иметь тождество

$$L_0(y_0+\varepsilon y_1+\ldots+\varepsilon^k y_k)+\varepsilon L_1(y_0+\varepsilon y_1+\ldots+\varepsilon^{k-1}y_{k-1})+\varepsilon^2 L_2(y_0+\varepsilon y_1+\ldots+\varepsilon^{k-2}y_{k-2})+$$
$$+K_0(y_0+\varepsilon y_1+\ldots+\varepsilon^k y_k)+\varepsilon K_1(y_0+\varepsilon y_1+\ldots+\varepsilon^{k-1}y_{k-1})+\ldots+\varepsilon^k K_k y_0=h(x)$$

или тождество

$$\tilde{P}_\varepsilon(y_0+\varepsilon y_1+\ldots+\varepsilon^k y_k)+K_0y_0+\varepsilon[K_0y_1+K_1y_0]+\ldots+\varepsilon^k[K_0y_k+\sum_{j=1}^{k}K_jy_{k-j}]\equiv h(x)+\varepsilon^kL_1y_k+\varepsilon^{k+1}L_2(y_{k+1}+\varepsilon y_k),$$

где $\tilde{P}_\varepsilon\equiv\varepsilon^2L_2+\varepsilon L_1+L_0$.

Произведем здесь сужение при $\tau=\varphi(x,\varepsilon)$, затем прибавим и вычтем выражение

$$e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int_0^x e^{\frac{\gamma s}{\varepsilon}}k(x,s)y_{\varepsilon k}\left(s,\psi(s)/\varepsilon\right)ds,$$

где $y_{\varepsilon k}(x,\tau)\equiv y_0(x,\tau)+\ldots+\varepsilon^k y_k(x,\tau)$. Получим тождество

$$P_\varepsilon y_{k\varepsilon}(x,\varphi)+e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int_0^x e^{\frac{\gamma s}{\varepsilon}}k(x,s)y_{\varepsilon k}(s,\psi(s)/\varepsilon)ds=h(x)+e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int_0^x e^{\frac{\gamma s}{\varepsilon}}k(x,s)y_{\varepsilon k}(s,\psi(s)/\varepsilon)ds-$$
$$-\sum_{s=0}^{k}\varepsilon^s(K_0y_s(x,\tau)+\ldots+K_sy_0(x,\tau))_{\tau=\varphi}+\varepsilon^kL_1y_k+\varepsilon^{k+1}L_2(y_{k+1}+\varepsilon y_k),$$

где $P_\varepsilon\equiv\varepsilon^2\dfrac{d^2}{dx^2}+a^2(x)$. Поскольку ряд (6) является асимптотическим для интеграла

$$e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int_0^x e^{\frac{\gamma s}{\varepsilon}}k(x,s)y_{\varepsilon k}\left(s,\psi(s)/\varepsilon\right)ds,$$

то $e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int_0^x e^{\frac{\gamma s}{\varepsilon}}k(x,s)y_{\varepsilon k}\left(s,\psi(s)/\varepsilon\right)ds-\sum_{s=0}^{k}\varepsilon^s\left(K_0y_s(x,\tau)+\ldots+K_sy_0(x,\tau)\right)_{\tau=\varphi}=O(\varepsilon^{k+1}),\ \varepsilon\to+0,$

равномерно относительно $x\in[0,T]$. Следовательно, функция $y_{\varepsilon k}(x,\varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$P_\varepsilon y_{\varepsilon k}(x,\varphi)+e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int_0^x e^{\frac{\gamma s}{\varepsilon}}k(x,s)y_{\varepsilon k}\left(s,\psi(s)/\varepsilon\right)ds=h(x)+\varepsilon^{k+1}g_k(x,\varepsilon),$$

где $\|g_k(x,\varepsilon)\|_{C[0,T]}\le\bar{g}_k=const\ \forall(x,\varepsilon)\in(0,\varepsilon_0]\times(0,T]$ ($\varepsilon_0>0$ — достаточно мало). Следовательно, функция $z(x,\varepsilon)=y(x,\varepsilon)-y_{\varepsilon k}(x,\varphi)$ удовлетворяет задаче

$$L_\varepsilon z(x,\varepsilon)\equiv P_\varepsilon z(x,\varepsilon)+e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}}\int_0^x e^{\frac{\gamma s}{\varepsilon}}k(x,s)z(s,\varepsilon)ds=\varepsilon^{k+1}g_k(x,\varepsilon),\ z(0,\varepsilon)=0,\ z'(0,\varepsilon)=O(\varepsilon^{k+1}) \qquad (19)$$

и справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $a(x)>0\ \forall x\in[0,T]$, $a(x),h(x)\in C^\infty[0,T]$, ядро $k(x,s)\in C^\infty(G)$, $G=\{(x,s):0\le s\le x\le T\}$. Тогда имеет место оценка

$$\left\|y(x,\varepsilon)-y_{\varepsilon k}\left(x,\varphi(x,\varepsilon)\right)\right\|_{C[0,T]}\le C_k\varepsilon^{k+1}, \qquad (20)$$

где $y(x,\varepsilon)$ — точное решение задачи; $y_{\varepsilon k}\left(x,\psi(x)/\varepsilon\right)$ — сужение k-ой частичной суммы ряда (4) при $\tau=\varphi(x,\varepsilon)$.

Доказательство. Сделаем в задаче (19) замену $z(x,\varepsilon)=z_1$, $\varepsilon z_1'=z_2$. Тогда (19) будет эквивалентна системе

$$\begin{cases} \varepsilon z_1' = z_2, & z_1(0,\varepsilon) = 0; \\ \varepsilon z_2' = -a^2(x) z_1 + e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}} \int\limits_0^x e^{\frac{\gamma s}{\varepsilon}} k(x,s) z_1(s,\varepsilon) ds + \varepsilon^{k+1} g_k(x,\varepsilon), & z_2(0,\varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Пусть $Y(x,s,\varepsilon)$ — фундаментальная матрица решений соответствующей дифференциальной системы

$$\varepsilon \frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2(x) & 0 \end{pmatrix} Y, \ Y(s,s,\varepsilon) = I,$$

где I — единичная матрица.

Известно, что при условиях теоремы 3 она равномерно ограничена, то есть

$$\|Y(x,s,\varepsilon)\| \le C_0 \le const \quad \forall (x,\varepsilon) \in [0,T] \times (0,\varepsilon_0].$$

Введем вектор $w = \{z_1, z_2\}$ и обратим с помощью матрицы $Y(x,s,\varepsilon)$ систему (21). Получим эквивалентную систему

$$w = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^x Y(x,\mu,\varepsilon) e^{-\frac{\gamma x}{\varepsilon}} \begin{pmatrix} 0 \\ \int\limits_0^\mu e^{\frac{\gamma s}{\varepsilon}} k(x,s) z_1(s,\varepsilon) ds \end{pmatrix} ds + \varepsilon^k \int\limits_0^x Y(x,\mu,\varepsilon) \begin{pmatrix} 0 \\ g_k(\mu,\varepsilon) \end{pmatrix} d\mu.$$

Переходя здесь к нормам, получим неравенство

$$\|w(x,\varepsilon)\| \le \frac{c_1}{\varepsilon} \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^\mu e^{\frac{-\gamma(\mu-s)}{\varepsilon}} \|w(s,\varepsilon)\| ds \right) d\mu + c_2 \varepsilon^k, \tag{22}$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — некоторые постоянные. Введем функцию

$$\pi(x) = \max_{\alpha \in [0,x]} \|w(\alpha,\varepsilon)\| \ge \|w(x,\varepsilon)\|.$$

Тогда из (22) получаем, что

$$\pi(x) \le \frac{c_1}{\varepsilon} \max_{\alpha \in [0,x]} \int\limits_0^\alpha \left(\int\limits_0^\mu e^{\frac{-\gamma(\mu-s)}{\varepsilon}} \|w(s,\varepsilon)\| ds \right) d\mu + \varepsilon^k c_2 \le \frac{c_1}{\varepsilon} \max_{\alpha \in [0,x]} \int\limits_0^x \pi(\mu) \left(\int\limits_0^\mu e^{\frac{-\gamma(\mu-s)}{\varepsilon}} ds \right) d\mu + \varepsilon^k c_2 =$$

$$= \frac{c_1}{\varepsilon} \int\limits_0^x \pi(\mu) \left(\int\limits_0^\mu e^{\frac{-\gamma(\mu-s)}{\varepsilon}} ds \right) d\mu + \varepsilon^k c_2 = \frac{c_1}{\varepsilon} \int\limits_0^x \pi(\mu) \frac{\varepsilon}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma\mu}{\varepsilon}} \right) ds + \varepsilon^k c_2 \le \frac{c_1}{\gamma} \int\limits_0^x \pi(\mu) d\mu + c_2 \varepsilon^k.$$

Применяя неравенство Гронуолла-Беллмана [2], найдем, что $\|w(x,\varepsilon)\| \le \pi(x) \le \varepsilon^k c_2 e^{\frac{c_1}{\gamma} x} \le c_3 \varepsilon^k$, откуда следует, что $\|z(x,\varepsilon)\| \le \|w(x,\varepsilon)\| \le c_3 \varepsilon^k$. Итак, получена оценка

$$\|y(x,\varepsilon) - y_{\varepsilon k}(x)\|_{C[0,T]} \le c_k \varepsilon^k \quad \forall k = 0,1,2,...$$

Построим частичную сумму $y_{\varepsilon,k+1}(x) \equiv y_{\varepsilon k}(x) + \varepsilon^{k+1} y_{\varepsilon,k+1}(x,\varphi)$. Тогда для нее будет справедлива оценка

$$\|y(x,\varepsilon) - y_{\varepsilon,k+1}(x)\|_{C[0,T]} = \left\| \left(y(x,\varepsilon) - y_{\varepsilon k}(x) \right) - \varepsilon^{k+1} y_{\varepsilon,k+1}(x,\varphi) \right\|_{C[0,T]} \le c_{k+1} \varepsilon^{k+1},$$

а значит,

$$\|y(x,\varepsilon) - y_{\varepsilon k}(x)\|_{C[0,T]} \le c_{k+1} + \max_{x \in [0,T]} \|y_{\varepsilon,k+1}(x,\varphi)\| \le \overline{c}_{k+1} \varepsilon^{k+1},$$

то есть получена оценка (20). Теорема доказана.

Список литературы

1 *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 400 с.

2 *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.

Б.Т.Қалымбетов, Н.С.Иманбаев, М.Ә.Темірбеков

Ядросы жылдам кемімелі сингулярлы ауытқыған интегро-дифференциалдық теңдеудің шешімдерінің асимптотикасы

Ядросы жылдам кемімелі екінші ретті туындылы кіші параметрлі интегро-дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебі қарастырылды. Авторлар қосымша тәуелсіз айнымалыларды енгізу арқылы бастапқы сингулярлы ауытқымалы есепті регулярлы ауытқымалы есепке келтірген. Экспоненциалдық функциялардың кеңістігімен салыстырмалы интегралдық оператордың инварианттылығы көрсетілген. Экспоненциалдық функциялардың кеңістігінде жалпы итерациялық есептің қалыпты және бірмәнді шешімділігі, сонымен бірге формалды шешімдердің дәл шешімге асимптотикалық жинақтылығы дәлелденген.

B.T.Kalimbetov, N.S.Imanbayev, M.A.Temirbekov

Asymptotics of solutions of singularly perturbed integral differential equation with rapidly decreasing kernel

The Cauchy problem for integro-differential equation with a rapidly decreasing kernel of the second order with a small parameter at the highest derivative is considered. By the introduction of additional independent variables initial singularly perturbed problem is reduced to a regularly perturbed problem. The invariance of integral operator regarding to space of exponential functions is showed. Normal and unique solvability of general iterative problems in the space of exponential functions and the asymptotic convergence of formal solutions to the exact one are proved.

References

1 Lomov S.A. *Introduction to the general theory of singular perturbations*, Moscow: Nauka, 1981, p. 400.
2 Hartman F. *Ordinary Differential Equations*, Moscow: Mir, 1970, p. 720.