УДК 517.946

Ж.Н.Тасмамбетов

Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова
(E-mail: tasmam@rambler.ru)

Применение метода Фробениуса-Латышевой к построению биортогональных многочленов двух переменных Эрмита

В статье рассмотрены возможности построения решений специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в биортогональных многочленах Эрмита двух переменных. С помощью метода Фробениуса-Латышевой показаны особенности построения решений в виде биортогональных многочленов двух переменных вблизи особых кривых (0,0) и (∞, ∞). На конкретных примерах обосновано то, что основным аппаратом при таких построениях являются гипергеометрические функции Аппеля двух переменных.

Ключевые слова: построение решений, специальная система, частные производные, биортогональные многочлены, метод Фробениуса-Латышевой, гипергеометрические функции, особенности.

Предварительные сведения. Постоянно расширяется круг теоретических и прикладных вопросов, при решении которых используются ортогональные многочлены. Если ортогональные многочлены одной переменной хорошо изучены и в своем развитии к настоящему времени достигли значительного совершенства, то в случае двух и более переменных ортогональные многочлены изучены значительно меньше. Начало изучения в этом направлении заложено в работах Ш. Эрмита (1865) и П. Аппеля (1881). Построенные ими биортогональные многочлены являются аналогами и обобщениями классических ортогональных многочленов на случай двух и более переменных [1].

Простейшие свойства многочленов двух переменных, ортогональных по области с произвольным весом, были рассмотрены Д. Джексоном в 1938 г. [2]. Многие понятия, связанные с ортогональными многочленами по переменным, такие как монические ортогональные многочлены и нормальные биортогональные системы, приведены в монографии П.К. Суетина [2]. Так, многочлен

$$\Phi_{nk}(x,y) = x^{n-k}\cdot y^k + \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} A_{ms}\cdot x^{m-s}\cdot y^s,$$

удовлетворяющий условиям

$$\iint h(x,y)\cdot\Phi_{nk}(x,y)\cdot x^{p-q}\cdot y^q\,dxdy = 0,\ \ (p=0,1,\ldots,n-1 \text{ и } q=0,1,\ldots,p),$$

называется *моническим ортогональным многочленом*. Однако монические ортогональные многочлены одной и той же степени, вообще говоря, не ортогональны между собой. Поэтому, возникает задача о построении биортогональной системы многочленов. Действительно, существует такая система многочленов $\{\Psi_{ms}(x,y)\}$, что выполняются условия

$$\iint\limits_G h(x,y)\cdot\Phi_{nk}(x,y)\cdot\Psi_{ms}(x,y)\,dxdy = \delta_{nm}\cdot\delta_{ks}.$$

Биортогональная система многочленов

$$\{\Phi_{nk}(x,y);\ \Psi_{ms}(x,y)\}$$

называется *нормальной биортогональной системой*, если при любом номере *n* выполняется равенство $\Psi_{ms}(x,y) = C_{np}^{(S)}\cdot\Phi_{np}(x,y)$.

Постановка задачи. Требуется построить решения системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\left.\begin{aligned} x^2 p_0\cdot Z_{xx} + xyp_1\cdot Z_{xy} + xp_2\cdot Z_x + yp_3\cdot Z + p_4\cdot Z = 0\\ y^2 q_0\cdot Z_{yy} + xyq_1\cdot Z_x + xq_2\cdot Z_x + yq_3\cdot Z_3 + q_4\cdot Z = 0\end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где

$$p_i(x) = a_{00}^{(i)} + a_{10}^{(i)}\cdot x^k,\ \ q_i(y) = b_{00}^{(i)} + b_{10}^{(i)}\cdot y^k; \tag{2}$$

$(a_{00}^{(i)}, a_{10}^{(i)}, b_{00}^{(i)}, b_{01}^{(i)}$ $(i = 0,1,2,3,4)$ и k — некоторые постоянные) в виде биортогональных многочленов двух переменных. При этом особое внимание уделяется биортогональным многочленам Эрмита двух переменных. В системе (1) $Z = Z(x, y)$ — общая неизвестная, и для нее выполняются условия совместности [3] и условие интегрируемости

$$\frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{q_1}{q_0} - 1 \neq 0. \tag{3}$$

При выполнении этих условий система может иметь до четырех линейно-независимых, частных решений

$$Z_j(x, y) = x^{\rho j} \cdot y^{\delta j} \cdot \sum_{\mu,\nu}^{\infty} C_{\mu,\nu}^{(i)} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} (C_{00} \neq 0) \tag{4}$$

$\left((\rho_j, \sigma_j, C_{\mu,\nu}^{(i)} (\mu, \nu = 0,1,2,...;\ j = 1,2,3,4)\right)$ — некоторые постоянные.

Тогда общее решение системы (1)–(2) представимо в виде

$$Z(x, y) = C_1 \cdot Z_1 + C_2 \cdot Z_2 + C_3 \cdot Z_3 + C_4 \cdot Z_4 \tag{5}$$

и зависит от произвольных постоянных $C_j\,(j = 1,2,3,4)$.

Свойства системы (1)–(2). Раскроем некоторые важные свойства системы (1)–(2).

Подстановка

$$x^k = u,\ v = y^k \tag{5'}$$

преобразует эту систему в систему гипергеометрического типа [4]:

$$u^2\left(a_{00}^{(0)} + a_{10}^{(0)}u\right)Z_{uu} + uv\left(a_{00}^{(1)} + a_{10}^{(1)}u\right)Z_{uv} + u\left\{\left[a_{00}^{(0)}\frac{k-1}{k} + \frac{a_{00}^{(2)}}{k}\right] + \left[a_{10}^{(0)}\frac{k-1}{k} + \frac{a_{10}^{(2)}}{k}\right]u\right\}Z_u +$$

$$+\frac{1}{k} \cdot v \cdot \left[a_{00}^{(3)} + a_{10}^{(3)} \cdot u\right] \cdot Z_v + \frac{1}{k^2} \cdot \left(a_{00}^{(4)} + a_{10}^{(4)} \cdot u\right) \cdot Z = 0; \tag{6}$$

$$v^2\left(b_{00}^{(0)} + b_{01}^{(0)}v\right)Z_{vv} + uv\left(b_{00}^{(1)} + b_{01}^{(1)}v\right)Z_{uv} + v\left\{\left[b_{00}^{(0)}\frac{k-1}{k} + \frac{b_{00}^{(3)}}{k}\right] + \left[b_{01}^{(0)}\frac{k-1}{k} + \frac{b_{01}^{(3)}}{k}\right]v\right\} \cdot Z_v +$$

$$+\frac{1}{k} \cdot u \cdot \left[b_{00}^{(2)} + b_{01}^{(2)} \cdot v\right] \cdot Z_u + \frac{1}{k^2} \cdot \left(b_{00}^{(4)} + b_{01}^{(4)} \cdot v\right) \cdot Z = 0.$$

Систему (6) назвали гипергеометрической, поскольку из нее при различных значениях коэффициентов можно получить многие из 34 гипергеометрических функций двух переменных со списка Горна [5].

В частности, получим гипергеометрические функции Аппеля двух переменных

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} \cdot (\beta)_n \cdot (\beta')_n \cdot x^m \cdot y^n}{(\gamma)_m \cdot (\gamma')_n \cdot m! \cdot n!}, \tag{7}$$

являющиеся решением системы F_2:

$$\left.\begin{aligned} x(1-x)Z_{xx} - xyZ_{xy} + \left[\gamma - (a + \beta + 1)x\right]Z_x - \beta y Z_y - \alpha\beta \cdot Z = 0 \\ y(1-y)Z_{yy} - xyZ_{xy} + \left[\gamma' - (a + \beta' + 1)y\right]Z_y - \beta' x Z_x - \alpha\beta' Z = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

и функцию двух переменных

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma; x, y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m \cdot (\alpha')_n \cdot (\beta)_m \cdot (\beta')_n}{(\gamma)_{m+n} \cdot m! \cdot n!} x^m \cdot y^n, \tag{9}$$

являющуюся решением системы (F_3):

$$\left.\begin{aligned} x(1-x) \cdot Z_{xx} + yZ_{xy} + \left[\gamma - (a + \beta + 1)x\right] \cdot Z_x - \alpha\beta \cdot Z = 0 \\ y(1-y) \cdot Z_{yy} + xZ_{xy} + \left[\gamma - (a' + \beta' + 1)y\right] \cdot Z_y - \alpha'\beta' \cdot Z = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Гипергеометрические функции двух переменных являются важным аппаратом исследования биортогональных многочленов двух переменных. Это можно показать на конкретных примерах, используя приведенные выше функции Аппеля двух переменных $F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';u,v)$ и $F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma;u,v)$.

Применение метода Фробениуса-Латышевой. Для построения решения системы (1)–(2) в виде обобщенных степенных рядов двух переменных (4) применяем метод Фробениуса-Латышевой [6], где для исследования систем используются понятия ранга p и антиранга m. Понятие ранга $p = 1 + k$ $(k$ — *подранг*$)$ ввел А.Пуанкаре (1886) для изучения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Позднее Э.Томе ввел понятие антиранга $m = -1-\chi$ (χ — антиподранг).

Понятие ранга связано с особенностью $x=\infty$, а антиранга — с особенностью $x=0$. Эти понятия были обобщены Ж.Н.Тасмамбетовым на случай системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, кроме того, установлены простые признаки регулярности и иррегулярности особых кривых $(x=0, y=0)$ и $(x=\infty, y=\infty)$ [6]. В данном случае при $a_{00}^{(0)} \neq 0, b_{00}^{(0)} \neq 0$ система (6) имеет регулярную особенность $(x=0, y=0)$ и ранг $p=0$, а также антиранг $m=0$.

В качестве конкретного примера применения этого метода рассмотрим систему Эрмита [1; 318]:

$$(1-x)^2V_{xx} - xyV_{xy} - (n+3)xV_x + myV_y + +m(m+n+2)V = 0; \qquad (11)$$
$$(1-y)^2V_{yy} - xyV_{xy} - (m+3)yV_y + nxV_x + n(m+n+2)V = 0,$$

являющуюся частным случаем исходной системы (1)–(2).

Применение метода Фробениуса – Латышевой начинается с составления системы характеристических функций (11) [6]:

$$L_1[x^\rho \cdot y^\sigma] \equiv x^{\rho-2}\cdot y^\sigma \cdot \{[\rho\cdot(\rho-1)] - [\rho\cdot(\rho-1) + \rho\sigma + (n+3)\cdot\rho + m\sigma + m(m+n+2)]\,x^2]\};$$
$$L[x^\rho \cdot y^\sigma] \equiv x^\rho \cdot y^{\sigma-2}\cdot\{[\sigma\cdot(\sigma-1)] - [\sigma\cdot(\sigma-1) + \rho\,\sigma + (m+3)\sigma + n\cdot\rho + n(m+n+)]y^2\}. \qquad (12)$$

Отсюда определим систему определяющих уравнений относительно особенности (0, 0):

$$\left.\begin{aligned} f_{00}^1(\rho,\sigma) &\equiv \rho(\rho-1) = 0 \\ f_{00}^2(\rho,\sigma) &\equiv \sigma(\sigma-1) = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (13)$$

имеющую пары корней:

$$(\rho_1 = 0,\ \sigma_1 = 0);\ (\rho_2 = 1,\ \sigma_1 = 0);\ (\rho_1 = 0,\ \sigma_2 = 1) \text{ и } (\rho_2 = 1,\ \sigma_2 = 1).$$

Из системы (12) непосредственное определение неизвестных коэффициентов $C_{\mu,\nu}(\mu,\nu = 0,1,2,\ldots)$ решения (4) системы (11) вызывает некоторые трудности. Поэтому следует сделать преобразование при $k=2$, т.е. при $x^2 = u,\ y^2 = v$. Тогда из (12) получим систему гипергеометрического типа:

$$u(1-u)Z_{uu} - uvZ_{uv} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{n}{2}+2\right)u\right]Z_u + \frac{m}{2}vZ_v + \frac{m}{2}\left(\frac{m+n}{2}+1\right)Z = 0; \qquad (14)$$
$$v\cdot(1-v)Z_{vv} - uvZ_{uv} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{m}{2}+2\right)v\right]Z_v + \frac{n}{2}uZ_u + \frac{n}{2}\left(\frac{n+m}{2}+1\right)Z = 0\,.$$

Легко заметить, что система гипергеометрического типа (14) при обозначении параметров через

$$\alpha = \frac{m+n}{2}+1;\quad \beta = -\frac{m}{2};\quad \beta' = -\frac{n}{2};\ \gamma = \frac{1}{2};\ \ \gamma' = \frac{1}{2}$$

приводится к системе (8), решениями которой являются гипергеометрические функции Аппеля двух переменных $F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma',\gamma;x,y)$. С учетом этих обозначений легко получить четыре линейно-независимые частные решения системы (14) в виде

$$Z_1(u,v) = F_2\left(\tfrac{m+n}{2}+1, -\tfrac{m}{2}, -\tfrac{n}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; u, v\right);$$
$$Z_2(u,v) = u^{1/2}\cdot F_2\left(\tfrac{m+n+1}{2}+1, -\tfrac{1-m}{2}, -\tfrac{n}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}; u, v\right);$$
$$Z_3(u,v) = u^{1/2}\cdot F_2\left(\tfrac{m+n+1}{2}+1, -\ \tfrac{m}{2}, \tfrac{1-n}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}; u, v\right);$$
$$Z_4(U,v) = u^{1/2}\cdot v^{1/2}\cdot F_2\left(\tfrac{m+n}{2}+2, \tfrac{1-m}{2}, \tfrac{1-n}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}; u, v\right).$$

Учитывая замену $x^2 = u,\ y^2 = v$ и переходя к старым переменным, получим, что система Эрмита (12) имеет линейно-независимые частные решения в виде многочленов $V_{m,n}(x,y)$, которые выражаются через функции $F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y)$ следующим образом:

$$V_1(x,y) = F_2\left(\tfrac{m+n}{2}+1,\ \ -\tfrac{m}{2}, -\tfrac{m}{2}, -\tfrac{n}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2};\ x^2, y^2\right);$$
$$V_2(x,y) = x\cdot F_2\left(\tfrac{m+n+1}{2}+1,\ \ \tfrac{1-m}{2},\ -\tfrac{n}{2},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{1}{2};\ x^2, y^2\right); \qquad (15)$$
$$V_3(x,y) = y\cdot F_2\left(\tfrac{m+n+1}{2}+1, -\tfrac{m}{2}, \tfrac{1-n}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2};\ x^2, y^2\right);$$

$$V_4(x,y) = xy\cdot F_2\left(\frac{m+n}{2}+2, \frac{1-m}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2};\ x^2, y^2\right).$$

Отметим, что получены биортогональные многочлены Эрмита двух переменных, где показатели x и y точно совпадают с корнями (0,0), (1,0), (0,1) и (1,1) определяющей системы (13) относительно особенности (0,0). Тогда на основании (5) общее решение системы Эрмита (11) представится в виде

$$\begin{aligned} V(x,y) = {} & C_1 F_2\left(\frac{m+n}{2}+1, -\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2};\ x^2, y^2\right) + \\ & + C_2 x F_2\left(\frac{m+n+1}{2}+1,\ \frac{1-m}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2};\ x^2, y^2\right) + \\ & + C_3 y\, F_2\left(\frac{m+n}{2}+1,\ -\frac{m}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2};\ x^2, y^2\right) + \\ & + C_4 xy\, F_2\left(\frac{m+n}{2}+2,\ \frac{1-m}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2};\ x^2, y^2\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Построенные частные решения (15) и общее решение (16) полностью совпадают с решениями, приведенными в [1; 320]. Это показывает, что введенная нами система (1)–(2) представляет собой наиболее общую систему, решениями которой являются биортогональные многочлены двух переменных. А биортогональные многочлены двух переменных всегда выражаются через решения системы гипергеометрического типа (6), т.е. выражаются через гипергеометрические функции двух переменных.

Для этого биортогонального многочлена принято обозначение

$$V_{m.n}(x.y) = 2^{m+n}\cdot\frac{(1,m+n)}{(1,m)\cdot(1,n)}\cdot\cdot\left[x^m\cdot y^n + \ \dots + \frac{1}{2^{2j}}\cdot\frac{\Delta^{2j}(x^m\cdot y^n)}{(i,j)\cdot(-m-n,j)} + \ \dots\right], \tag{17}$$

где использованы обозначения

$$(\lambda)_0 = 1,\ (\lambda)_n = \lambda\cdot(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1),\ n = 1,2,3,\cdots;$$

$$(1)_n = (1,n) = 1\cdot 2\cdots n = n!\ ,(\lambda,n) = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1),\ n = 1,2,3,\cdots.$$

Для случая $m+n=4$ несколько первых многочленов имеют вид [1; 317]

$$\begin{aligned} &V_{0,0} = 1; && V_{1,2} = 24xy^2 - 4x; \\ &V_{1,0} = 2x; && V_{0,3} = 8y^3 - 4y; \\ &V_{0,1} = 2y; && V_{4,0} = 16x^4 - 12x^2 + 1; \\ &V_{2,0} = 4x^2 - 1; && V_{3,1} = 64x^3\cdot y - 24xy; \\ &V_{1,1} = 8xy; && V_{2,2} = 96x^2y^2 - 12x^2 - 12y^2 + 2; \\ &V_{0,2} = 4y^2 - 1; && V_{1,3} = 64xy^3 - 24xy; \\ &V_{3,0} = 8x^3 - 4x; && V_{0,4} = 16y^4 - 12y^2 + 1, \dots \\ &V_{2,1} = 24x^2 - 4y\dots && \end{aligned}$$

Приведенные биортогональные многочлены двух переменных являются обобщениями многочленов Чебышева второго рода $U_m\ (x)$и $U_n\ (y)$ со значениями

$$\begin{aligned} &V_{0,0} = 1; && V_{0,0} = 1; \\ &V_{1,0} = 2x; && V_{0,1} = 2y; \\ &V_{2,0} = 4x^2 - 1; && V_{0,2} = 4y^2 - 1; \\ &V_{3,0} = 8x^3 - 4x; && V_{0,3} = 8y^3 - 4y; \\ &V_{4,0} = 16x^4 - 12x^2 + 1; && V_{0,4} = 16\cdot y^4 - 12y^2 + 1. \end{aligned}$$

Построение решений вблизи особенности (∞, ∞). Теперь возникает вопрос о построении решения системы Эрмита (11) вблизи особенности (∞, ∞), применяя метод Фробениуса-Латышевой. Вернемся к системе гипергеометрического типа (6) и составим систему характеристических функций относительно особенности (∞, ∞) в следующем виде:

$$L_1\left[u^{\rho}\cdot v^{\sigma}\right]\equiv u^{\rho}v^{\sigma}\left\{-\left[\rho(\rho-1)+\rho\sigma+\left(\frac{n}{2}+2\right)\rho-\frac{m}{2}\sigma-\frac{m}{2}\left(\frac{m+n}{2}+1\right)\right]+\frac{\rho(\rho-1)+\frac{1}{2}}{u}\right\};$$

$$L_2\left[u^{\rho}\cdot v^{\sigma}\right]\equiv u^{\rho}v^{\sigma}\left\{-\left[\sigma(\sigma-1)+\rho\sigma+\left(\frac{m}{2}+2\right)\sigma-\frac{n}{2}p-\frac{n}{2}\left(\frac{m+n}{2}+1\right)\right]+\frac{\sigma(\sigma-1)+\frac{1}{2}}{v}\right\}.$$

Система определяющих уравнений относительно особенности (∞,∞)

$$\left.\begin{aligned}&\varphi^{1}_{00}(\rho,\sigma)\equiv-\left[\rho\cdot(\rho-1)+\rho\sigma+\left(\frac{n}{2}+2\right)\rho-\frac{m}{2}\cdot\sigma-\frac{m}{2}\left(\frac{m+n}{2}+1\right)\right]=\\&=-\left(\rho-\frac{m}{2}\right)\cdot\left(\rho+\frac{m}{2}+\sigma+\frac{n}{2}+1\right)=0,\qquad ,\\&\varphi^{2}_{00}(\rho,\sigma)\equiv-\left[\sigma\cdot(\sigma-1)+\rho\sigma+\left(\frac{m}{2}+2\right)\sigma-\frac{n}{2}\rho-\frac{n}{2}\left(\frac{m+n}{2}+1\right)\right]=\\&=\left(\sigma-\frac{n}{2}\right)\left(\rho+\frac{n}{2}+\sigma+\frac{m}{2}+1\right)=0\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

имеет пару корней:

$$\left(\rho_1=\frac{m}{2},\sigma_1=\frac{n}{2}\right);\left(\rho_1=\frac{m}{2};\ \sigma_2=-\left(\frac{n}{2}+m+1\right)\right);\left(\rho_2=-\left(\frac{m}{2}+n+1\right),\sigma_1=\frac{n}{2}\right).\tag{19}$$

Решение системы гипергеометрического типа (14) вблизи особенности $(\infty,\ \infty)$ ищем в виде обобщенного степенного ряда двух переменных по убывающим степеням независимых переменных u и v:

$$Z(u,v)=u^{\rho}v^{\sigma}\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}B_{\mu,\nu}\,u^{-\mu}v^{-\nu},(B_{0,0}\neq 0),\tag{20}$$

где $\rho,\sigma,B_{\mu,\nu}$ $(\mu,\nu=0,1,2,\cdots)$ — некоторые постоянные. Пары показателей $(\rho_i,\sigma_i)\,(i=1,2,3)$ определены из системы определяющих уравнений (18) в виде (19). Соответствующие им неизвестные коэффициенты $B_{\mu,\nu}$ $(i=0,1,2,3,\cdots)$ определяются из систем рекуррентных последовательностей:

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}B_{\mu-m,\nu-n}\cdot\varphi^{(j)}_{\mu,\nu}(\rho-m+\mu,\sigma-n+\nu)=0,\mu,\nu=0,1,2,\cdots;\,j=1,2;m,n=0,1,2,\cdots.$$

Тогда первое решение, соответствующее показателю $(\rho_1=\frac{m}{2},\sigma_1=\frac{n}{2})$, находим в виде следующего ряда:

$$Z_1(u,v)=u^{\frac{m}{2}}v^{\frac{n}{2}}[1-\frac{m(m-1)}{2^2(m+n)}\frac{1}{u}-\frac{n(n-1)}{2^2(m+n)}\frac{1}{v}-\frac{m(m-1)n(n-1)}{2^4(m+n)(m+n-1)}\frac{1}{uv}+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2^4(m+n)(m+n-1)}\frac{1}{u^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^4(m+n)(m+n-1)}\frac{1}{v^2}+\cdots].\tag{21}$$

Аналогично можно построить и остальные линейно-независимые частные решения $Z_j\,(j=2,3)$. Однако мы ограничимся построением только решения Z_1. В (21), переходя к старым переменным, получим одно решение исходной системы (11):

$$Z_1(x,y)=x^m y^n[1-\frac{m(m-1)}{2^2(m+n)}\frac{1}{x^2}-\frac{n(n-1)}{2^2(m+n)}\frac{1}{y^2}-\frac{m(m-1)n(n-1)}{2^4(m+n)(m+n-1)}\frac{1}{x^2y^2}+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2^4(m+n)(m+n-1)}\frac{1}{x^4}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^4(m+n)(m+n-1)}\frac{1}{y^4}+\cdots].\tag{22}$$

Таким образом, удается построить три линейно-независимые частные решения $V_{m,n}(x,y)$ системы Эрмита (11) вблизи особенности (∞,∞). Из (22) легко показать, что биортогональные многочлены $V_{m,n}(x,y)$ выражаются также через гипергеометрическую функцию Аппеля $F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma;x,y)$:

$$V_{m.n}(x.y) = 2^{m+n}\cdot\frac{(1,m+n)}{(1,m)\cdot(1,n)}\cdot x^m\cdot y^n F_3\left(-\frac{m}{2},-\frac{n}{2},\frac{1-m}{2},\frac{1-n}{2},-m-n,\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2}\right). \qquad (23)$$

Здесь уместно отметить, что гипергеометрические функции Аппеля $F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y)$ и $F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma;x,y)$, как и в обыкновенном случае, превращаются в многочлены двух переменных при следующих значениях параметров [1]:

F_2 : при $\alpha=-p$ в многочлен степени p;

F_2 : при $\beta=-r,\beta'=-s$ в многочлен степени $r+s$;

F_3 : 1^0. при $\alpha=-r,\alpha'=-s$ в многочлен степени $r+s$;

F_3 : 2^0. при $\alpha=-r,\beta'=-s$ в многочлен степени $r+s$;

F_3 : 3^0. при $\alpha'=-r,\beta=-s$ в многочлен степени $r+s$;

F_3 : 4^0. при $\beta=-r,\beta'=-s$ в многочлен степени $r+s$.

Например, такими значениями в (14) и (23) являются $(-\frac{m}{2})$ и $(-\frac{n}{2})$.

Таким образом, используя метод Фробениуса-Латышевой, мы на конкретном примере убедились, что гипергеометрические функции двух переменных играют важную роль при построении биортогональных многочленов Эрмита. Кроме того, из системы (1) и (2) с помощью замены $(5')$, используя систему гипергеометрического типа, можно построить и биортогональные многочлены $U_{m.n}(x.y)$, когда областями ортогональности является вся плоскость или единичный круг. В этом отношении система (1)–(2) и система гипергеометрического типа (6) являются наиболее общими. Однако здесь для исследования использованы только две функции Аппеля. Роль других гипергеометрических функций двух переменных требует дальнейшего изучения.

Работа выполнена по гранту КН МОН РК «Актуальные проблемы теории потенциалов и их приложения». Государственная регистрация № 0112РК00607. (Руководитель темы — академик Т.Ш.Кальменов)

Список литературы

1 *Appell P.* Kampe de Feriet. Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques. Polionomes d' Hermite. — Paris: Gauthier – Villars, 1926. — 484 p.

2 *Суетин П.К.* Ортогональные многочлены по двум переменным. — М.: Наука, 1988. — 384 с.

3 *Sternberg W.* Uber dis asymptotische Intergration von Differentialgleichungen // Math. Ann. — 1920. — Bd. 81. — P. 119–186.

4 *Тасмамбетов Ж.Н.* Об одной системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Укр. мат. журнал. — 1992. — Т. 44. — № 3. — С. 427–431.

5 *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1965. — 294 с.

6 *Тасмамбетов Ж.Н.* Построение решения системы дифференциальных уравнений в частных производных с регулярной особенностью обобщенным методом Фробениуса // (Препр. АН УССР. Ин-т математики: 91.29). — Киев, 1999. — 44 с.

Ж.Н.Тасмәмбетов

Фробениус-Латышева әдісін Эрмиттің екі айнымалының биортогонал көпмүшеліктерін құруда қолданылуы

Мақалада екінші ретті дербес туынды дифференциалдық теңдеулердің арнайы жүйесінің шешімдерін Эрмиттің екі айнымалының биортогонал көпмүшеліктері түрінде іздеу мүмкіндіктері қарастырылған. Фробениус-Латышева әдісін қолдану негізінде екі айнымалының биортогонал көпмүшеліктері түріндегі шешімдерін (0,0) және (∞, ∞) ерекше қисықтар маңайында тұрғызу ерекшеліктері көрсетілген. Нақты мысалдар арқылы мұндай шешімдер тұрғызу кезіндегі негізгі аппарат Аппельың екі айнымалының гипергеометрикалық функциялары екендігі дәлелденген.

Zh.N.Tasmambetov

The usage of Frobenius-Latysheva method for the construction of two variables biorthogonal Hermit polynomials

The possibilities of constructing the solutions of a special system of second order partial differential equations in two variables biorthogonal Hermite polynomials are studied in this work. Using the method of Frobenius-Latysheva it is shown the features of constructing the solutions in the form of two variables biorthogonal polynomials near the (0,0) and (∞, ∞) singular curves. By using the specific examples it is substantiated that the main tool in such constructions are two variables hypergeometric Appell functions.

References

1 Appell P. *Kampe de Feriet. Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques.Polionomes d' Hermite*, Paris: Gauthier – Villars, 1926, 484 p.

2 Suetin P.K. *Orthogonal polynomials by two variables*. Gordon and Breach Scienes Publishers, Moscow: Nauka, 1988, 384 p.

3 Sternberg W. *Math. Ann.*, 1920, 81, p. 119–186.

4 Tasmambetov Zh.N. *Ukrainian mathematical journal*, 1992, 44, 3, p. 427–430.

5 Bateman G., Erdeliyi A. *Higer transcendental functions*, vol. 1. Hypergeometrical function. Function of Lejander, New York, Toronto, London, MC Graw-Hill Company, IN, Moscow: Nauka, 1965, 294 p.

6 Tasmambetov Zh.N. *Academy of Sciences of the Ukrainian SSR*. Mathematics Institute: 91.29, Kiev, 1999, 44 p.