УДК 656.13.07:54

А.М.Омаров

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

# МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕТЕВЫХ ЗАДАЧ НА АВТОТРАНСПОРТЕ

*Мақалада үлестірімдік типті екі есеп қарастырылады. Бірінші есеп транспорттық құралдардың тиімді қолданылуды есепке алумен байланысты болса, екіншісі көлік желілерін үлестіруге байланысты. Бұл есептер түрлендірулердің көмегімен транспорттық есепке келтіріліп, белгілі әдістермен жүзеге асады.*

*Two problems of the distributing type are considered in article. The first problem is connected with account of the return the transport facilities, but the other — with sharing the transport on line. These problems by means of transformations are reduced to transport problem, which are realized by known methods.*

При планировании перевозок возникает необходимость в определении кратчайших расстояний между автотранспортными предприятиями, пунктами производства и потребления. Кроме того, кратчайшие расстояния являются основой при оплате клиентами транспортных услуг. Они необходимы также для определения грузооборота автотранспортного предприятия, учета расхода топлива, расчета заработной платы водителей и т.п.

Известны два способа определения расстояний: непосредственный замер на местности; замер по карте (плану) города или района с помощью теодолита [1].

Этим способам присущ один существенный недостаток: нет гарантии, что выбранный путь между двумя заданными пунктами является кратчайшим. Данный недостаток особенно сказывается при густоразветвленной дорожной сети современных городов, когда между удаленными точками имеются множество различных путей, создающих многовариантность в задаче расчета кратчайших расстояний.

Для нахождения оптимального решения используются математические методы, при применении которых необходима в качестве исходных данных транспортная сеть, отражающая транспортные связи между точками города (местности).

Множество всех дорог города (района) составляет дорожную сеть, но понятие *транспортной сети* несколько уже. В ней учитываются только те улицы (дороги), которые пригодны для движения по ширине проезжей части и качеству покрытия. Модель такой сети может быть представлена в виде графа.

*Граф* — это фигура, состоящая из точек (вершин) и отрезков (ребер), их соединяющих. Ребра характеризуются числами, которые могут иметь различный физический смысл. Ребра, ориентированные по направлению, называются *дугами.* В зависимости от того, все или часть ребер имеют направление, граф является ориентированным или смешанным.

Граф, каждая вершина которого может быть соединена некоторой последовательностью ребер с любой другой его вершиной, называется *связным графом.*

Граф, моделирующий транспортную сеть, обязательно должен быть связным, чтобы всегда был путь из любой вершины в любую другую. Числа, характеризующие ребра такого графа, выражают протяженность пути, время или стоимость проезда. Граф чаще всего является смешанным, так как в городских условиях на некоторых улицах установлено одностороннее движение.

Для моделирования транспортной сети, прежде всего, необходим картографический материал. Он должен быть достаточно подробным, отражать современное состояние города (района) и, по возможности, перспективы его развития. Этим требованиям отвечают карты крупного масштаба, где нанесены все существующие улицы (дороги) и проезды. Такие карты позволяют с большой точностью делать замеры расстояний между смежными вершинами.

Картографический материал необходимо дополнить сведениями из коммунальных и дорожных организаций в виде перечня улиц (населенных пунктов) с характеристикой их проезжей части.

Для моделирования, помимо картографического материала, необходимы все сведения по организации уличного движения в городе. Сюда входят схема организации движения на перекрестках, площадях и транспортных развязках, а также различные ограничения, действующие на улицах, проездах и дорожно-мостовых сооружениях в соответствии с установленными там дорожными знаками. В эти ограничения входят: введение одностороннего движения, запрещение проезда грузовых автомобилей, запрещение некоторых направлений движения, ограничения по общему весу, нагрузке на ось или габаритным размерам транспортных средств.

Помимо этого, необходимо располагать сведениями о размещении основных грузообразующих и грузопоглощающих объектов, обслуживаемых автомобильным транспортом. Имея эти данные, моделирование транспортной сети начинают с размещения вершин. Вершины присваивают точкам города, соответствующим: основным грузообразующим и грузопоглощающим пунктам (промышленным предприятиям, портам, железнодорожным станциям и т.д.); центрам крупных жилых кварталов (как существующих, так и строящихся); центрам небольших обособленных населенных пунктов, входящих в границы города; пересечениям улиц.

При моделировании транспортной сети для грузовых автомобилей, ребра, на которых запрещено движение грузового автотранспорта, из сети исключаются.

В условиях крупного города при оперативном планировании перевозок необходимо быстро определять расстояние между большим числом поставщиков, потребителей и автохозяйств. Если составить таблицы со всеми расстояниями, то они окажутся столь большими, что для ручных расчетов пользоваться ими практически будет невозможно. Если же вести расчеты на компьютере, то для хранения таблиц потребуется слишком много памяти. Поэтому иногда для сокращения размеров таблиц карту города разбивают на микрорайоны.

После составления карты микрорайонов определяется кратчайшее расстояние между их центрами. Построив для микрорайонов таблицу кратчайших расстояний, легко определить расстояние между любыми точками города. Для этого только нужно знать, в какие микрорайоны они входят.

Важным и необходимым приложением к модели транспортной сети является справочник улиц города, в котором в алфавитном порядке перечисляются названия улиц, проспектов, площадей, проездов, а также наименования новых районов массовой жилищной застройки. Каждому наименованию ставится в соответствие номер вершины модели транспортной сети. Если улица или проспект имеет большую протяженность, то в справочнике для них предусмотрено несколько записей. Таким образом, благодаря справочнику улиц можно осуществить привязку точек города к вершинам модели транспортной сети для последующего расчета кратчайших расстояний между ними.

Рассмотрим транспортную задачу в сетевой постановке в общем виде. Предположим, что грузы перевозятся по определенным маршрутам, проходящим от начального пункта через промежуточные к конечному пункту. В схеме транспортной сети все пункты нумеруют в определенном порядке. Все пункты, между которыми осуществляют перевозки, соединяют дугами или стрелками, указывающими направление перевозки, и получается сеть с множеством вершин. Количественные характеристики сети следующие: $d_i$ — интенсивность перевозок грузов в $i$-м пункте, т.е. количество груза отгруженного и отправленного из $i$-го пункта. Если $d_i > 0$, то груз из $i$-го пункта должен быть отправлен в количестве $d_i$; если $d_i = 0$, то количество груза, прибывающего в $i$-й пункт, равно количеству убывающего груза, т.е. в этом случае $i$-й пункт выполняет роль транзитного; если $d_i < 0$, то $i$-й пункт получает груз для потребления в количестве $|d_i|$; $d_{ij}$ — пропускная способность отрезка пути $(i, j)$; $c_{ij}$ — стоимость перевозки единицы груза по отрезку пути $(i, j)$; $x_{ij}$ — количество груза, перевозимого из пункта $i$ к пункту $j$.

Тогда математическая модель транспортной задачи в сетевой постановке запишется в виде: найти такие потоки $x_{ij} > 0 \quad (i, j = 1, 2, ..., n)$, при которых достигается минимум затрат на перевозки

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

и выполняются условия: по перевозкам

$$\sum_{j} x_{ij} - \sum_{i} x_{ji} = d_i \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

и по пропускным способностям

$$x_{ij} \le d_{ij} \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Решение транспортной задачи в сетевой постановке проводится с помощью метода потенциалов, по аналогии с решением транспортной задачи в матричной форме. Сетевая постановка транспортной задачи является особенно удобной в тех случаях, когда стоимость перевозок является аддитивной, т.е. общая стоимость складывается из стоимостей по отдельным участкам маршрута, что облегчает проведение численных расчетов с помощью компьютера. К данной задаче сводятся многие задачи распределительного типа.

Рассмотрим моделирование сетевых задач на примерах [2].

*Модель закрепления потребителей за поставщиками с учетом возврата транспортных средств.* При массовых перевозках грузов от предприятий, производящих продукцию, к потребителям возникает необходимость определить не только закрепление поставщиков к потребителям, но и выбрать маршруты перевозок таким образом, чтобы обеспечить минимум порожних пробегов и возврат транспортных средств. Такие задачи решаются по критерию минимума эксплуатационных затрат или тонно-километрового пробега. Рассмотрим эту задачу при перевозках однородной продукции. Задача решается в три этапа: с помощью модели закрепления поставщиков за потребителями решают обычную транспортную задачу, без учета возврата транспортных средств:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, ..., m),$$

где $c_{ij}$ — затраты на перевозку единицы продукции от $i$-го поставщика к $j$-му потребителю; $a_i$ — количество вывозимого груза от $i$-го поставщика; $b_j$ — количество потребляемого груза $j$-м потребителем; $x_{ij}$ — количество груза, перевозимого от $i$-го поставщика к $j$-му потребителю.

Решением этой задачи являются транспортные потоки $x_{ij}$ между потребителями и поставщиками. Зная вместимость $a$ транспортного средства, можно определить число транспортных средств $n_{ij}$, необходимых для перевозки грузов по формуле

$$n_{ij} = x_{ij} / a \quad (i = 1, 2, ..., n; \quad j = 1, 2, 3, ..., m).$$

Число транспортных средств, прибывших к $j$-му потребителю, можно определить по формуле

$$n_j = \sum_{i=1}^{n} n_{ij} \quad (j = 1, 2, ..., m)$$

и отправленных от $i$-го поставщика —

$$n_i = \sum_{j=1}^{m} n_{ij} \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

С помощью решения обычной транспортной задачи определяют оптимальные обратные потоки транспортных средств

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c^1_{ji} y_{ji} \to \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ji} = n_j \quad (j = 1, 2, ..., n);$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ji} = n_i \quad (i = 1, 2, ..., m);$$

$$y_{ji} \ge 0; \quad (j = 1, 2, ..., n; \ i = 1, 2, ..., m),$$

где $c^1_{ji}$ — стоимость возврата единицы транспортных средств от потребителя $j$ к поставщику $i$; $y_{ji}$ — число транспортных средств, отправленных от $j$-го потребителя к $i$-му поставщику. Далее определяют маршруты следования к $i$-му поставщику.

*Модель распределения транспортных средств по линиям.* При планировании перевозок целесообразно учитывать производительность транспортных средств в зависимости от линии перевозки, т.е. выделяемые транспортные средства должны обеспечить перевозки по установленным линиям. Модели этих задач формируются в зависимости от степени детализации, с учетом требований функционирования различных видов транспорта.

Для составления модели введем следующие обозначения: $s$ — вид автомобиля; $S$ — число видов автомобилей; $j$ — вид линии; $m$ — число видов линий; $b_j$ — объем перевозок по $j$-й линии; $b_{sj}$ — количество груза, перевозимого одним автомобилем $s$-го вида по $j$-й линии; $a_s$ — число автомобилей $s$-го вида; $p_{sj}$ — прибыль от эксплуатации одного автомобиля, осуществляющего перевозки по $j$-й линии; $x_{sj}$ — искомое число автомобилей $s$-го вида, осуществляющих перевозки по $j$-й линии.

Тогда модель распределения автомобилей по линиям состоит в нахождении таких значений:

$$x_{sj} \geq 0 \left( s = 1, 2, ..., S;\ j = 1, 2, ..., m \right),$$

при которой достигается максимум прибыли

$$\sum_{s=1}^{S} \sum_{j=1}^{m} p_{sj} x_{sj} \to \max$$

и выполняются условия:

– по числу автомобилей

$$\sum_{j=1}^{m} x_{sj} \leq a_s \quad \left( s = 1, 2, ..., S \right),$$

– по объему перевозок

$$\sum_{s=1}^{S} b_{sj} x_{sj} \geq b_j \quad \left( j = 1, 2, ..., m \right).$$

Сформированная модель относится к классу распределительных задач. Решая эту задачу, получаем оптимальное число автомобилей каждого вида для перевозки груза по имеющимся линиям.

Таким образом, в планировании работы автотранспортного предприятия может быть использован широкий набор экономико-математических методов, причем выбор наилучшего варианта проводится в зависимости от конкретных условий и видов транспорта.

## Список литературы


1. *Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. — М.: Наука, 1969. — 256 с.
2. *Кожин А.П.* Математические методы в планировании и управлении грузовыми перевозками. — М.: ВШ, 1991. — 296 с.