УДК 517.968

А.Н.Есбаев, Г.А.Есенбаева, М.И.Рамазанов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: adilet_e@mail.ru)

Исследование одной краевой задачи для нагруженного дифференциального оператора теплопроводности

В статье определена постановка краевой задачи для заданного нагруженного дифференциального оператора теплопроводности в неограниченной области. Исходная краевая задача редуцирована к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Получены различные представления функции, определяющей ядро редуцированного интегрального уравнения. Исследованы свойства определяющей функции ядра. Все результаты получены в общем виде.

Ключевые слова: краевая задача для нагруженного дифференциального оператора теплопроводности, интегральное уравнение Вольтерра второго рода, обобщенная гипергеометрическая функция, гамма-функция, символ Похгаммера.

Решение $u = u(x,t)$ первой краевой задачи в области $\Omega = \{(x,t) : x \in (0,\infty); t \in (0,\infty)\}$ для нагруженного дифференциального оператора теплопроводности

$$L_\lambda u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1-2\beta}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \cdot \left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=\bar{x}(t)} = f(x,t), \tag{1}$$

где β и λ — параметры, причем $0 < \beta < 1,\ \lambda \in C;\ x = \bar{x}(t)$ — заданная функция при $t \in (0,\infty)$; $\lambda \cdot \left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=\bar{x}(t)}$ — нагруженное слагаемое; k — порядок нагруженного слагаемого ($k = 0,1,2...$); функции $f(x,t),\ g(x)$ и $h(t)$ являются заданными в области Ω при $x \in (0,\infty)$ и $t \in (0,\infty)$ соответственно; производные $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ непрерывны всюду в Ω;

при начальном условии

$$u(x,0) = g(x) \tag{2}$$

и граничном условии

$$u(0,t) = h(t) \tag{3}$$

определяется из уравнения [1]

$$u(x,t) = \lambda \cdot \int_0^t \int_0^\infty \frac{x^\beta \cdot \xi^{1-\beta}}{2(t-\tau)} \cdot \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4(t-\tau)}\right) \cdot I_\beta\left(\frac{\xi \cdot x}{2(t-\tau)}\right) \cdot \left.\frac{\partial^k u}{\partial \xi^k}\right|_{\xi=\bar{x}(\tau)} d\xi \cdot d\tau + \bar{F}(x,t), \tag{4}$$

где

$$\bar{F}(x,t) = F_1(x,t) + F_2(x,t) + F_3(x,t);$$

$$F_1(x,t) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^t \int_0^\infty f(\xi,\tau) \cdot \frac{x^\beta \cdot \xi^{1-\beta}}{t-\tau} \cdot \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4(t-\tau)}\right) \cdot I_\beta\left(\frac{\xi \cdot x}{2(t-\tau)}\right) \cdot d\xi \cdot d\tau;$$

$$F_2(x,t) = \frac{x^\beta}{2t} \cdot \int_0^\infty g(\xi) \cdot \xi^{1-\beta} \cdot \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{2t}\right) \cdot I_\beta\left(\frac{\xi \cdot x}{2t}\right) \cdot d\xi;$$

$$F_3(x,t) = \frac{x^{2\beta}}{2^{2\beta+1} \cdot \Gamma(\beta+1)} \cdot \int_0^t h(\tau) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right) \cdot \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1+\beta}};$$

$I_\beta(z)$ — модифицированная функция Бесселя; $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Функция $\mu(t) = \left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=\bar{x}(t)}$ является решением интегрального уравнения Вольтерра второго рода, к которому редуцируется уравнение (4) [2]:

$$\mu(t)-\lambda\cdot\int\limits_0^t K(t,\tau)\cdot\mu(\tau)\cdot d\tau=F(t), \tag{5}$$

где

$$K(t,\tau)=\left.\frac{\partial^k Q(x,t-\tau)}{\partial x^k}\right|_{x=\bar{x}(t)},\quad F(t)=\left.\frac{\partial^k \bar{F}(x,t)}{\partial x^k}\right|_{x=\bar{x}(t)}, \tag{6}$$

причем

$$Q(x,t-\tau)=\frac{x^\beta}{2(t-\tau)}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot P(x,t-\tau); \tag{7}$$

$$P(x,t-\tau)=\int\limits_0^\infty \xi^{1-\beta}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot I_\beta\left(\frac{\xi\cdot x}{2(t-\tau)}\right)\cdot d\xi. \tag{8}$$

Функция $Q(x,t-\tau)$ определяет, как мы видим из первого соотношения (6), ядро интегрального уравнения (5). Как известно, свойства ядра диктуют методы исследования самого интегрального уравнения. Вычислим функцию $Q(x,t-\tau)$ в общем виде и представим различные ее интерпретации.

1. Непосредственно вычисляя функцию $P(x,t-\tau)$ как несобственный интеграл (8), получим:

$$P(x,t-\tau)=\frac{\dfrac{x^\beta}{2^\beta\cdot(t-\tau)^\beta}}{2^{\beta+1}\cdot\dfrac{1}{4(t-\tau)}\cdot\Gamma(\beta+1)}\cdot\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k!(\beta+1)_k}\Gamma\left(\frac{2k+2-\beta+\beta}{2}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{c}{2p^{\frac{1}{r}}}\right)^{2k}\cdot\left(\frac{x}{2(t-\tau)}\right)^{2k}:\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4(t-\tau}\right)^{2k}=$$

$$=\frac{4(t-\tau)}{2^{2\beta+1}\cdot\Gamma(\beta+1)}\cdot\frac{x^\beta}{(t-\tau)^\beta}\cdot\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k!(\beta+1)_k}\cdot\Gamma(k+1)\cdot\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)^{2k}=$$

$$=\frac{4}{2^{2\beta+1}\cdot\Gamma(\beta+1)}\cdot\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{2^{2k}(\beta+1)_k}\cdot\frac{x^{2k+\beta}}{(t-\tau)^{k+\beta-1}}=$$

$$=\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{2^{2k+2\beta-1}(\beta+1)_k\,\Gamma(\beta+1)}\cdot\frac{x^{2k+\beta}}{(t-\tau)^{k+\beta-1}};$$

$$P(x,t-\tau)=\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{2^{2k+2\beta-1}(\beta+1)_k\,\Gamma(\beta+1)}\cdot\frac{x^{2k+\beta}}{(t-\tau)^{k+\beta-1}}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7), придем к следующему представлению функции $Q(x,t-\tau)$:

$$Q(x,t-\tau)=\frac{x^{2\beta}}{2^\beta\,\Gamma(\beta+1)(t-\tau)^\beta}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot\sum_{k=0}^\infty\frac{x^{2k}}{2^{2k}(\beta+1)_k(t-\tau)^k}, \tag{10}$$

где $(\nu+1)_k$ — символ Похгаммера [3].

2. Используя интегральное представление модифицированной функции Бесселя [4], преобразуем соотношение (8) к виду

$$P(x,t-\tau)=\int\limits_0^\infty \xi^{1-\beta}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot\frac{\left(\dfrac{\xi\cdot x}{4(t-\tau)}\right)^\beta}{\Gamma\left(\beta+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}d\xi\times\times\int\limits_{-1}^1\left(1-\eta^2\right)^{\beta-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(\pm\frac{\xi\cdot x\cdot\eta}{2(t-\tau)}\right)\cdot d\eta=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\beta+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot 4^\beta}\cdot\frac{x^\beta}{(t-\tau)^\beta}\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^1\left(1-\eta^2\right)^{\beta-\frac{1}{2}}d\eta\int\limits_0^\infty\xi\cdot\exp\left(-\frac{1}{4(t-\tau)}\left(\xi^2\mp 2x\eta\xi\right)\right)\cdot d\xi=$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{x^{\beta}}{4^{\beta}(t-\tau)^{\beta}}\cdot\int_{-1}^{1}\left(1-\eta^{2}\right)^{\beta-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left[2(t-\tau)-\frac{x\eta}{2}\sqrt{4\pi(t-\tau)}\cdot\exp\left(\frac{x^{2}\eta^{2}}{4(t-\tau)}\right)\left\{1-\Phi\left(\frac{x\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\right\}\right]d\eta=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{x^{\beta}}{4^{\beta}(t-\tau)^{\beta}}\cdot\left[2(t-\tau)\cdot\int_{-1}^{1}\left(1-\eta^{2}\right)^{\beta-\frac{1}{2}}d\eta-\right.$$

$$\left.-x\sqrt{\pi(t-\tau)}\cdot\int_{-1}^{1}\eta\cdot(1-\eta^{2})^{\beta-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(\frac{x^{2}\eta^{2}}{4(t-\tau)}\right)\cdot\left\{1-\Phi\left(\frac{x\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\right\}d\eta\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{x^{\beta}}{4^{\beta}(t-\tau)^{\beta}}\cdot\left[2(t-\tau)\cdot A_{1}-x\sqrt{\pi(t-\tau)}\cdot A_{2}(x,t-\tau)\right],\qquad(11)$$

где

$$A_{1}=\int_{-1}^{1}\left(1-\eta^{2}\right)^{\beta-\frac{1}{2}}d\eta;$$

$$A_{2}(x,t-\tau)=\int_{-1}^{1}\eta\cdot\left(1-\eta^{2}\right)^{\beta-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(\frac{x^{2}\eta^{2}}{4(t-\tau)}\right)\cdot\left\{1-\Phi\left(\frac{x\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\right\}d\eta;$$

$$\Phi(z)=erf(z).$$

Найдем значение интеграла $A_{1}(x,t-\tau)$:

$$A_{1}=\int_{-1}^{1}\left(1-\eta^{2}\right)^{\beta-\frac{1}{2}}d\eta==B\left(\beta+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).\qquad(12)$$

Вычислим интеграл $A_{2}(x,t-\tau)$:

$$A_{2}(x,t-\tau)=\int_{-1}^{1}\eta\cdot\left(1-\eta^{2}\right)^{\beta-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(\frac{x^{2}\eta^{2}}{4(t-\tau)}\right)\cdot\left\{1-\Phi\left(\frac{x\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\right\}d\eta=$$

$$=\int_{-1}^{1}\eta\cdot\left(1-\eta^{2}\right)^{\beta-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(\frac{x^{2}\eta^{2}}{4(t-\tau)}\right)d\eta-\int_{-1}^{1}\eta\cdot\left(1-\eta^{2}\right)^{\beta-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(\frac{x^{2}\eta^{2}}{4(t-\tau)}\right)\cdot\Phi\left(\frac{x\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right)d\eta=$$

$$=-2\cdot\int_{0}^{1}\eta\cdot\left(1-\eta^{2}\right)^{\beta-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(\frac{x^{2}\eta^{2}}{4(t-\tau)}\right)\cdot\Phi\left(\frac{x\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right)d\eta=$$

$$=\mp\frac{x}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}B\left(\frac{3}{2},\beta+\frac{1}{2}\right)\cdot{}_{2}F_{2}\left(1,\frac{3}{2};\frac{3}{2},\beta+2;\frac{x^{2}}{4(t-\tau)}\right),\qquad(13)$$

где ${}_{p}F_{q}\left(a_{1},...,a_{p};b_{1},...b_{q};z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_{1}\right)_{k}\cdot...\cdot\left(a_{p}\right)_{k}}{\left(b_{1}\right)_{k}\cdot...\cdot\left(b_{p}\right)_{k}}\cdot\frac{z^{k}}{k!}$ — обобщенная гипергеометрическая функция.

Исходя из результатов (12), (13), получим представление (11) в виде

$$P(x,t-\tau)=\frac{1}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{x^{\beta}}{4^{\beta}(t-\tau)^{\beta}}\cdot\left[2(t-\tau)\cdot B\left(\beta+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\pm\right.$$

$$\left.\pm x\sqrt{\pi(t-\tau)}\cdot\frac{x}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot B\left(\frac{3}{2},\beta+\frac{1}{2}\right)\cdot{}_{2}F_{2}\left(1,\frac{3}{2};\frac{3}{2},\beta+2;\frac{x^{2}}{4(t-\tau)}\right)\right]=$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\left[B\left(\beta+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{x^{\beta}(t-\tau)^{1-\beta}}{2^{2\beta-1}}\pm\right.$$

$$\left.\pm B\left(\frac{3}{2},\beta+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{x^{\beta+2}}{2^{2\beta}(t-\tau)^{\beta}}\cdot{}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3}{2},\beta+2;\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\left[\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta+1)}\cdot\frac{x^{\beta}(t-\tau)^{1-\beta}}{2^{2\beta-1}}\pm\right.$$

$$\left.\pm\frac{x^{\beta+2}}{2^{2\beta}(t-\tau)^{\beta}}\cdot{}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3}{2},\beta+2;\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta+2)}\right]=$$

$$=\frac{x^{\beta}(t-\tau)^{1-\beta}}{2^{2\beta-1}\Gamma(\beta+1)}\pm\frac{x^{\beta+2}}{2^{2\beta=1}\Gamma(\beta+2)(t-\tau)^{\beta}}\cdot{}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3}{2},\beta+2;\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right),$$

то есть

$$P(x,t-\tau)=\frac{x^{\beta}(t-\tau)^{1-\beta}}{2^{2\beta-1}\Gamma(\beta+1)}\pm\frac{x^{\beta+2}}{2^{2\beta=1}\Gamma(\beta+2)(t-\tau)^{\beta}}\cdot{}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3}{2},\beta+2;\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right). \tag{14}$$

Подстановка (14) в (7) дает следующее выражение для функции $Q(x,t-\tau)$:

$$Q(x,t-\tau)=\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot\left[\frac{x^{2\beta}}{2^{2\beta}\Gamma(\beta+1)}\cdot\frac{1}{(t-\tau)^{\beta}}\pm\right.$$

$$\left.\pm\frac{x^{2\beta+2}}{2^{2\beta+2}\Gamma(\beta+2)}\cdot\frac{1}{(t-\tau)^{\beta+1}}\cdot{}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3}{2},\beta+2;\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\right], \tag{15}$$

где

$${}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3}{2},\beta+2;\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\beta+2)_k}\cdot\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)^k. \tag{16}$$

Из соотношения (15) с учетом (16) следует, что

$$Q(x,t-\tau)=\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot\left[\frac{x^{2\beta}}{2^{2\beta}\Gamma(\beta+1)}\cdot\frac{1}{(t-\tau)^{\beta}}\pm\right.$$

$$\left.\pm\frac{x^{2\beta+2}}{2^{2\beta+2}\Gamma(\beta+2)}\cdot\frac{1}{(t-\tau)^{\beta+1}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\beta+2)_k}\cdot\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)^k\right]. \tag{17}$$

3. Если для вычисления функции $P(x,t-\tau)$ использовать неполную гамма-функцию

$$\gamma(\nu,x)=\int_0^x t^{\nu-1}\cdot e^{-t}dt,$$

то найдем, что

$$P(x,t-\tau)=\left(\frac{1}{2(t-\tau)}\right)^{\beta-1}:\left(\frac{x}{2(t-\tau)}\right)^{\beta}\cdot\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\exp\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)^2}\cdot(t-\tau)\right)\times$$

$$\times\gamma\left(\beta,\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)=\frac{2(t-\tau)}{x^{\beta}\cdot\Gamma(\beta)}\cdot\exp\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot\gamma\left(\beta,\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right);$$

$$P(x,t-\tau)=\frac{2(t-\tau)}{x^{\beta}\cdot\Gamma(\beta)}\cdot\exp\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot\gamma\left(\beta,\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right). \tag{18}$$

Подставляя (18) в (7), вычислим $Q(x,t-\tau)$

$$Q(x,t-\tau)=\frac{x^\beta}{2(t-\tau)}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot P(x,t-\tau)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\gamma\left(\beta,\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\int_0^{\frac{x^2}{4(t-\tau)}}e^{-\xi}\cdot\xi^{\beta-1}d\xi;$$

$$Q(x,t-\tau)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\gamma\left(\beta,\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right).\qquad(19)$$

4. Через дополнительную неполную гамма-функцию

$$\Gamma(\nu,x)=\int_x^\infty t^{\nu-1}\cdot e^{-t}dt$$

функцию $Q(x,t-\tau)$ можно представить в виде

$$Q(x,t-\tau)=1-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\Gamma\left(\beta,\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right).$$

5. Учитывая свойства неполной гамма-функции [5], представление (19) преобразуем к виду

$$Q(x,t-\tau)=\frac{1}{\beta\cdot\Gamma(\beta)}\cdot\frac{x^2}{2^{2\beta}(t-\tau)^\beta}\cdot{}_1F_1\left(\beta;\beta+1;-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right),\qquad(20)$$

где

$${}_1F_1\left(\beta;\beta+1;-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)=\beta\cdot\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{(\beta+k)\cdot k!}\cdot\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)^k.\qquad(21)$$

Из (20) с учетом (21) приходим к следующему представлению функции $Q(x,t-\tau)$:

$$Q(x,t-\tau)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\frac{x^2}{2^{2\beta}(t-\tau)^\beta}\cdot\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{(\beta+k)\cdot k!}\cdot\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)^k.$$

6. Принимая во внимание, что

$$\gamma(\nu+1,x)=\nu\cdot\gamma(\nu,z)-z^\nu e^{-z},$$

получим для функции $Q(x,t-\tau)$ выражение в виде

$$Q(x,t-\tau)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\left[(\beta-1)\cdot\gamma\left(\beta-1,\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)-\left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta-2}(t-\tau)^{1-\beta}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\right].$$

Исследуем свойства функции $Q(x,t-\tau)$.

1) Функция $Q(x,t-\tau),\ 0<\tau<t<\infty,$ непрерывна.

2) Функция $Q(x,t-\tau)\ge 0,\ 0<\tau<t<\infty.$

3) Для функции $Q(x,t-\tau)$ справедлива оценка

$$Q(x,t-\tau)\le\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\cdot\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)^\beta.\qquad(22)$$

Действительно, из представления (19) для функции $Q(x,t-\tau)$ получим искомое соотношение

$$Q(x,t-\tau)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\gamma\left(\beta,\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\int_0^{\frac{x^2}{4(t-\tau)}}e^{-\xi}\cdot\xi^{\beta-1}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)^\beta\cdot\int_0^1\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}z\right)\cdot z^{\beta-1}dz\le$$

$$\le\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)^\beta\cdot\int_0^1 z^{\beta-1}dz=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)^\beta\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\cdot\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)^\beta.$$

Оценку, аналогичную (22), можно также найти иным путем, используя представление (10) для функции $Q(x,t-\tau)$ и учитывая, что

$$(\beta+1)_k < k!.$$

В результате получим

$$Q(x,t-\tau)=\left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)(t-\tau)^{\beta}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\beta+1)_k(t-\tau)^k}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}<$$

$$<\left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)(t-\tau)^{\beta}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)^{k}=$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)(t-\tau)^{\beta}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot\exp\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)=\left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)(t-\tau)^{\beta}};$$

$$Q(x,t-\tau)<\left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)(t-\tau)^{\beta}}.$$

Для функции $Q(x,t-\tau)$ имеет место неравенство

$$Q(x,t-\tau)<\frac{1}{\Gamma(\beta+1)(t-\tau)^{\beta}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\pm$$

$$\pm\frac{1}{\Gamma(\beta+2)(t-\tau)^{\beta+1}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta+2}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\pm\frac{1}{\Gamma(\beta+2)(t-\tau)^{\beta+2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta+4}. \qquad (23)$$

В самом деле, для представления (17) функции $Q(x,t-\tau)$ в виде

$$Q(x,t-\tau)=\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot\left[\frac{x^{2\beta}}{2^{2\beta}\Gamma(\beta+1)}\cdot\frac{1}{(t-\tau)^{\beta}}\pm\right.$$

$$\left.\pm\frac{x^{2\beta+2}}{2^{2\beta+2}\Gamma(\beta+2)}\cdot\frac{1}{(t-\tau)^{\beta+1}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\beta+2)_k}\cdot\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)^{k}\right]$$

имеем

$${}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3}{2},\beta+2;\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\beta+2)_k}\cdot\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)^{k}=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\beta+2)_k}\cdot\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)^{k}=1+\frac{x^2}{4(t-\tau)}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\beta+2)_k}\cdot\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)^{k-1}=$$

$$=1+\frac{x^2}{4(t-\tau)}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(\beta+2)_{m+1}}\cdot\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)^{m}.$$

Так как $(\beta+2)_{m+1}>m!$, то

$${}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3}{2},\beta+2;\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)=1+\frac{x^2}{4(t-\tau)}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(\beta+2)_{m+1}}\cdot\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)^{m}<$$

$$<1+\frac{x^2}{4(t-\tau)}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\cdot\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)^{m}=1+\frac{x^2}{4(t-\tau)}\cdot\exp\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right);$$

$${}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3}{2},\beta+2;\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)<1+\frac{x^2}{4(t-\tau)}\cdot\exp\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right). \qquad (24)$$

С учетом (24) получим из (17) для функции $Q(x,t-\tau)$ искомое неравенство (23)

$$Q(x,t-\tau)<\frac{1}{\Gamma(\beta+1)(t-\tau)^{\beta}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\pm$$

$$\pm\frac{1}{\Gamma(\beta+2)(t-\tau)^{\beta+1}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta+2}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\pm\frac{1}{\Gamma(\beta+2)(t-\tau)^{\beta+2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta+4}.$$

Функция $Q(x,t-\tau)$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$\int_0^t Q(x,t-\tau)d\tau=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\left[t\cdot\gamma\left(\beta,\frac{x^2}{4t}\right)+\frac{x^2}{4}\cdot\Gamma\left(\beta-1,\frac{x^2}{4t}\right)\right]. \tag{25}$$

Действительно, используя представление (19) для функции $Q(x,t-\tau),$ вычислим интеграл

$$\int_0^t Q(x,t-\tau)d\tau=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\int_0^t\gamma\left(\beta,\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot d\tau=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\int_0^t d\tau\int_0^{\frac{x^2}{4(t-\tau)}}e^{-\xi}\cdot\xi^{\beta-1}d\xi.$$

После замены в последнем соотношении порядка интегрирования приходим к искомому соотношению (25):

$$\int_0^t Q(x,t-\tau)d\tau=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\left[\int_0^{\frac{x^2}{4t}}e^{-\xi}\cdot\xi^{\beta-1}d\xi\int_0^t d\tau+\int_{\frac{x^2}{4t}}^{\infty}e^{-\xi}\cdot\xi^{\beta-1}d\xi\int_{t-\frac{x^2}{4\xi}}^{t}d\tau\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\left[\int_0^{\frac{x^2}{4t}}t\cdot e^{-\xi}\cdot\xi^{\beta-1}d\xi+\int_{\frac{x^2}{4t}}^{\infty}\frac{x^2}{4\xi}\cdot e^{-\xi}\cdot\xi^{\beta-1}d\xi\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\left[t\cdot\int_0^{\frac{x^2}{4t}}e^{-\xi}\cdot\xi^{\beta-1}d\xi+\frac{x^2}{4}\int_{\frac{x^2}{4t}}^{\infty}e^{-\xi}\cdot\xi^{\beta-2}d\xi\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\left[t\cdot\gamma\left(\beta,\frac{x^2}{4t}\right)+\frac{x^2}{4}\cdot\Gamma\left(\beta-1,\frac{x^2}{4t}\right)\right].$$

Для функции $Q(x,t-\tau)$ верно предельное отношение, определяемое выражением

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t Q(x,t-\tau)d\tau=0.$$

В самом деле, переходя к пределу при $t\to 0$ в (25), получим искомое соотношение:

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t Q(x,t-\tau)d\tau=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\left[t\cdot\gamma\left(\beta,\frac{x^2}{4t}\right)+\frac{x^2}{4}\cdot\Gamma\left(\beta-1,\frac{x^2}{4t}\right)\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[t\cdot\frac{\gamma\left(\beta,\frac{x^2}{4t}\right)}{\Gamma(\beta)}+\frac{x^2}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\beta-1,\frac{x^2}{4t}\right)}{\Gamma(\beta)}\right]=0.$$

Искомое соотношение для функции $Q(x,t-\tau)$ можно получить более простым путем. Для этого вычислим предел $\lim\limits_{t\to 0}\int_0^t Q(x,t-\tau)d\tau,$ используя оценку (22):

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t Q(x,t-\tau)d\tau\le\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta}\cdot\lim_{t\to 0}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\beta}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta}\cdot\frac{1}{1-\beta}\cdot\lim_{t\to 0}(t-\tau)^{1-\beta}\Big|_0^t=0,$$

то есть

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t Q(x,t-\tau)d\tau=0.$$

Заключение. Здесь представлены те интерпретации функции $Q(x, t-\tau)$ в общем виде, которые наиболее удобны в исследованиях и которые используются (например, при исследовании краевой задачи (1)–(3) при неподвижной точке нагрузки [2]), а также могут быть использованы при исследовании интегрального уравнения (5), а следовательно, и краевой задачи (1)–(3), при различных конкретно заданных значениях параметров и конкретно заданном законе движения $x = \bar{x}(t)$ точки нагрузки.

Список литературы

1 *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. — Алматы: Ғылым, 2010. — 335 с.

2 *Есбаев А.Н., Есенбаева Г.А.* Об одной граничной задаче для нагруженного дифференциального оператора теплопроводности при неподвижной точке нагрузки // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2013. — № 2 (70).

3 *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. — Т. 2. — Специальные функции. — М.: Физматлит, 2003. — 664 с.

4 *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. — 1108 с.

5 *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. — Т. 3. — Специальные функции. Дополнительные главы. — М.: Физматлит, 2003. — 688 с.

А.Н.Есбаев, Г.А.Есенбаева, М.Ы.Рамазанов

Жүктелген дифференциалдық жылуөткізгіштік операторы үшін бір шектік есепті зерттеу

Мақалада жүктелген дифференциалдық жылуөткізгіштік операторы үшін шенелмеген облыста бір шектік есептің қойылуы анықталған. Берілген шектік есеп жалпы түрде екінші ретті Вольтерра интегралдық теңдеуіне келтірілген. Функцияның әр түрлі мағыналары келтірілген интегралдық теңдеулердің өзегін анықтайтындай алынды. Өзектің функциясын сипаттайтын қасиеттері зерттелген. Барлық нәтижелері жалпы түрде берілген.

A.N.Yesbayev, G.A.Yessenbayeva, M.I.Ramazanov

The research of one boundary value problem for the loaded differential operator of heat conduction

In this article the determination of one boundary value problem for the given loaded differential operator of heat conduction in the unlimited domain is defined. The given boundary value problem is reduced to the integral equation of Volterra of the second kind. The difference presentations of the function defining the kernel of the integral equation are calculated. The properties of this kernel function are investigated. All results are obtained in general form.

References

1 Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I. *The loaded equations as indignations of differential equations*, Almaty: Gylym, 2010, 335 p.

2 Yesbayev A.N., Yessenbayeva G.A. *About one boundary value problem for the loaded differential operator of heat conduction with the stationary point of load* // Bull. KarSU. Mathematics ser. // *Vestnik Karagandinskogo universiteta, Seriya Matematika*, Karaganda, 2013, No. 2 (70).

3 Prudnikov A.P., Brychrov Y.A., Marechev O.I. *Integrals and rows*, vol. 2, Special functions, Moscow: Fizmatlit, 2003, 664 p.

4 Gradshtein I.S., Rygyk I.M. *Tables of integrals, sums, rows and products*, Moskow: Fizmatgiz, 1963, 1108 p.

5 Prudnikov A.P., Brychrov Y.A., Marechev O.I. *Integrals and rows*, vol. 3, Special functions. Supplementary chapters, Moskow: Fizmatlit, 2003, 688 p.