

М.А.Асылбеков, Б.Т.Горобек, Б.Х.Турметов

Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан (E-mail: mara_assyl@inbox.ru)

Некоторые свойства и применения модифицированного интегро-дифференциального оператора Римана-Лиувилля в классе гармонических функций

В классе гармонических функций изучены некоторые свойства модифицированных интегро-дифференциальных операторов дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля. Рассматриваемые операторы обобщают интегро-дифференциальные операторы Баврина. В качестве применения полученных свойств рассмотрены вопросы разрешимости некоторых краевых задач для уравнения Лапласа в шаре и в полукруге.

Ключевые слова: оператор Баврина, оператор Римана-Лиувилля, гармоническая функция, уравнения Лапласа, задача Дирихле.

1. Введение

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ — единичный шар, $n \geq 2$, $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ — единичная сфера.

Пусть далее $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω , $r = |x|$, $\theta = \frac{x}{|x|}$ и μ —

положительное действительное число.

В работе [1] в классе гармонических в шаре функций изучались свойства операторов вида

$$\delta_{\mu}[u](x) = \left(r \frac{\partial}{\partial r} + \mu \right) u(x);$$

$$\delta_{\mu}^{-1}[u](x) = \int_0^1 t^{\mu-1} u(tx) dt;$$

$$\delta_{\mu}^m[u](x) = \delta_{\mu}[\delta_{\mu} \dots \delta_{\mu}[u] \dots](x);$$

$$\delta_{\mu}^{-m}[u](x) = \delta_{\mu}^{-1}[\delta_{\mu}^{-1} \dots \delta_{\mu}^{-1}[u] \dots](x),$$

где $r \frac{\partial}{\partial r} = \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Основными свойствами операторов δ_{μ}^m и δ_{μ}^{-m} являются следующие утверждения [1].

Лемма 1. Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω . Тогда функции $\delta_{\mu}^m[u](x)$ и $\delta_{\mu}^{-m}[u](x)$ также являются гармоническими в шаре Ω .

Лемма 2. Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω . Тогда для любого $x \in \Omega$ справедливы равенства

$$\delta_{\mu}^{-m}[\delta_{\mu}^m[u]](x) = \delta_{\mu}^m[\delta_{\mu}^{-m}[u]](x) = u(x).$$

Таким образом, в классе гармонических функций в шаре Ω операторы $\delta_{\mu}^m[u](x)$ и $\delta_{\mu}^{-m}[u](x)$ являются взаимно обратными.

В настоящей работе мы построим дробные аналоги операторов δ_{μ}^{-m} , δ_{μ}^m и покажем, что результаты работы [1] верны и для общего случая. Пусть $\alpha > 0$. Следующие операторы:

$$I^{\alpha}[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-\tau)^{\alpha-1} u(\tau\theta) d\tau;$$

$$D^\alpha [u](x) = \frac{d}{dr} I^{1-\alpha} [u](x), 0 < \alpha \leq 1,$$

называются операторами интегрирования и дифференцирования порядка $\alpha > 0$ в смысле Римана–Лиувилля [2]. Так как $I^\alpha [u](x) \rightarrow u(x)$ почти всюду при $\alpha \rightarrow 0$ [2], то можно предположить, что

$$I^0 [u](x) = u(x). \text{ Тогда } D^1 [u](x) = \frac{du}{dr}(x).$$

Пусть $0 < \alpha \leq 1, \mu > 0$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} B_\mu^\alpha [u](x) &= r^{\alpha-\mu} D^\alpha [r^\mu u](x); \\ B_\mu^{-\alpha} [u](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\mu-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} u(tx) dt; \\ B_\mu^{\alpha,m} [u](x) &= \underbrace{B_\mu^\alpha [B_\mu^\alpha \dots [B_\mu^\alpha [u]] \dots]}_m(x); \\ B_\mu^{-\alpha,m} [u](x) &= \underbrace{B_\mu^{-\alpha} [B_\mu^{-\alpha} \dots [B_\mu^{-\alpha} [u]] \dots]}_m(x). \end{aligned}$$

Замечание 1. Если $\alpha = 1$, то

$$\begin{aligned} B_\mu^1 [u](x) &= r^{1-\mu} \frac{d}{dr} [r^\mu u](x) = \left(r \frac{d}{dr} + \mu \right) u(x) \equiv \delta_\mu [u](x); \\ B_\mu^{-1} [u](x) &= \int_0^1 t^{\mu-1} u(tx) dt \equiv \delta_\mu^{-1} [u](x). \end{aligned}$$

Следовательно, в случае $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} B_\mu^{1,m} [u](x) &= \delta_\mu^m [u](x); \\ B_\mu^{-1,m} [u](x) &= \delta_\mu^{-m} [u](x). \end{aligned}$$

Легко показать, что при $\alpha, \beta \in (0, 1], \mu, \nu > 0$ операторы $B_\mu^\alpha, B_\nu^\beta$ коммутируют. Действительно, поскольку верны равенства

$$\begin{aligned} B_\mu^\alpha [u](x) &= \frac{r^{\alpha-\mu}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \tau^\mu u(\tau\theta) d\tau \Big|_{\tau=rs} = \\ &= \frac{r^{\alpha-\mu}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} r^{\mu-\alpha+1} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^\mu u(sx) ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^\mu \left(r \frac{d}{dr} + 1 + \mu - \alpha \right) u(sx) ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^\mu \delta_{1+\mu-\alpha} [u](sx) ds \end{aligned}$$

и операторы $\delta_{1+\mu-\alpha}$ и $\delta_{1+\nu-\beta}$ коммутируют, имеем

$$\begin{aligned} B_\mu^\alpha [B_\nu^\beta [u]](x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^\mu \delta_{1+\mu-\alpha} [B_\nu^\beta [u]](sx) ds = \\ &= \int_0^1 \frac{(1-s)^{-\alpha} s^\mu}{\Gamma(1-\alpha)} \delta_{1+\mu-\alpha} \int_0^1 \frac{(1-t)^{-\beta} t^\nu}{\Gamma(1-\beta)} \delta_{1+\nu-\beta} [u](stx) dt ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \frac{(1-s)^{-\alpha} s^\mu}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{(1-t)^{-\alpha} t^\nu}{\Gamma(1-\beta)} \delta_{1+\mu-\alpha} [\delta_{1+\nu-\beta} [u]](stx) dt ds = \\ &= \int_0^1 \frac{(1-t)^{-\alpha} t^\nu}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^1 \frac{(1-s)^{-\alpha} s^\mu}{\Gamma(1-\alpha)} \delta_{1+\nu-\beta} [\delta_{1+\mu-\alpha} [u]](stx) ds dt = \\ &= \int_0^1 \frac{(1-t)^{-\beta} t^\nu}{\Gamma(1-\beta)} \delta_{1+\nu-\beta} \int_0^1 \frac{(1-s)^{-\alpha} s^\mu}{\Gamma(1-\alpha)} \delta_{1+\mu-\alpha} [u](stx) ds dt = B_\nu^\beta [B_\mu^\alpha [u]](x). \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что и операторы $B_\mu^{-\alpha}$, $B_\nu^{-\beta}$ коммутируют:

$$\begin{aligned} B_\mu^{-\alpha} [B_\nu^{-\beta} [u]](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\mu-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} B_\nu^{-\beta} [u](tx) dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\mu-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} \int_0^1 s^{\nu-\beta} (1-s)^{\beta-1} u(tsx) ds dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 s^{\nu-\beta} (1-s)^{\beta-1} \int_0^1 t^{\mu-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} u(tsx) dt ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 s^{\nu-\beta} (1-s)^{\beta-1} B_\mu^{-\alpha} [u](sx) ds = B_\nu^{-\beta} [B_\mu^{-\alpha} [u]](sx). \end{aligned}$$

2. Свойства операторов $B_\mu^{\alpha,m}$ и $B_\mu^{-\alpha,m}$

В этом пункте исследуем некоторые свойства операторов $B_\mu^{\alpha,m}$ и $B_\mu^{-\alpha,m}$. Докажем, что утверждения леммы 1 и 2 остаются верными и для этих операторов. Отметим, что в случае $0 < \alpha < 1$, $\mu = 0$, свойства операторов $B_0^{\alpha,m}$ и $B_0^{-\alpha,m}$ изучены в работах [3, 4].

Пусть $0 < \alpha \leq 1$, $\mu > 0$. Введем обозначения

$$\gamma_{\mu,\alpha,k} = \frac{\Gamma(k + \mu - \alpha + 1)}{\Gamma(k + \mu + 1)}, \quad \gamma_{\mu,\alpha,k}^m = (\gamma_{\mu,\alpha,k})^m.$$

Лемма 3. Пусть $0 < \alpha \leq 1$, $\mu > 0$ и $H_k(x)$ — однородный гармонический полином степени k , при $k \in N_0 = \{0, 1, \dots\}$. Тогда справедливы равенства

$$B_\mu^\alpha [H_k](x) = \gamma_{\mu,\alpha,k} H_k(x), \quad k \in N_0; \tag{1}$$

$$B_\mu^{-\alpha} [H_k](x) = \gamma_{\mu,\alpha,k}^{-1} H_k(x), \quad k \in N_0. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $H_k(x)$ — однородный гармонический полином степени k и $k \in N_0$. Тогда, используя связь гамма- и бета-функций Эйлера

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

и в соответствии с определением оператора B_μ^α , имеем

$$\begin{aligned} B_\mu^\alpha [H_k](x) &= \frac{r^{\alpha-\mu}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \tau^\mu H_k(\tau\theta) d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} r^{\alpha-\mu} H_k(\theta) \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \tau^{k+\mu} d\tau = \\ &= r^{\alpha-\mu} H_k(\theta) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \left\{ r^{k+1-\alpha+\mu} \int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} \xi^{k+\mu} d\xi \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= r^{\alpha-\mu} H_k(\theta) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k+\mu+1)}{\Gamma(k+\mu-\alpha+2)} \frac{d}{dr} r^{k+1-\alpha+\mu} = \\
 &= r^k H_k(\theta) \frac{\Gamma(k+\mu+1)}{\Gamma(k+\mu-\alpha+2)} (k+\mu-\alpha+2) = \\
 &= \frac{\Gamma(k+\mu+1)}{\Gamma(k+\mu-\alpha+1)} H_k(x) = \gamma_{\mu,\alpha,k} H_k(x).
 \end{aligned}$$

Докажем второе равенство леммы. Оператор $B_\mu^{-\alpha}$ определен для всех случаев $k \in N_0$, и поэтому, используя определение оператора $B_\mu^{-\alpha}$, имеем

$$\begin{aligned}
 B_\mu^{-\alpha} [H_k](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\mu-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} H_k(tx) dt = \frac{H_k(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{k+\mu-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} dt = \\
 &= \frac{H_k(x)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+\mu-\alpha+1)}{\Gamma(k+\mu+1)} = \frac{\Gamma(k+\mu-\alpha+1)}{\Gamma(k+\mu+1)} H_k(x) = \gamma_{\mu,\alpha,k}^{-1} H_k(x).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть $0 < \alpha \leq 1$, $\mu > 0$ и $H_k(x)$ — однородный гармонический полином степени $k \in N_0$. Тогда справедливы равенства

$$B_\mu^{\alpha,m} [H_k](x) = \gamma_{\mu,\alpha,k}^m H_k(x); \tag{3}$$

$$B_\mu^{-\alpha,m} [H_k](x) = \frac{1}{\gamma_{\mu,\alpha,k}^m} H_k(x). \tag{4}$$

Следствие доказывается последовательным применением леммы 3.

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha \leq 1$, $\mu > 0$ и $u(x)$ — гармоническая в шаре Ω функция. Тогда функции $B_\mu^{\alpha,m}[u](x)$, $B_\mu^{-\alpha,m}[u](x)$ также являются гармоническими в области Ω .

Доказательство. Так как $u(x)$ — гармоническая функция в шаре Ω , то она разлагается при $|x| \leq \rho < 1$ в ряд вида [5]

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x), \tag{5}$$

где $\{H_k^{(i)}(x), i = 1, \dots, h_k\}$ — полная система однородных гармонических полиномов степени k , а $u_k^{(i)}$ — коэффициенты разложения (5). Применяя формально оператор $B_\mu^{\alpha,m}$ к ряду (5) и учитывая равенство (3), получим

$$B_\mu^{\alpha,m}[u](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{\mu,\alpha,k}^m u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x). \tag{6}$$

Далее из асимптотической оценки гамма-функций легко показать, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\gamma_{\mu,\alpha,k}^m} = 1$. Тогда радиус сходимости ряда (6) совпадает с радиусом сходимости ряда (5), и поэтому его сумма представляет собой гармоническую в Ω функцию.

Аналогично, используя формулу (4) легко доказать гармоничность функции $B_\mu^{-\alpha,m}[u](x)$.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $0 < \alpha \leq 1$, $\mu > 0$ и $u(x)$ — гармоническая функция в шаре Ω . Тогда для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} B_\mu^\alpha[u](tx) dt. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $0 < \alpha \leq 1, \mu > 0$. Докажем равенство (7). Представим гармоническую в шаре Ω функцию $u(x)$ в виде ряда (5) и преобразуем его следующим образом:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \frac{\Gamma(k + \mu - \alpha + 1)}{\Gamma(k + \mu + 1)} \frac{\Gamma(k + \mu + 1)}{\Gamma(k + \mu - \alpha + 1)} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x). \quad (8)$$

Далее, учитывая равенства (1), (2) и равномерную сходимость ряда (8) по x при $|x| \leq \rho < 1$, получаем

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \frac{\Gamma(k + \mu_j - \alpha_j + 1)}{\Gamma(k + \mu_j + 1)} \frac{\Gamma(k + \mu_j + 1)}{\Gamma(k + \mu_j - \alpha_j + 1)} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} \frac{\Gamma(k + \mu + 1)}{\Gamma(k + \mu - \alpha + 1)} H_k^{(i)}(tx) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \frac{u_k^{(i)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} B_{\mu}^{\alpha} [H_k^{(i)}](tx) dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} B_{\mu}^{\alpha} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} H_k^{(i)} \right] (tx) dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} B_{\mu}^{\alpha} [u](tx) dt. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $0 < \alpha \leq 1, \mu > 0$ и $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω . Тогда для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma^m(\alpha)} \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} B_{\mu}^{\alpha,m} [u](tx) dt_m, \quad (9)$$

где обозначено $(1-t)^{\alpha-1} = (1-t_1)^{\alpha-1} \cdots (1-t_m)^{\alpha-1}$, $t^{\mu-\alpha} = t_1^{\mu-\alpha} \cdots t_m^{\mu-\alpha}$, $tx = (t_1 \dots t_m x)$.

Теорема 4. Пусть $0 < \alpha \leq 1, \mu > 0$ и $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω . Тогда для любого $x \in \Omega$ справедливы равенства

$$B_{\mu}^{-\alpha,m} [B_{\mu}^{\alpha,m} [u]](x) = B_{\mu}^{\alpha,m} [B_{\mu}^{-\alpha,m} [u]](x) = u(x). \quad (10)$$

Доказательство. Применим к функции $B_{\mu}^{\alpha,m} [u](x)$ оператор $B_{\mu}^{-\alpha,m}$. По определению оператора $B_{\mu}^{-\alpha,m}$ имеем

$$B_{\mu}^{-\alpha,m} [B_{\mu}^{\alpha,m} [u]](x) = \frac{1}{\Gamma^m(\alpha)} \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} B_{\mu}^{\alpha,m} [u](tx) dt_m.$$

В силу равенства (9) последнее выражение равно $u(x)$. Следовательно, первое равенство из (10) доказано. Для доказательства второго равенства из (10) применим оператор B_{μ}^{α} к функции $B_{\mu}^{-\alpha,m} [u](x)$. Тогда

$$\begin{aligned} B_{\mu}^{\alpha} [B_{\mu}^{-\alpha,m} [u]](x) &= \frac{1}{\Gamma^m(\alpha)} B_{\mu}^{\alpha} \left[\int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} u(tx) dt_m \right] = \\ &= \frac{r^{\alpha-\mu}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma^m(\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \tau^{\mu} \left[\int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} u(t\tau\theta) dt_m \right] d\tau = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Gamma^m(\alpha)} \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} \frac{r^{\alpha-\mu}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \tau^\mu u(t\tau\theta) d\tau dt_m.$$

Далее нетрудно убедиться в следующих равенствах:

$$\begin{aligned} \frac{r^{\alpha-\mu}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \tau^\mu u(t\tau\theta) d\tau &= \frac{r^{\alpha-\mu}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r \left(r-\frac{s}{t}\right)^{-\alpha} \left(\frac{s}{t}\right)^\mu u(s\theta) \frac{ds}{t} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} r^{\alpha-\mu} t^{\alpha-\mu-1} \frac{d}{dr} \int_0^{tr} (tr-s)^{-\alpha} s^\mu u(s\theta) ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (tr)^{\alpha-\mu} \frac{d}{d(tr)} \int_0^{tr} (tr-s)^{-\alpha} s^\mu u(s\theta) ds = B_\mu^\alpha[u](tx), \end{aligned}$$

где учтено, что $\theta = \frac{x}{|x|} = \frac{tx}{|tx|}$. Поэтому будем иметь

$$B_\mu^\alpha [B_\mu^{\alpha,m}[u]](x) = \frac{1}{\Gamma^m(\alpha)} \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} B_\mu^\alpha [u](tx) dt_m.$$

Следовательно, вспоминая определение оператора $B_\mu^{\alpha,m}$, можно записать

$$B_\mu^{\alpha,m} [B_\mu^{-\alpha,m}[u]](x) = \frac{1}{\Gamma^m(\alpha)} \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} B_\mu^{\alpha,m} [u](tx) dt_m = u(x).$$

Равенства (10) доказаны.

Теорема доказана.

Таким образом, из утверждения теоремы 4 следует, что операторы $B_\mu^{\alpha,m}$ и $B_\mu^{-\alpha,m}$ являются взаимно обратными в классе гармонических функций в шаре Ω .

3. Постановка и решение задачи в шаре

Пусть $0 < \alpha \leq 1$, $\mu > 0$. Рассмотрим следующую задачу.

Задача А. Найти гармоническую в шаре Ω функцию $u(x)$, для которой функция $B_\mu^{\alpha,m}[u](x)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяет на сфере $\partial\Omega$ равенству

$$B_\mu^{\alpha,m}[u](x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Заметим, что аналогичные задачи с операторами целого порядка рассматривались в работах [1, 6–9], а для операторов дробного порядка с производными Римана-Лиувилля и Капуто — в работах [3, 4, 10–16], с производными типа Адамара-Маршо — в [17].

Пусть $v(x)$ — классическое решение задачи Дирихле в шаре Ω :

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0, & x \in \Omega \\ v(x) = f(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (11)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема А. Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда решение задачи А существует, единственно и представляется в виде

$$u(x) = B_\mu^{-\alpha,m}[v](x), \quad (12)$$

где $v(x)$ — решение задачи (11).

Замечание 2. Из утверждений теоремы А следует, что задача А представляет собой аналог задач Дирихле и Робена для уравнения Лапласа.

Доказательство теоремы А. Пусть решение задачи А существует и это $u(x)$. Применим к функции $u(x)$ оператор $B_\mu^{\alpha,m}$ и обозначим $B_\mu^{\alpha,m}[u](x) = v(x)$. Так как $B_\mu^{\alpha,m}[u](x) \in C(\bar{\Omega})$, то

$v(x) \in C(\overline{\Omega})$. Далее поскольку $u(x)$ — гармоническая функция в Ω , то, в силу утверждения теоремы 1, функция $v(x)$ тоже гармоническая в шаре Ω и

$$v(x)|_{\partial\Omega} = B_{\mu}^{\alpha,m}[u](x)|_{\partial\Omega} = f(x).$$

Таким образом, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (11). Причем если $f(x) \in C(\partial\Omega)$, то решение этой задачи существует, единственно и $v(x) \in C(\overline{\Omega})$. Применим к равенству $B_{\mu}^{\alpha,m}[u](x) = v(x)$ оператор $B_{\mu}^{-\alpha,m}$. Поскольку интегралы вида

$$\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\mu-\alpha} v(\tau x) d\tau$$

при $\alpha \in (0,1]$, $\mu > 0$, $\mu - \alpha \neq 0$ имеют слабые особенности при $\tau = 0$ и $\tau = 1$, то такие функции являются непрерывными по $x \in \overline{\Omega}$ при непрерывной функции $v(x) \in C(\overline{\Omega})$. Значит, оператор $B_{\mu}^{-\alpha,m}$ применим к функциям из $C(\overline{\Omega})$. В силу первого равенства из (10) получим равенство (12), т.е.

$$B_{\mu}^{-\alpha,m}[v](x) = B_{\mu}^{-\alpha,m}[B_{\mu}^{\alpha,m}[u]](x) = u(x).$$

Пусть, наоборот, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (11) при $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Ясно, что $v(x) \in C(\overline{\Omega})$. Рассмотрим функцию $u(x) = B_{\mu}^{-\alpha,m}[v](x)$. В силу второго равенства из (10) будем иметь

$$B_{\mu}^{\alpha,m}[u](x) = B_{\mu}^{\alpha,m}[B_{\mu}^{-\alpha,m}[v]](x) = v(x).$$

Значит, функция $u(x)$ гармоническая в Ω и

$$B_{\mu}^{\alpha,m}[u](x)|_{\partial\Omega} = v(x)|_{\partial\Omega} = f(x).$$

Теорема доказана.

4. Постановка и решение краевой задачи в полукруге

Пусть $n = 2$, $(x, y) \in R^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$. Обозначим $\Omega_+ = \Omega \cap \{y > 0\}$ — верхний полукруг, $\partial\Omega_+ = \partial\Omega \cap \{y > 0\}$ — полуокружность, $I = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, y = 0\}$ — диаметр круга.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача В. Найти функцию $u(r, \varphi)$, гармоническую в полукруге Ω_+ , для которой функция $B_{\mu}^{\alpha,m}[u](r, \varphi)$ непрерывна в $\overline{\Omega}_+ = \Omega_+ \cup \partial\Omega_+ \cup I$ и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} B_{\mu}^{\alpha,m}[u](r, \varphi)|_{\partial\Omega_+} &= g(\varphi), \quad \varphi \in \partial\Omega_+; \\ u(r, \varphi)|_I &= 0, \quad (r, \varphi) \in I. \end{aligned}$$

Отметим, что различные краевые задачи в полукруге в случае $\alpha = 1$, $\mu = 0$ исследовались в работах [18, 19], а с граничными операторами Адамара-Маршо — в работе [20].

Справедливы следующие утверждения.

Теорема В. Пусть $g(\varphi) \in C(\partial\Omega_+)$ и выполняются условия $g(0) = 0$; $g(\pi) = 0$. Тогда решение задачи В существует, единственно и представляется в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\Gamma^m(\alpha)} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} v(rt, \varphi) dt_m, \quad (13)$$

где функция $v(r, \varphi)$ определяется равенством

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{1-r^2}{1-2r \cos(\varphi-\theta) + r^2} - \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\varphi+\theta) + r^2} \right] g(\theta) d\theta. \quad (14)$$

Доказательство теоремы В. Предположим, что решение задачи В существует. Обозначим его через $u(r, \varphi)$. Применим к функции $u(r, \varphi)$ оператор $B_{\mu}^{\alpha, m}$ и обозначим $B_{\mu}^{\alpha, m}[u](r, \varphi) = v(r, \varphi)$. По предположению функция $B_{\mu}^{\alpha, m}[u](r, \varphi)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{\Omega}_+$. Тогда функция $v(r, \varphi)$ также непрерывна в $\bar{\Omega}_+$. Далее, по утверждению теоремы 1, функция $v(r, \varphi) = B_{\mu}^{\alpha, m}[u](r, \varphi)$ является гармонической в Ω_+ . В силу граничного условия задачи В имеем

$$B_{\mu}^{\alpha, m}[u](1, \varphi) = v(1, \varphi) = g(\varphi).$$

По условию задачи $u(r, 0) = 0$, и если $s \in [0, 1]$ и $r \leq 1$, то $sr \leq 1$. Следовательно, $u(sr, 0) = 0$. Тогда $B_{\mu}^{\alpha, m}[u](r, \varphi)|_I = 0$, и поэтому

$$v(r, \varphi)|_I = B_{\mu}^{\alpha, m}[u](r, \varphi)|_I = 0.$$

Таким образом, функция $v(r, \varphi)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta v(r, \varphi) = 0, & (r, \varphi) \in \Omega_+ \\ v(1, \varphi) = g(\varphi), & \varphi \in \partial\Omega_+ \\ v(r, \varphi) = 0, & (r, \varphi) \in I \end{cases} \quad (15)$$

В условиях теоремы В решение задачи (15) существует и представляется в виде (14) [21]. Далее, по утверждению теорем 3 и 4, функцию $u(r, \varphi)$ можно представить в виде (9) и (10). А так как $B_{\mu}^{\alpha, m}[u](r, \varphi) = v(r, \varphi)$ и рассматриваемые функции непрерывны, то формулы (9) и (10) можно записать в виде (13). Выполнение условий задачи В проверяется непосредственно. Действительно, если $v(r, \varphi)$ является решением задачи (15), то, применяя к функции (13) оператор $B_{\mu}^{\alpha, m}$, получаем:

$$B_{\mu}^{\alpha, m}[u](1, \varphi) = v(1, \varphi) = f(\varphi)$$

и

$$B_{\mu}^{\alpha, m}[u](r, \varphi)|_I = v(r, \varphi)|_I = 0.$$

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК (проект 0830/ГФ2).

Список литературы

- 1 Баврин И.И. Операторы для гармонических функций и их приложения // Дифференциальные уравнения. — 1985. — Т. 21. — № 1. — С. 9–15.
- 2 Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier // North-Holland. — Mathematics studies. — 2006. — 539 p.
- 3 Карачик В.В., Турметов Б.Х., Торбек Б.Т. О некоторых интегро-дифференциальных операторах в классе гармонических функций и их применении // Мат. труды. — 2011. — № 1. — Т. 14. — С. 99–125.
- 4 Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On solvability of a boundary value problem for the Poisson equation with the boundary operator of a fractional order // Boundary Value Problems. — Vol. 2013. — Issue 93. — 2013. — 18 p.
- 5 Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974. — 333 с.
- 6 Баврин И.И. Интегро-дифференциальные операторы для гармонических функций в выпуклых областях и их приложения // Дифференциальные уравнения. — 1988. — Т. 24. — № 9. — С. 1629–1631.
- 7 Карачик В.В., Турметов Б.Х. Об одной задаче для гармонического уравнения // Изв. АН УзССР. Сер. Физ.-мат. наук. — 1990. — № 4. — С. 17–21.
- 8 Соколовский В.Б. Об одном обобщении задачи Неймана // Дифференциальные уравнения. — 1988. — Т. 24. — № 4. — С. 714–716.
- 9 Бицадзе А.В. К задаче Неймана для гармонических функций // Докл. АН СССР. — 1990. — Т. 311. — № 1. — С. 11–13.
- 10 Турметов Б.Х. Об одной краевой задаче для гармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. — Минск, 1996. — Т. 32. — № 8. — С. 1089–1092.

- 11 Турметов Б.Х. О гладкости решения одной краевой задачи с граничным оператором дробного порядка // Мат. труды. — 2004. — Т. 7. — № 1. — С. 189–199.
- 12 Турметов Б.Х., Торебек Б.Т. О разрешимости аналога третьей краевой задачи с граничным оператором дробного порядка // Журн. Средневолж. мат. о-ва. — 2010. — Т. 12. — № 3. — С. 135–144.
- 13 Торебек Б.Т. Об одном аналоге третьей краевой задачи для уравнения Лапласа с граничным оператором дробного порядка в смысле Капуто // Докл. Адыгейской (Черкесской) Междунар. АН. — 2011. — Т. 13. — № 2. — С. 62–68.
- 14 Торебек Б.Т. О гладкости решения некоторых краевых задач с граничными операторами дробного порядка в классах Никольского // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2010. — № 4 (60). — С. 103–108.
- 15 Торебек Б.Т. О разрешимости одной нелокальной задачи для уравнения Лапласа с граничным оператором дробного порядка в смысле Капуто // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2012. — № 1 (65). — С. 76–81.
- 16 Торебек Б.Т., Турметов Б.Х. К вопросу разрешимости некоторых обратных задач для уравнения Лапласа с граничным оператором Римана-Лиувилля // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2013. — № 1 (69). — С. 113–121.
- 17 Бердышев А.С., Турметов А.С., Кадиркулов Б.Ж. Некоторые свойства и применения интегро-дифференциальных операторов типа Адамара-Маршу в классе гармонических функций // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т. 53. — № 4. — С. 752–764.
- 18 Моисеев Е.И., Амбарцумян В.Э. О разрешимости нелокальной краевой задачи с равенством потоков на части границы и сопряженной к ней задачи // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46. — № 5. — С. 718–725.
- 19 Моисеев Е.И., Амбарцумян В.Э. О разрешимости нелокальной краевой задачи с противоположными потоками на части границы и сопряженной к ней задачи // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46. — № 6. — С. 883–886.
- 20 Бердышев А.С., Турметов Б.Х. О разрешимости некоторых краевых задач для уравнения Лапласа в полукруге // Вестн. КазНПУ им. Абая. — 2013. — № 2 (41). — С. 21–25.
- 21 Бицадзе А.В., Калинин Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1977. — С. 131.

М.А.Асылбеков, Б.Т.Торебек, Б.К.Турметов

Гармониялық функциялар класында Риман-Лиувилль интегро-дифференциалдау операторы модификациясының кейбір қасиеттері және қолданылулары

Мақалада гармониялық функциялар класында Риман-Лиувилль мағынасындағы бөлшек ретті интегро-дифференциалдау операторы модификациясының кейбір қасиеттері зерттелген. Бұл операторлар Баврин интегро-дифференциалдау операторларының жалпыламасы болып табылды. Зерттелген қасиеттердің қолданылуы ретінде Лаплас тендеуі үшін шарда және жарты дөңгелекте кейбір шеттік есептердің шешілімділігі мәселелері қарастырылған.

M.A.Assylbekov, B.T.Torebek, B.Kh.Turmetov

Some properties and applications of the modified integral-differential operator of Riemann-Liouville in the class of harmonic functions

In this paper, in the class of harmonic functions we have studied some properties of the modified integro-differential operators of fractional order in the Riemann-Liouville. The operators in question generalize integro-differential operators of the Bavrin. As an application of the properties some of the solvability of boundary value problems for the Laplace equation in a ball and in a semicircle are considered.

References

- 1 Bavrin I.I. *Operators for harmonic functions and their applications* // Differential Equations, 1985, vol. 21, No. 1, p. 6–10.
- 2 Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, North-Holland, Mathematics studies, 2006, 539 p.
- 3 Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. *On some integro-differential operators in the class of harmonic functions and their applications* // Matematicheskie Trudy, 2011, No. 1, vol. 14, p. 99–125. (In Russian). English transl.: // Siberian Advances in Mathematics, Allerton Press, 2012, vol. 22, No. 2, p. 115–134.
- 4 Torebek B.T., Turmetov B.Kh. *On solvability of a boundary value problem for the Poisson equation with the boundary operator of a fractional order* // Boundary Value Problems, 2013, vol. 2013, Issue 93, 18 p.
- 5 Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Moscow: Mir, 1974, 333 p. (In Russian).
- 6 Bavrin I.I. *Integro-differential operators for harmonic functions in convex domains and their applications* // Differential'nye Uravneniya, 1988, vol. 24, No. 9, p. 1629–1631.
- 7 Karachik V.V., Turmetov B.Kh. *On a problem for the harmonic equation* // Izvestiya AN UzSSR. Ser. Fiz.-Mat.Nauki, 1990, No. 4, p. 17–21.