3. http://www.oforex.info/proximate.php.
4. http://www.trader-lib.ru/books/473/2.html.
5. MetaQuotes Software Corp. Руководство пользователя MetaTrader 4. — 2008.
6. *Царихин К.С.* Фундаментальный анализ. — М., 2005. — 42 с.
7. *Эрлих А.* Технический анализ товарных и финансовых рынков: Приклад. пособие. — 2-е изд. — М.: ИНФРА-М, 1996. — 176 с.

УДК 510.67

А.Р.Ешкеев, Г.С.Бегетаева

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

СТАБИЛЬНОСТЬ Δ–*PM*-ТЕОРИИ И ЕЁ ЦЕНТРА

Мақалада келесі шарттарды қанағаттандыратын Δ–PM-теориялар қарастырылды. Ол шарттар келесі: теориялар кемелденген, α-йонсонды, $\alpha+1$-экзистенционалды сөйлемдер үшін толық және $\alpha \le \omega$, $\lambda \ge \omega$. Сондай теориялар үшін олардың орталығының λ-тұрақтылығы өз теорияларының Δ–PM стабильділігіне эквивалентті болуы көрсетілді.

We are considering in this article Δ–PM-theories which perfect, α-Jonsson's and complete for $\exists$-sentences. Under these conditions and $\alpha \le \omega$, $\lambda \ge \omega$ the equivalence of the classical λ-stability of the center of this theories and the Δ–PM-stability of ones are proved.

Введение

В данной статье отражается связь Δ–PM-теории и ее центра относительно стабильности. Хорошо известно [1; 165], что если полная теория имеет модельный компаньон и она λ-стабильна, то и ее модельный компаньон λ-стабилен. Йонсоновские теории, вообще говоря, неполны. В [2, 3] показано, что если совершенная йонсоновская теория λ-стабильна в йонсоновском смысле, то это эквивалентно λ-стабильности и ее центра в обычном смысле для полных теорий. В силу критерия совершенности йонсоновских теорий [4] ее центр является ее модельным компаньоном. В [5] показано, что результаты о модельных компаньонах можно обобщить на случай α-йонсоновской теории. В [6] были определены обобщенно-йонсоновские теории, для которых все результаты для йонсоновских теорий являются верными при $\alpha = 0$. В [7] были определены Δ–PM-теории, которые являются позитивным обобщением теорий из [6]. Таким образом, основным результатом данной статьи является теорема 2.1, в который изучается связь стабильностных свойств Δ–PM-теории и ее центра.

§1. Сведения о компаньонах йонсоновских теорий

В этом параграфе мы дадим основные определения понятий и известные результаты, связанные с ними.

Определение 1.1. Теория T языка L называется йонсоновской, если

1) T имеет бесконечную модель;
2) T индуктивна;
3) T обладает свойством совместного вложения (JEP);
4) T обладает свойством амальгамы (AP).

Следующие определения даны в [8].

Определение 1.2. Пусть $k \ge \omega$. Модель M теории T называется:

– *k*-универсальной для T, если каждая модель T мощности строго меньше *k*, изоморфно вкладывается в M;
– *k*-однородной для T, если при любых двух моделях A и A_1 теории T, являющихся подмоделями M мощности, строго меньше *k* и изоморфизме $f : A \to A_1$ для каждого расширения B модели A, являющегося подмоделью M и моделью T мощности, строго меньше *k*, существуют расширение B_1 модели A_1, являющееся подмоделью M, и изоморфизм $g : B \to B_1$, продолжающий f.

Определение 1.3. Однородно-универсальной для T моделью называется k-однородно-универсальная для T модель мощности k, где $k \geq \omega$.

В работе [8] можно найти следующие предложения:

Факт [8, 0.1]. Каждая йонсоновская теория T имеет k^+-однородно-универсальную модель мощности 2^k. Обратно, если теория T индуктивна, имеет бесконечную модель и ω^+-однородно-универсальную модель, то теория T является йонсоновской.

Факт [8, 0.2]. (i) Пусть T — йонсоновская теория. Две модели M и M_1 k-однородно-универсальные для T, являются элементарно эквивалентными.

(ii) Если существует модель M k-однородно-универсальная для T мощности k, то она единственна с точностью до изоморфизма. Кроме того, модель M k-сильно однородна, т.е. любой изоморфизм между двумя подмоделями A и B модели M мощности строго меньше k, являющимися моделями теории T, продолжается до автоморфизма M.

Покажем, что в рамках определения однородности и универсальности из [8] верно следующее:

Лемма 1.1. Пусть T — произвольная теория.

1) Модель M теории T α-однородна для T тогда и только тогда, когда M β-однородна для всех $\beta \leq \alpha$.

2) Модель M теории T α-универсальна для T тогда и только тогда, когда M β-универсальна для всех $\beta \leq \alpha$.

Определение 1.4. Модель C йонсоновской теории T называется семантической моделью теории T, если ω^+-однородно-универсальна в смысле [8].

Определение 1.5. Семантическим пополнением (центром) йонсоновской теории T называется элементарная теория T* семантической модели C теории T, т.е. T* = Th(C).

Определение 1.6. Модель A теории T называется T-экзистенцианально замкнутой, если для любой модели B и любой экзистенциальной формулы $\phi(\bar{x})$ с константами из A выполняется $A \models \exists\bar{x}\phi(\bar{x})$ при условии, что A — подмодель B и $B \models \exists\bar{x}\phi(\bar{x})$.

В связи с определениями 1.4 и 1.6. верен следующий факт:

Лемма 1.2. Семантическая модель C йонсоновской теории T является T-экзистенциально замкнутой.

В [8] рассмотрен следующий факт.

Факт [8, 0.3]. Пусть T — йонсоновская теория. Если T* модельно полна и $k \geq \omega$, то k-однородные — универсальные, для T модели k-насыщенны; если T* не является модельно полной, то ни одна семантическая модель не является ω^+-насыщенной.

В рамках нового определения семантической модели йонсоновской теории дадим следующее определение.

Определение 1.7. [4] Йонсоновская теория T называется совершенной, если каждая семантическая модель T является насыщенной моделью T*.

Легко заметить, что следующий результат из [4] остается верным и в рамках нового определения совершенности йонсоновской теории.

Теорема [4, 2.8]. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;

2) T* — модельный компаньон T;

3) Mod T* = E_T;

4) T* = T^f,

где E_T — класс T-экзистенциально замкнутых моделей T; T^0 — оболочка Кайзера (максимальная $\forall\exists$ теория, взаимно модельно совместная с T); $T^f = Th(F_T)$, где F_T — класс генерических моделей T (в смысле конечного форсинга Робинсона); T^M — модельный компаньон йонсоновской теории T.

Более того, можно заметить следующее:

Замечание. Совершенность йонсоновской теории эквивалентна модельной полноте T*.

Приступим к исследованию свойств компаньонов йонсоновских теорий.

Следующее определение взято из [8].

Определение 1.8. Две йонсоновские теории T_1 и T_2 называются косемантичными, если $T_1^* = T_2^*$.

В связи с этим в [8] получен результат.

Предложение [8, 1.1]. Пусть T_1 и T_2 — йонсоновские теории. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T_1 и T_2 косемантичны;

2) T_1 и T_2 имеют общую семантическую модель;

3) семантические модели T_1 и T_2 совпадают.

Лемма 1.3. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда T^0 — наибольшая йонсоновская теория, косемантичная с T.

Следствие [8, 1.3]. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда $T^*_{\forall\exists}$ — наибольшая йонсоновская теория, косемантичная с T. В связи с этим легко заметить, что если T — йонсоновская теория, то $T^0 = T^*_{\forall\exists}$.

Следующие результаты из [8] остаются верными также и в рамках нового определения:

Теорема [9, 2.9]. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;

2) T^* — $\forall\exists$-аксиоматизируема.

Теорема [9, 2.10]. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;

2) $T^* = T^0$.

Теорема [4, 2.11]. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;

2) T имеет модельный компаньон.

Теорема [9, 2.12]. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;

2) T^* — йонсоновская теория;

3) T^f — йонсоновская теория;

4) T^e — йонсоновская теория, где $T^e = Th(E_T)$;

5) T^e — полная теория;

6) T^0 — полная теория.

Определение 1.9. Пусть T — йонсоновская теория. Компаньоном йонсоновской теории T называется такая теория $T^{\#}$ той же сигнатуры, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $(T^{\#})_{\forall} = T_{\forall}$;

2) для любой йонсоновской теории T', если $T_{\forall} = T'_{\forall}$, то $T^{\#} = (T')^{\#}$;

3) $T_{\forall\exists} \subseteq T^{\#}$.

Естественными интерпретациями компаньона $T^{\#}$ являются T^*, T^0, T^f, T^M, T^e.

По аналогии с хорошо известным фактом из [1; 158] можно утверждать следующее:

Лемма 1.4. Если $T^{\#}$ — компаньон йонсоновской теории T и T^M — модельный компаньон T, то $T^{\#} = T^M$.

Легко проверить следующее:

Лемма 1.5. Пусть T_1 и T_2 — йонсоновские теории. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T_1 и T_2 взаимно модельно совместны;

2) $T_1^{\#} = T_2^{\#}$.

Как следствие леммы 1.3, можно получить следующее:

Лемма 1.6. Пусть T_1 и T_2 — йонсоновские теории. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T_1 и T_2 взаимно модельно совместны;

2) $T_1^* = T_2^*$;

3) $T_1^f = T_2^f$;

4) $T_1^e = T_2^e$;

5) $T_1^0 = T_2^0$.

Интересным является следующий вопрос: будет ли для произвольной йонсоновской теории её компаньон йонсоновской теорией?

В связи с этим дадим следующие определения.

Определение 1.10. Йонсоновская теория T называется $\#$-йонсоновской, если $T^{\#}$ — йонсоновская теория.

Определение 1.11. Йонсоновская теория T называется супер-йонсоновской, если любой существующий компаньон этой теории является йонсоновской теорией.

Следующий результат говорит об особенности T^0 среди других компаньонов йонсоновской теории T.

Лемма 1.7. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;
2) T — супер-йонсоновская;
3) T f-йонсоновская;
4) T — *-йонсоновская;
5) T — e-йонсоновская.

В работе [9] был получен результат [9, 1.15], имеющий отношение к теореме Линдстрема о модельной полноте. Следующая теорема уточняет результат [9, 1.15].

Теорема 1.2. Пусть T — йонсоновская теория. Следующие условия эквивалентны:

1) T полна:
2) T модельно полна.

Следствие. Взаимно модельные совместные полные йонсоновские теории логически эквивалентны между собой.

Легко заметить, что взаимно модельные совместные йонсоновские теории являются косемантичными теориями. Почему? Таким образом, для произвольной йонсоновской теории мы имеем два случая:

1. Если она совершенна, то класс взаимно модельно совместных с ней теорий раскладывается на следующие непересекающиеся подклассы:

А) неполные нейонсоновские теории;

Б) полные нейонсоновские теории;

В) неполные йонсоновские совершенные теории;

Г) полные йонсоновские теории (надо заметить, что из сказанного выше этот подкласс состоит всего из одной теории.

2. Если она несовершенна, то класс взаимно модельно совместных с ней теорий раскладывается на следующие непересекающиеся подклассы:

А) неполные нейонсоновские теории;

Б) полные нейонсоновские теории;

В) неполные йонсоновские несовершенные теории.

§2. О PM-стабильности Δ–PM-теории

Дадим основные определения. Пусть L — язык первого порядка. At есть множество атомарных формул данного языка. $B^+(At)$ — замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных. $Q(B^+(At))$ есть множество формул в пренексном нормальном виде, полученное с помощью применения кванторов ($\forall$ и $\exists$) к $B^+(At)$. Назовем формулу позитивной, если она принадлежит множеству $Q(B^+(At)) = L^+$. Теория называется позитивно аксиоматизируемой, если ее аксиомы позитивны. $B(L^+)$ — это произвольная булева комбинация формул из L^+.

Пусть M_1 и M_2 — структуры языка, $\Delta \subseteq B(L^+)$. Отображение $h: M_1 \to M_2$ называется Δ-гомоморфизмом (символически $h: M_1 \xrightarrow[\Delta]{} M_2$), если для любого $\phi(\bar{x}) \in \Delta, \bar{a} \in M_1$, из того, что $M_1 \models \phi(\bar{a})$, следует, что $M_2 \models \phi(h(\bar{a}))$.

Определение 1. Говорим, что теория Δ допускает $\Delta = JEP$, если для любых двух $M_1, M_2 \in ModT$ существует $M_3 \in ModT$ и Δ-гомоморфизмы $h_1: M_1 \xrightarrow[\Delta]{} M_3, h_2: M_2 \xrightarrow[\Delta]{} M_3$.

Определение 2. Говорим, что теория T допускает $\Delta - AP$, если для любых $M_1, M_2, M_3 \in ModT$ таких, что $h_1 : M_1 \to M_3, g_1 : M_1 \to M_2$, где h_1, g_1 — Δ-гомоморфизмы, существует $M_4 \in ModT$ и $h_2 : M_3 \xrightarrow[\Delta]{} M_4, g_2 : M_2 \xrightarrow[\Delta]{} M_4$, где h_2, g_2 — Δ-гомоморфизмы такие, что $h_2 \circ h_1 = g_2 \circ g_1$.

Определение 3. Теория T называется Δ-позитивно мустафинской (Δ–PM)-теорией, если:

– теория T имеет бесконечные модели;

– теория T является $\prod^{+}_{\alpha+2}$-аксиоматизируемой;

– теория T допускает $\Delta = JEP$;

– теория T допускает $\Delta - AP$.

Пусть T — Δ–PM-теория; $S^{PM}(X)$ — множество всех позитивных $\Sigma^{+}_{\alpha+1}$ полных n-типов над X, совместных с T, для каждого конечного n.

Определение 4. Модель M теории T называется Δ-позитивно экзистенциально замкнутой, если для каждого Δ-гомоморфизма $f : M \xrightarrow[\Delta]{} N$ и каждого $\bar{a} \in M$ и $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta : N \models \exists \bar{y} \phi(f(\bar{a}), \bar{y}) \Rightarrow$

$\Rightarrow M \models \exists \bar{y} \phi(\bar{a}, \bar{y})$.

Класс всех Δ-позитивно экзистенциально замкнутых моделей теории T обозначим через E^{+}_{T}.

Определение 5. Мы говорим, что Δ–PM-теория T $PM - \lambda$-стабильна, если для любой модели $A \in E^{+}_{T}$, для любого подмножества X множества A $|X| \le \lambda \Rightarrow |S^{PM}(X)| \le \lambda.$ $\Delta - PM$-теория T PM-стабильна, если она Δ–PM-стабильна для некоторого λ.

Определение 6. Теория T позитивно-модельно полна, если она модельно полна и любая экзистенциальная формула эквивалентна в T некоторой позитивно экзистенциальной формуле.

Определение 7. Модель теории называется simple, если каждый нетривиальный морфизм в классе моделей данной теории является инъективным.

Лемма 2.1 [10, 1.3.].

Следующие условия эквивалентны:

1) теория T позитивно модельно полна;

2) теория T модельно полна, и любая ее модель является simple.

В рамках указанных выше определений получена следующая

Теорема 2.1. Пусть T — Δ–PM-теория, α-йонсоновская, совершенная, полная для $E_{\alpha+1}$-предложений, $\lambda \ge \omega$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T Δ–PM-стабильна;

2) T^{*} — λ-стабильна, где T^{*} — центр йонсоновской теории T.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$: Теория $T \subset T^{*} \Rightarrow E^{+}_{\alpha+1,n}(T) \subset E^{+}_{\alpha+1,n}(T^{*})$, где $E^{+}_{\alpha+1,n}(T)$, $E^{+}_{\alpha+1,n}(T^{*})$ — это соответствующие решетки позитивных $\alpha+1$-экзистенциальных формул от n-свободных переменных. Теория T полна для $\alpha+1$-экзистенциональных предложений, следовательно, $E^{+}_{\alpha+1,n}(T) = E^{+}_{\alpha+1,n}(T^{*})$. T совершенна, следовательно, T^{*} модельно полна и соответственно по лемме 2.1. позитивно модельно полна $\Leftrightarrow \forall n < \omega, \forall \phi \in F_n(T^{*})$ $\exists \theta \in E^{+}_{\alpha+1,n}(T^{*}) : T^{*} \vdash \phi \leftrightarrow \theta$.

Пусть T Δ–PM-стабильна, тогда по определению для каждой $A \in E^{+}_{T}$ мы имеем, что для каждого $X \subset A$ и $|X| \le \lambda \Rightarrow |S^{PM}(X)| \le \lambda$.

Предположим, что T^{*} не λ-стабильна. Тогда существует $A \in E^{+}_{T} = ModT^{*}$ в силу $\alpha+1$-йонсоновости и совершенности такой, что существует $X \subset A$ такое, что $|X| < \lambda, \exists n < \omega, \Rightarrow |S(X)| > \lambda$. Для каждой формулы $\phi \in p$, где $p \in S_n(X)$, мы заменим ϕ на θ, где θ удовлетворяет $T^{*} \vdash \phi \leftrightarrow \theta$ и $\theta \in E^{+}_{\alpha+1,n}(T^{*})$. Пусть p' будет p после замены. Тогда $p' \in S^{PM}(X)$ и $|S^{PM}(X)| > \lambda$. Это противоречит $PM - \lambda$-стабильности теории T.

$2 \Rightarrow 1$ тривиально, следует из того, что множество позитивно-экзистенциональных формул является подмножеством всего языка и соответственно если число всех типов меньше фиксированной мощности, то и позитивно-экзистенциональных типов меньше этой мощности.

Список литературы

1. Справочная книга по математической логике: Теория моделей / Под. ред. Дж.Барвайса. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — Ч. 1. — С. 165.
2. *Yeshkeyev A.R.* On J-stability of Jonsson's theories ABSTRAKTS // The 9th Asian Logic Conference. — Novosibirsk, 2005. — P. 73–74.
3. *Ешкеев А.Р.* О J-форсинге совершенных йонсоновских теорий // Вестн. КарГУ. Сер. Математика. — 2006. — № 3(43). — С. 18–22.
4. *Ешкеев А.Р., Оспанов Р.М.* Йонсоновские теории и их компаньоны // Материалы 10-й Межвуз. конф. по математике и механике. — Алматы, 2005.
5. *Мустафин Т.Г.* Обобщенные условия Йонсона и описание обобщенно-йонсоновских теорий булевых алгебр // Матем. тр. — Новосибирск: Изд-во ИМ, 1998. — С. 135–197.
6. *Ешкеев А.Р.* О PJ-форкинге в классе Δ–PJ-теорий // Вестн. КазНУ. Сер. матем., мех., информ. — 2007. — № 3(54).
7. *Ешкеев А.Р.* Счетная категоричность Δ–PJ-теорий // Вестн. КазНУ. Сер. матем., мех., информ. — 2008. — № 3. — С. 64–69.
8. *Mustafin Y.* Quelques proprietes des theories de Jonsson // The Journal of Symbolic Logic. — 2002. — Vol. 67. — N 2. — P. 528–536.
9. *Ешкеев А.Р., Оспанов Р.М.* Связь йонсоновских теорий с теоремой Линдстрема // Тр. V Казахско-французского коллоквиума по теории моделей. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2001.
10. *Weispfenning V.* The model-theoretic significance of complemented existential formulas // The Journal of Symbolic Logic. – 1981. — Vol. 46. — N 4. — С. 843–850.

УДК 510.67

А.Р.Ешкеев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

О ЦЕНТРАЛЬНЫХ ТИПАХ Δ–PM-ТЕОРИЙ

Мақалада Δ–PM-теорияның кейбір қасиеттері қарастырылды. Біріншіден, теорияның форкинг қасиеті аксиоматикалық түрде енгізім зерттелді. Нәтижесінде классикалық форкингтің қасиеттеріне біз енгізген ұғым эквивалентті болды. Екіншіден, осы теорияның орталық типтерінің стабильдік қасиеттері талданды. Бұл жерде жаңадан енгізілген ұғым қасиеттерін бұрынғы классикалық ұғымдармен байланысы ізделді.

We are considering in this article some properties of Δ–PM-theories which perfect, α -Jonsson's and complete for $\Sigma_{\alpha+1}$-sentences. Under these conditions and $\alpha \leq \omega$, $\lambda \geq \omega$ we are investigating the property some kind of stability for central types and connection with stability in Δ–PM meaning. Also we introduced the axiomatic kind of forking property of such theories.

Введение

В данной статье рассмотрены некоторые свойства центральных типов и свойство форкинга для $\Delta - PM$ -теорий.

При изучении свойств форкинга для $\Delta - PM$ -теории рассмотрен аксиоматический подход. Подобное было рассмотрено в [1, 2] соответственно для йонсоновских теорий и $\Delta - PJ$ -теории. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1.2. Пусть T — $\Delta - PM$ -теория, α -йонсоновская, совершенная, полная для $\Sigma_{\alpha+1}$ предложений. Тогда следующие условия эквивалентны:

– отношение $PJNF$ удовлетворяет аксиомам 1–7 относительно теории T ;

– T^* стабильна и для любых $p \in P, A \in A((p, A) \in PJNF \Leftrightarrow p$ не форкуется над A в смысле Шелаха).

Идея центрального типа появляется при рассмотрении обогащенной сигнатуры.

$\Delta - PM$ -теории были определены в [3]. Такие теории являются позитивным обобщением обобщенно-йонсоновских теорий, введенных в [4].