



Рисунок 5. Зависимости интенсивности вынужденного излучения (а) и ее полуширины (б) от плотности мощности накачки

При изменении плотности мощности накачки от 0,1 до 0,8 МВт/см² интенсивность излучения в максимуме спектра увеличивается почти в 35 раз, а $\Delta\lambda_{1/2}$ уменьшается в 6,5 раза. Сужение полосы излучения с ростом интенсивности возбуждения свидетельствует о преобладании вынужденного излучения над спонтанным т.е. перехода системы в режим генерации. Дальнейшее увеличение плотности мощности источника накачки приводит к сужению полосы генерации и увеличению ее интенсивности. Порог возникновения вынужденного излучения определялся по касательной из рисунка 5(а) и составил 0,2 МВт/см². Полученные результаты демонстрируют потенциальную возможность использования пористого оксида алюминия для создания активных элементов квантовой электроники.

Литература:

1. Большиков Ф.А., Гарибин Е.А., Гусев П.Е. и др. Квантовая электроника, 41, 3 (2011).
2. Shin H.W., Cho S.Y., Choi K.H. et al. Applied physics letters, 88, 263112 (2006).
3. Costel A., Garcia-Moreno I., del Agua D. et al. Journ. of Applied Physics, 101,731(2007).
4. Мальцева Е.О., Плеханов А.И. Вестник НГУ, 6, 16 (2011).
5. Алимов О.К., Басиев Т.Т., Орловский Ю.В. и др. Квантовая электроника, 38, 7 (2008).
6. Donchenko V.A., Geints Y. E., Kharenkov V.A., Zemlyanov A.A. Optics and Photonics Journal, 3, 13 (2013).
7. Deshpande A.V., Kumar U., Journal of Non-Crystalline Solids 355, 501 (2009).
8. Берег В.Н. ЖТФ, 24,92 (1998).
9. Брагинский В.Б., Городецкий М.Л., Ильченко В.С. Успехи физических наук, 160, 157 (1990).
10. Sherstnev V. V., Krier A., Monakhov A. M., Nil G. Electron. Lett., 39, 916 (2003).
11. Елисеев А.А., Лукашин А.В. Функциональные наноматериалы (М.: Физматлит, 2010, с. 452).
12. De Mello J. C., Wittmann H. F., Friend R. H. Advanced Materials, 9, 230 (1997).

МНОГОМЕРНЫЙ ОПЕРАТОР ЧЕЗАРО В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

Акишев Г. *, д.ф.-м.н., профессор;

Гульманов Н. **, магистр, учитель математики

*Карагандинский государственный университет им. академика Е.А.Букетова

**Назарбаев интеллектуальная школа химико-биологического направления

г. Караганда, Республика Казахстан

В статье доказывается ограниченность многомерного оператора Чезаро в пространстве Харди со смешанной нормой.

Ключевые слова: оператор Чезаро, пространство Харди со смешанной нормой, нормальная функция.

Пусть C^n - n -мерное пространство комплексных чисел и $D_n = \{\bar{z} = (z_1, \dots, z_n) \in C^n : |z_j| < 1, j = 1, \dots, n\}$ - единичный полидиск (см. [1], [2]). Введем условные обозначения $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, $e^{i\bar{\theta}} = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$, $d\bar{\theta} = (d\theta_1, \dots, d\theta_n)$ и для $\bar{z} = (z_1, \dots, z_n)$, $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n) \in C^n$ положим $\bar{w} \cdot \bar{z} = (w_1 z_1, \dots, w_n z_n)$.

Определение ([3]). Положительная, непрерывная функция φ на $[0,1)$ называется нормальной функцией если существуют числа $0 < a < b$ такие, что:

- 1) Функция $\frac{\varphi(r)}{(1-r)^a}$ - не убывает на $[0,1)$ и $\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\varphi(r)}{(1-r)^a} = 0$;
- 2) Функция $\frac{\varphi(r)}{(1-r)^b}$ - не возрастает на $[0,1)$ и $\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\varphi(r)}{(1-r)^b} = +\infty$.

Функция n переменных называется нормальной, если она нормальна по каждой переменной.

Рассматривается $H(D_n)$ - пространство аналитических функций на полидиске D_n (см. [1], [2]).

Пусть $p_j, q_j \in (0, +\infty)$, φ_j - нормальные функции, $j = 1, \dots, n$, $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Через $H_{\bar{p}, \bar{q}, \bar{\varphi}}(D_n)$ обозначим пространство всех функций $f \in H(D_n)$, для которых величина

$$\|f\|_{\bar{p}, \bar{q}, \bar{\varphi}} = \left\{ \int_0^1 (1-r_n)^{-1} \varphi_n^{q_n}(r_n) \left[\dots \left[\int_0^1 (1-r_1)^{-1} \varphi_1^{q_1}(r_1) M_{\bar{p}}^{q_1}(\bar{r}, f) dr_1 \right]^{q_2} \dots \right]^{q_n} \right\}^{\frac{1}{q_n}}$$

конечна, где

$$M_{\bar{p}}(\bar{r}, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_n \left[\dots \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\bar{r} \cdot e^{i\bar{\theta}})|^{p_1} d\theta_1 \right]^{p_2} \dots \right]^{p_n} \right\}^{\frac{1}{p_n}}.$$

Отметим, что в одномерном случае пространство $H_{\bar{p}, \bar{q}, \bar{\varphi}}(D_n)$ рассмотрено в [3].

Каждая функция $f \in H(D_n)$ разлагается в степенной ряд

$$f(\bar{z}) = \sum_{\bar{k} \in Z_+^n} a_{\bar{k}} \prod_{j=1}^n z_j^{k_j}.$$

Рассматривается многомерный оператор Чезаро (см. [4])

$$(C^{\bar{\gamma}} f)(\bar{z}) = \sum_{\bar{k} \in Z_+^n} \left(\frac{1}{\prod_{j=1}^n A_{k_j}^{\gamma_j+1}} \sum_{l_n=0}^{k_n} \dots \sum_{l_1=0}^{k_1} \prod_{j=1}^n A_{k_j-l_j}^{\gamma_j} \right) \prod_{j=1}^n z_j^{k_j},$$

где $\gamma_j > -1$, $j = 1, \dots, n$ и $A_k^\gamma = \frac{(\gamma+1) \cdot \dots \cdot (\gamma+k)}{k!}$.

В одномерном случае при $\gamma = 0$ и $p = 1$ ограниченность оператора Чезаро в пространстве Харди $H_1(D_1)$ доказал A.G. Siskakis [5]. Этот результат на случай $0 < p < 1$ распространил I. Miao [6], в случае $1 < p < +\infty$ доказали K. Stempak [7], K. Andersen [8]. В дальнейшее развитие дано в [3].

В многомерном случае при $p_1 = \dots = p_n = p$ ограниченность оператора $C^{\bar{\gamma}}$ в пространстве Харди $H^p(D_n)$ доказали D. Chang, S. Stevic [4].

В настоящей заметке исследована ограниченность оператора Чезаро $C^{\bar{r}}$ в пространстве $H_{\bar{p}, \bar{q}, \bar{\varphi}}(D_n)$.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть $\beta_j > 0$, $0 < \theta_j < l_j$, $j = 1, \dots, n$. Если функция $h(\bar{r}) = h(r_1, \dots, r_n)$ положительная функция не убывает по каждой переменной r_j , $j = 1, \dots, n$, то для $s_j \in (0, 1)$, $j = 1, \dots, n$ имеет место неравенство

$$\left\{ \int_0^1 (1-r_n)^{\beta_n l_n - 1} \left\{ \dots \left\{ \int_0^1 (1-r_1)^{\beta_1 l_1 - 1} h^{l_1}(r_1 \cdot s_1, \dots, r_n \cdot s_n) dr_1 \right\}^{\frac{l_2}{l_1}} \dots \right\}^{\frac{l_n}{l_{n-1}}} dr_n \right\}^{\frac{1}{l_n}} \leq C(\beta, l) \left\{ \int_0^1 (1-r_n)^{\beta_n \theta_n - 1} \left\{ \dots \left\{ \int_0^1 (1-r_1)^{\beta_1 \theta_1 - 1} h^{\theta_1}(r_1 \cdot s_1, \dots, r_n \cdot s_n) dr_1 \right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right\}^{\frac{\theta_n}{\theta_{n-1}}} dr_n \right\}^{\frac{1}{\theta_n}}.$$

Доказательство. Так как функция $h(\bar{r})$ положительна и не убывает по каждой переменной, то

$$\left\{ \int_0^1 (1-r_2)^{\beta_2 \theta_2 - 1} \left\{ \int_0^1 (1-r_1)^{\beta_1 \theta_1 - 1} h^{\theta_1}(r_1 \cdot s_1, r_1 \cdot s_2) dr_1 \right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} dr_2 \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \geq \left\{ \int_{\eta_2}^1 (1-r_2)^{\beta_2 \theta_2 - 1} \left\{ \int_{\eta_1}^1 (1-r_1)^{\beta_1 \theta_1 - 1} h^{\theta_1}(r_1 \cdot s_1, r_2 \cdot s_2) dr_1 \right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} dr_2 \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \geq C(\beta, \theta) \cdot (1-\eta_1)^{\beta_1} (1-\eta_2)^{\beta_2} h(\eta_1 \cdot s_1, \eta_2 \cdot s_2)$$

для $\eta_1, \eta_2 \in (0, 1)$.

Из этого неравенства следует утверждение леммы при $n = 2$.

Для $n > 2$ доказывается по индукции.

Лемма 2. Пусть $f \in H(D_n)$, $\gamma_j > -1$, $j = 1, \dots, n$.

1) Если $1 \leq p_j < \infty$, $0 < \delta_j < 1 + \gamma_j$, $0 < r_j \leq 1$, $j = 1, \dots, n$, то

$$M_{\bar{p}}(\bar{r}, C^{\bar{r}}(f)) \leq C \cdot \prod_{j=1}^n r_j^{-\delta_j} \int_0^{r_n} \dots \int_0^{r_1} \prod_{j=1}^n (r_j - \rho_j)^{\delta_j - 1} h_1(\bar{\rho}) d\bar{\rho},$$

где $h_1(\bar{\rho}) = M_{\bar{p}}(\bar{\rho}, f) \cdot \prod_{j=1}^n (1 - \rho_j)^{-\delta_j}$.

2) Если $1 \leq p_j < \infty$, $0 < q_j < 1$, $0 < r_j \leq 1$, $j = 1, \dots, n$, то

$$M_{\bar{p}}(\bar{r}, C^{\bar{r}}(f)) \leq C \cdot \prod_{j=1}^n r_j^{-1} \left\{ \int_0^{r_n} \left\{ \dots \left\{ \int_0^{r_1} \left(\prod_{j=1}^n (r_j - \rho_j)^{1 - \frac{1}{q_j}} (1 - \rho_j)^{-1} \cdot M_{\bar{p}}(\bar{\rho}, f) \right)^{q_1} d\rho_1 \right\}^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \right\}^{\frac{q_n}{q_{n-1}}} d\rho_n \right\}^{\frac{1}{q_n}}.$$

Доказательство. Известно, что (см. [4])

$$C^{\bar{\gamma}}(f)(\bar{z}) = \prod_{j=1}^n (\gamma_j + 1) \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{f(t_1 z_1, \dots, t_n z_n)}{\prod_{j=1}^n (1 - t_j z_j)^{\gamma_j + 1}} \prod_{j=1}^n (1 - t_j)^{\gamma_j} dt_1 \dots dt_n.$$

Поэтому применяя обобщенное неравенство Минковского (см. [9]) получим

$$M_{\bar{p}}(\bar{r}, C^{\bar{\gamma}}(f)) \leq \prod_{j=1}^n (\gamma_j + 1). \quad (1)$$

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{j=1}^n (1 - t_j)^{\gamma_j} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t_1 z_1 e^{i\theta_1}, \dots, t_n z_n e^{i\theta_n})|^{p_1} \cdot \left(\prod_{j=1}^n |1 - t_j z_j e^{i\theta_j}|^{-\gamma_j - 1} \right)^{p_1} d\theta_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \left[\right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} d\theta_n \right\}^{\frac{1}{p_n}} d\bar{t}$$

Далее, учитывая неравенство $|1 - tre^{i\theta}| \geq 1 - tr$ из неравенства (1) получим

$$\begin{aligned} M_{\bar{p}}(\bar{r}, C^{\bar{\gamma}}(f)) &\leq \prod_{j=1}^n (\gamma_j + 1) \cdot \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{j=1}^n \frac{(1 - t_j)^{\gamma_j}}{(1 - t_j r_j)^{\gamma_j + 1}} M_{\bar{p}}(\bar{t} \cdot \bar{z}, f) d\bar{t} \leq \\ &\leq \prod_{j=1}^n (\gamma_j + 1) \cdot \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{j=1}^n (1 - t_j)^{\delta_j - 1} \prod_{j=1}^n (1 - t_j r_j)^{-\delta_j} M_{\bar{p}}(\bar{t} \cdot \bar{z}, f) d\bar{t} \end{aligned} \quad (2)$$

Теперь, делая замену переменной $t_j r_j = \rho_j$, $j = 1, \dots, n$, отсюда получим утверждение первого пункта леммы.

Для доказательства второго утверждения леммы воспользуемся первым неравенством в формуле (2) и леммой 1.

Теорема 1. Пусть φ_j - нормальные функции и $\gamma_j > -1$, $1 \leq p_j < \infty$, $0 < q_j < 1$, $j = 1, \dots, n$.

Тогда для любой функции $f \in H_{\bar{p}, \bar{q}, \bar{\varphi}}(D_n)$ имеет место неравенство

$$\|C^{\bar{\gamma}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{q}, \bar{\varphi}} \leq C \cdot \|f\|_{\bar{p}, \bar{q}, \bar{\varphi}}.$$

Доказательство теоремы 1 основано на лемме 2 и свойствах функций φ_j , $M_{\bar{p}}(\bar{r}, f)$.

Замечание 1. Из приведенных утверждений при $p_1 = \dots = p_n$, $q_1 = \dots = q_n$ следуют результаты [3], [4], а при $n = 1$ следуют результаты [10].

Литература

1. Рудин, У. Теория функций на поликруге / М.: Мир, - 1974 - С. 160
2. Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ / Издательство «Лань», Санкт-Петербург-1969.- С. 571
3. Ji-Huai Shi, Guang-Bin Ren. Boundedness of the Cesaro operator on mixed norm spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 126, 1998. Page 3553-3560.
4. Chang D., Stevic S. The generalized Cesaro operator on the unit polydisk // Taiw. Jour. Math., 2003 - vol. 7, №2, - Page 293-308
5. Siskakis, A.G. The Cesaro operator is bounded on H^1 // Proceedings of the American mathematical society. Volume 110, Number 2, October 1990. Page 461-462.
6. Miao, J. The Cesaro operator is bounded on H^p for $0 < p < 1$ // Proceedings of the American mathematical society. Volume 116, Number 4, December 1992. Page 1077-1079.
7. Stempak K., Cesaro averaging operators // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A - 1994 - vol 124 - Page 121-126
8. Anderson K.F., Cesaro averaging operators on Hardy spaces // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A - 1996 - vol. 126 - Page 617-624
9. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения / Москва: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975.- С. 480.
10. Акишев Г., Гульманов Н.К. Ограниченность оператора Чезаро в пространстве Харди // Материалы международной научной конференции «Теоретические и прикладные проблемы математики, механики и информатики» (12-14 июня, КарГУ) - Караганда: издательство КарГУ, 2014. - С. 5-6