

Следующая теорема показывает, что кубатурная формула (2) точна для полиномов со спектром из гиперболического креста.

Теорема 1. Пусть тригонометрический полином со спектром из гиперболического креста (4). Тогда

$$\int_{[0,1]^n} T_{p^m}(x) dx = F_m(T_{p^m}; p).$$

Теорема 2. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$.

Если $1 < q \leq \infty$, $\alpha > \frac{1}{q} = \max\left\{\frac{1}{q}, \frac{1}{2}\right\}$, $f \in W_q^\alpha$, то

$$\|f\|_{W_q^\alpha=1} |I(f) - F_m(f; p)| \leq c \frac{m^{\frac{n-1}{q}}}{p^{\alpha m}}.$$

Исследование поддержаны Министерством образования и науки РК грант AP14870758.

Список использованной литературы

1. Нурсултанов Е. Д., Тлеуханова Н. Т., О восстановлении мультипликативных преобразований функций из анизотропных пространств, Сиб. матем. журн., 55:3 (2014), 592–609.
2. Нурсултанов Е. Д., Тлеуханова Н. Т., Квадратурные формулы для классов функций малой гладкости, Матем. сб., 194:10 (2003), 133–160.

ВЗАИМНЫЕ НАКРЫВАНИЯ КОНУСОВ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ И ОЦЕНКИ ИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МАЖОРАНТ

Бахтигареева Э. Г.¹, Гольдман М. Л.¹, Каршыгина Г. Ж.²

¹Математический институт им. Академика С.М. Никольского РУДН, Москва, Россия,

²Карагандински университет им. Академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

E-mail: seulydia@yandex.ru, karshygina84@mail.ru

В статье изучаются вопросы взаимного накрывания и эквивалентности конусов монотонных функций и соответствующие оценки их мажорант. Рассмотрены два вида накрываний: поточечные и интегральные. Им отвечают поточечные и интегральные оценки мажорант на этих конусах. Мы существенно опираемся на результаты наших работ [1-3].

Через $L_0^+(0, T)$ обозначим множество всех неотрицательных измеримых по Лебегу функций на $(0, T)$, где $T \in (0, \infty]$. Пусть K - конус в $L_0^+(0, T)$, снабженный функционалом $\rho_K: K \rightarrow [0, \infty)$; $h \in K$, $\alpha \in [0, \infty) \Rightarrow \alpha h \in K$, $\rho_K(\alpha h) = \alpha \rho_K(h)$;

$\rho_K(h) = 0 \Rightarrow h = 0$ почти всюду на $(0, T)$.

На множестве $L_0^+(0, T)$ рассмотрим два отношения порядка.

Поточечное отношение: $f \leq g$ означает, что $f(t) \leq g(t)$ для почти всех $t \in (0, T)$.

Пусть теперь $q \in (0, \infty)$, μ - неотрицательная борелевская мера на $(0, T)$, такая что

$$0 < M_q(t) := \left(\int_{(0,t]} d\mu \right)^{1/q} < \infty, \quad t \in (0, T).$$

Интегральное отношение порядка: $f \prec_q g$ означает

$$M_q(t)^{-1} \left(\int_{(0,t]} f^q d\mu \right)^{1/q} \leq M_q(t)^{-1} \left(\int_{(0,t]} g^q d\mu \right)^{1/q}, \quad t \in (0, T).$$

Ясно, что $f \leq g \Rightarrow f \prec_q g$. Для конуса K введем поточечную и q -интегральную мажоранты при $t \in (0, T)$:

$$\lambda_K(t) = \sup \{ h(t) : h \in K; \rho_K(h) \leq 1 \}, \quad t \in (0, T);$$

$$\tilde{\lambda}_{K,q}(t) = \sup \left\{ M_q(t)^{-1} \left(\int_{(0,t]} h^q d\mu \right)^{1/q} : h \in K; \rho_K(h) \leq 1 \right\}, \quad t \in (0, T).$$

Определение 1. Конус M , снабженный функционалом ρ_M , покрывает конус K , снабженный функционалом ρ_K , поточечно с константами накрывания $c_0 \in \mathbb{R}_+$, $c_1 \in [0, \infty)$, если для любой функции $h_1 \in K$ найдется функция $h_2 \in M$, такая что $\rho_M(h_2) \leq c_0 \rho_K(h_1)$, и $h_1(t) \leq h_2(t) + c_1 \rho_K(h_1)$; $t \in (0, T)$.

При $T = \infty$ считаем, что $c_1 = 0$.

Определение 2. Конус M , снабженный функционалом ρ_M , покрывает конус K , снабженный функционалом ρ_K , q -интегрально с константами накрывания $c_0 \in \mathbb{R}_+$, $c_1 \in [0, \infty)$, если для любой $h_1 \in K$ найдется $h_2 \in M$, такая что $\rho_M(h_2) \leq c_0 \rho_K(h_1)$; и

$$M_q(t)^{-1} \left(\int_{(0,t]} h_1^q d\mu \right)^{1/q} \leq \left\{ M_q(t)^{-q} \int_{(0,t]} h_2^q d\mu + [c_1 \rho_K(h_1)]^q \right\}^{1/q}, \quad 0 < q < 1, \quad t \in (0, T);$$

$$M_q(t)^{-1} \left(\int_{(0,t]} h_1^q d\mu \right)^{1/q} \leq M_q(t)^{-1} \left(\int_{(0,t]} h_2^q d\mu \right)^{1/q} + c_1 \rho_K(h_1), \quad 1 \leq q < \infty.$$

При $T = \infty$ считаем, что $c_1 = 0$. Введем обозначения: $K \leq M(c_0, c_1)$ для поточечного накрывания, $K \prec_q M(c_0, c_1)$ для q -интегрального накрывания.

Эквивалентность конусов $K \cong M$, или $K \approx_q M$ (соответственно, поточечная или q -интегральная) означает взаимное накрывание конусов, т.е.

$$K \cong M \Leftrightarrow K \leq M(c_0, c_1), \quad M \leq K(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1);$$

$$K \approx_q M \Leftrightarrow K \prec_q M(c_0, c_1), \quad M \prec_q K(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1).$$

Теорема.

1. Пусть $K \leq M(c_0, c_1)$. Тогда для поточечных мажорант справедлива оценка $\lambda_K(t) \leq c_0 \lambda_M(t) + c_1$, $t \in (0, T)$.

2. Пусть $K \prec_q M(c_0, c_1)$. Тогда, для интегральных мажорант справедливы оценки

$$\tilde{\lambda}_{K,q}(t) \leq \left[c_0^q \tilde{\lambda}_{M,q}(t)^q + c_1^q \right]^{1/q}, \quad t \in (0, T), \quad 0 < q < 1;$$

$$\tilde{\lambda}_{K,q}(t) \leq \left[c_0 \tilde{\lambda}_{M,q}(t) + c_1 \right], \quad t \in (0, T), \quad 1 \leq q < \infty.$$

Замечание 1. В случае эквивалентности конусов получаем взаимные оценки соответствующих мажорант.

Замечание 2. Из поточечного накрывания (эквивалентности) конусов следует их q -интегральное накрывание (эквивалентность) с теми же константами накрывания (эквивалентности).

Благодарности. Работа двух первых авторов выполнена в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН при финансовой поддержке гранта Российского Научного Фонда, Проект №19-11-00087, <https://rscf.ru/project/19-11-00087/>.

Список использованной литературы

1. Bokayev N. A., Goldman M. L., Karshygina G. Zh. Cones of functions with monotonicity conditions for generalized Bessel and Riesz potentials. Math. Notes. 2018. Vol. 104, No. 3, pp. 356–373.
2. Bokayev N. A., Goldman M. L., Karshygina G. Zh. Criteria for embeddings of generalized Bessel and Riesz potential spaces in rearrangement invariant spaces. Eurasian Math. Journal. 2019. Vol. 10, No. 2, pp. 8–29.
3. Goldman M. L. On optimal embedding of generalized Bessel and Riesz potentials. Proc. Steklov Inst. Mathem. 2010. Vol. 269, pp. 101–123.

НАЗАРОВ-ПОДКОРЫТОВ ЛЕММАСЫНЫҢ КОММУТАТИВТІ ЕМЕС АНОЛОГЫ

Дәуітбек Д., Төленов Қ.С.

Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

E-mail: dauitbek@math.kz; tulenov@math.kz

Айталық H комплекс Гильберт кеңістігі және $B(H)$ – H кеңістігіндегі барлық сызықтық шенелген операторлардың алгебрасы болсын. $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ арқылы сенімді қалыпты жартылай ақырлы τ ізімен жабдықталған жартылай ақырлы фон Нейман алгебрасын белгілейік. (\mathcal{M}, τ) жұбы коммутативті емес өлшем кеңістігі деп аталады. Егер H Гильберт кеңістігіндегі түйік және тығыз анықталған x операторы \mathcal{M} фон Нейман алгебрасының \mathcal{M}' коммутантындағы әрбір u унитар операторы үшін $u^*xu = x$ болса, онда x операторын \mathcal{M} –мен байланысқан деп атаймыз. Егер \mathcal{M} –мен байланысқан x операторы және әрбір $\varepsilon > 0$ үшін $p(H) \subset \text{dom}(x)$ және $\tau(1 - p) < \varepsilon$ орындалатындай $p \in \mathcal{M}$ проекциясы бар болса, онда x операторын τ -өлшемді деп атаймыз. Барлық τ -өлшемді операторлар жиыны $\mathcal{L}_0(\mathcal{M})$ арқылы белгіленеді. Өз-өзіне түйіндес $x \in \mathcal{L}_0(\mathcal{M})$ операторы және $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ Borel жиыны берілген болса, оның спектрлік проекциясын $e^{|\cdot|}(\mathcal{B})$ арқылы белгілейміз. $x \in \mathcal{L}_0(\mathcal{M})$ болсын,

$$d(s; x) = \tau \left(e^{|\cdot|}(s, \infty) \right), \quad -\infty < s < \infty$$

арқылы x операторының үлестірім функциясы анықталады.

$f(x) = x$, $x \geq 0$ функциясы үшін [2, Лемма 3. (ii)] қолданып,

$$\tau(|x|^p) = p \int_0^{+\infty} s^{p-1} \tau \left(e^{|\cdot|}(s, \infty) \right) ds = p \int_0^{+\infty} s^{p-1} d(s; x) ds$$

аламыз. $x \in \mathcal{L}_0(\mathcal{M})$

$$\mu(t; x) = \inf\{s > 0: d(s; x) \leq t\}, \quad t > 0$$