УДК 517.988.68+517.968.22

К.Т.Искаков, Ж.О.Оралбекова

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ОПТИМИЗАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Параболалық типті теңдеулер үшін коэффициентті кері есептерді шешудің дискретті аналогы қарастырылды. Оңтайландыру есебі үшін ақырлы-айырымдық деңгейде функционалдың градиентін есептеуге арналған формулалар алынды.

The finite-difference method for the coefficient inverse problem for parabolic type equation is considered. The gradient of the functional in finite-difference domain for optimization problem is obtained.

§1. Постановка оптимизационной задачи на дифференциальном уровне

В области $Q=[0,T]\times[0,L]$ рассмотрим прямую задачу об определении функции $u(x,t)$ из соотношений:

$$u_t = u_{xx} - q(x)u, \quad 0<x<L, \quad 0<t\le T, \tag{1}$$

$$u_x(0,t)=\alpha_1(t), \quad 0<t\le T, \tag{2}$$

$$u(L,t)=0, \quad 0<t\le T, \tag{3}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad 0\le x\le L. \tag{4}$$

Пусть относительно решения прямой задачи (1)–(4) известна дополнительная информация вида:

$$u(0,t)=f(t), \quad 0<t\le T. \tag{5}$$

Обратная задача: По известной дополнительной информации (5) найти функции $q(x)$, $u(x,t;q(x))$ из соотношений (1)–(4).

Здесь и в дальнейшем выражение $u(x,t;q(x))$ обозначает особую зависимость функции $u(x,t)$ от коэффициента $q(x)$.

Пусть $p(x)$ — приближенное решение обратной задачи.

Рассмотрим функционал невязки

$$J(p)=\int_0^T [u(0,t;p)-f(t)]^2\,dt. \tag{6}$$

Суть оптимизационного метода состоит в следующем: задаем начальное приближение $p^{(0)}(x)$, последующие приближения определяем из соотношений:

$$p^{(n+1)}(x)=p^{(n)}(x)-\alpha_n\nabla J\left(p^{(n)}\right),\ n=0,1,2,\ldots \tag{7}$$

Здесь $\nabla J\left(p^{(n)}\right)$ — градиент функционала (6).

Рассмотрим приращения $p(x)+\delta p(x)$ и $\delta u=u(x,t;p+\delta p)-u(x,t;p)$.

Тогда приращение функционала $J(p+\delta p)-J(p)$ имеет вид:

$$\Delta J(p+\delta p)-J(p)=2\int_0^T[u(0,t;p)-f(t)]\delta u(0,t)dt+\int_0^T\delta^2u(0,t)dt.$$

По аналогии, как в работах [1, 2], получим формулу для вычисления градиента, который примет вид:

$$\nabla J(p)=\int_0^T u(x,t)\psi(x,t)dt, \tag{8}$$

где $\psi(x,t)$ есть решение сопряженной задачи вида:

$$\psi_t=-\psi_{xx}+p(x)\psi, \quad 0<x<L, \quad 0<t\le T, \tag{9}$$

$$\psi(x,T)=0, \quad 0\le x\le L, \tag{10}$$

$$\psi(L,t)=0, \quad 0<t\le T, \tag{11}$$

$$\psi_x(0,t)=2[u(0,t;p)-f(t)], \quad 0<t\le T. \tag{12}$$

Приведем общую схему оптимизационного метода на дифференциальном уровне:

1^0. Задаем начальное приближение $p^{(0)}(x)$ и решаем прямую задачу (1)–(4), полагая в ней $q(x)=p^{(0)}(x)$, находим $u^{(0)}(x,t;p^{(0)}(x))$.

2^0. Вычисляем значение функционала (6). Если он достиг минимума, то примем $p^{(0)}(x)$ за приближенное решение обратной задачи, если нет, то далее.

3^0. Вычисляем краевое условие (12) и при $p(x)=p^{(0)}(x)$, решаем задачу (9)–(12), получим ее решение $\psi^{(0)}(x,t;p^{(0)}(x))$.

4^0. Вычисляем градиент функционала из (8), получим $\nabla J\left(p^{(0)}(x)\right)$.

5^0. По формуле (7) находим очередное приближение $p^{(1)}(x)$.

6^0. Вновь вычисляем значение функционала (6). Если он достиг минимума, то полагаем в качестве приближенного решения функцию $p(x)=p^{(1)}(x)$, если нет, то, полагая $p^{(0)}(x)=p^{(1)}(x)$, возвращаемся к пункту 3^0.

Замечание 1. При описании алгоритма оптимизационного метода на дифференциальном уровне, мы полагаем, что решение прямой и сопряженной задачи в классическом смысле существует единственно и устойчиво. Также полагаем, что для решения прямой и сопряженной задач применяются классические методы их решения.

Данный алгоритм решения оптимизационной задачи будет использоваться нами на дискретном уровне.

§2. Дискретный аналог оптимизационного метода

Пусть $p(x_i)$ — приближенное решение обратной задачи.

Аппроксимируем задачу (1)–(4) следующей разностной схемой:

$$y_t = y^{j+1}_{\bar{x}x} - py^{j+1}, \quad (x_i,t_j)\in\omega_{h\tau}, \tag{13}$$

$$y^j_{x,0} = \alpha_1(t_j), \quad 0<t_j\le M\tau = T, \tag{14}$$

$$y^j_N = 0, \quad 0<t_j\le M\tau = T, \tag{15}$$

$$y^0_i = u_0(x_i), \quad x_i\in\overline{\omega}_h. \tag{16}$$

Здесь $\overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau$ — сеточная аппроксимация области $Q=[0,L]\times[0,T]$; $\overline{\omega}_h=\{x_i=ih,\ i=\overline{0,N},\ h=1/N\}$; $\overline{\omega}_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=\overline{0,M},\ \tau=T/M\}$; $y(x_i,t_j)$ — сеточная аппроксимация функции $u(x,t)$.

Пусть относительно разностной прямой задачи (13)–(16) известна дополнительная информация:

$$y^j_0 = f(t_j), \quad 0\le t_j\le M\tau. \tag{17}$$

Замечание 2. Можно использовать и другую аппроксимацию задачи (1)–(4), используя классическую теорию разностных схем [3] и использовать приведенную ниже схему исследования. Но для простоты рассуждения мы остановимся на приведенной разностной схеме.

Рассмотрим один из вариантов дискретного аналога функционала (6), например вида

$$J[p]=\tau\sum_{j=1}^{M}\left[y^j_0\{p_i\}-f^j\right]^2. \tag{18}$$

Зададим приращение $p_i+\delta p_i$, и $\delta y^j_i = y^j_i\{p_i+\delta p_i\}-y^j_i\{p_i\}$.

В дальнейшем будем использовать обозначение $y^j_i\{p_i\}$, показывающее особую зависимость сеточной функции y^j_i от искомого коэффициента p_i.

Относительно приращения δy^j_i нетрудно получить следующую разностную задачу:

$$\delta y_t = \delta y^{j+1}_{\bar{x}x} - y^{j+1}\delta p - p\delta y^{j+1}, \qquad (x_i,t_j)\in\omega_{h\tau}, \tag{19}$$

$$\delta y^{j+1}_x(0,t_j)=0, \qquad 0<t_j\le T, \tag{20}$$

$$\delta y^{j+1}(L,t_j)=0, \qquad 0<t_j\le T, \tag{21}$$

$$\delta y(x_i,0)=0, \qquad x_i\in\overline{\omega}_h . \tag{22}$$

Перейдем к выводу разностного аналога градиента для функционала (18).

Умножим обе части разностного соотношения (19) на сеточную функцию $\tau h\psi_i^j$ и затем просуммируем по j от 1 до $M-1$ и по индексу i от 1 до $N-1$, имеем:

$$\tau\sum_{j=1}^{M-1}h\sum_{i=1}^{N-1}\left(\delta y_t\right)_i^j\,\psi_i^j=\tau\sum_{j=1}^{M-1}h\sum_{i=1}^{N-1}\delta y_{\bar{x}x}^{j+1}\psi_i^j-\tau\sum_{j=1}^{M-1}h\sum_{i=1}^{N-1}\left[p_i(\delta y)_i^{j+1}+y_i^{j+1}(\delta p)_i\right]\psi_i^j . \tag{23}$$

Применим к последнему разностный аналог интегрирования по частям. Рассматривая левые и правые части последнего соотношения в отдельности, при этом обозначая их через S_1, S_2, S_3, получим цепочку соотношений:

$$S_1=h\sum_{i=1}^{N-1}\tau\sum_{j=1}^{M-1}\frac{\delta y_i^{j+1}-\delta y_i^j}{\tau}\psi_i^j=h\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}\Delta\delta y_i^{j+1}\psi_i^j .$$

Здесь и далее применим разностные аналоги интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}(y,\nabla v)&=-\left[v,\Delta y\right)+y_Nv_{N-1}-y_0v_0,\\ (y,\Delta v)&=-\left(v,\nabla y\right]+y_Nv_N-y_0v_1,\end{aligned} \tag{24}$$

где $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$; $\nabla y_i=y_i-y_{i-1}$; $(y,v)=\sum_{i=1}^{N-1}y_iv_i$; $\left(y,v\right]=\sum_{i=1}^{N}y_iv_i$.

Тогда, используя (24), получим, что

$$S_1=h\sum_{i=1}^{N-1}\left[-(\delta y_i^j,\nabla\psi_i^j)^j+\psi_i^M\delta y_i^M-\psi_i^0\delta y_i^1\right],$$

$$S_2=-\tau\sum_{j=1}^{M-1}h\sum_{i=1}^{N-1}\left[p_i\delta y_i^{j+1}+y_i^{j+1}\delta p_i\right]\psi_i^j ,$$

$$S_3=\tau\sum_{j=1}^{M-1}h\sum_{i=1}^{N-1}\delta y_{\bar{x}x}^{j+1}\psi_i^j .$$

Займемся преобразованием соотношения S_3 правой части уравнения (23), при этом запишем ее в виде:

$$S_3=\tau\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{\delta y_{i+1}^{j+1}-\delta y_i^{j+1}}{h}-\frac{\delta y_i^{j+1}-\delta y_{i-1}^{j+1}}{h}\right)\psi_i^j=\tau\frac{1}{h}\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\Delta\delta y_i^{j+1}\psi_i^j-\nabla\delta y_i^{j+1}\psi_i^j\right).$$

Используя разностные аналоги интегрирования по частям (25), получим:

$$S_3=\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(-\left(\delta y_i^j,\nabla\psi_i^j\right]_i+\psi_N\delta y_N-\psi_0\delta y_1+\left[\delta y_i^j,\Delta\psi_i^j\right)_i-\delta y_{N-1}\psi_N-\psi_0\delta y_0\right).$$

Раскрыв скалярные произведения, имеем:

$$S_3=\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left[-\sum_{i=1}^{N}\delta y_i^{j+1}\nabla\psi_i^j+\sum_{i=1}^{N-1}\delta y_i^{j+1}\Delta\psi_i^j+\psi_N\delta y_N-\psi_0\delta y_1-\delta y_{N-1}\psi_N-\psi_0\delta y_0\right].$$

Далее, раскрыв суммы и объединяя их вновь, получим:

$$\begin{aligned}S_3=\tau\sum_{j=1}^{M-1}\Bigg[-\sum_{i=1}^{N-1}\delta y_i^{j+1}(\Delta\psi_i^j-\nabla\psi_i^j)+\psi_N^j\delta y_N^{j+1}-\psi_0^j\delta y_1^{j+1}-\delta y_{N-1}^{j+1}\psi_N^j-\psi_0^j\delta y_0^{j+1}-\delta y_N^{j+1}(\psi_N^j-\psi_{N-1}^j)+\\ +\delta y_0^{j+1}(\psi_1^j-\psi_0^j)\Bigg]=\tau\sum_{j=1}^{M-1}\Bigg[-\sum_{i=1}^{N-1}\delta y_i^j(\Delta\psi_i^j-\nabla\psi_i^j)+\psi_N^j\delta y_N^{j+1}-\psi_0^j\delta y_1^{j+1}-\delta y_{N-1}^{j+1}\psi_N^j+\\ +\psi_0^j\delta y_0^{j+1}-\psi_N^j\delta y_N^{j+1}+\psi_{N-1}^j\delta y_N^{j+1}+\delta y_0^{j+1}\psi_1^j-\psi_0^j\delta y_0^{j+1}\Bigg].\end{aligned}$$

Учитывая соотношение S_1, S_2, S_3, запишем исходное уравнение (23) иначе:

$$\begin{aligned}h\sum_{i=1}^{N-1}\left[-(\delta y_i^j,\nabla\psi_i^j)^j+\psi_i^M\delta y_i^M-\psi_i^0\delta y_i^1\right]=\\ =\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left[-\sum_{i=1}^{N-1}\delta y_i^{j+1}(\Delta\psi_i^j-\nabla\psi_i^j)+\psi_{N-1}^j\delta y_N^{j+1}+\delta y_0^{j+1}\psi_1^j-\delta y_{N-1}^{j+1}\psi_N^j-\psi_0^j\delta y_1^{j+1}\right]+S_2+S_3 .\end{aligned} \tag{25}$$

Введем в рассмотрение сопряженную задачу:

$$\psi_{\bar{t}} = -\psi^{j-1}_{\bar{x}x} + p_i \psi^{j-1}, \qquad j = M, M-1, \ldots, 2, \tag{26}$$

$$\psi_i^M = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, N, \tag{27}$$

$$\psi_N^{j-1} = 0, \quad j = M, M-1, \ldots, 1, \tag{28}$$

$$\psi^{j-1}_{x,0} = 2\left[y_0^j \left\{ p_i \right\} - f^j \right], \quad j = M, M-1, \ldots, 2. \tag{29}$$

Далее, учитывая условия (20)–(22), а также (26)–(29), соотношение (25) примет вид:

$$h\tau \sum_{i=1}^{N-1} \delta p_i y_i^0 \psi_i^1 = \tau \sum_{j=2}^{M} 2\left[y_0^j - f^j \right] \cdot \delta y_0^j - \tau \sum_{j=2}^{M} h \sum_{i=1}^{N-1} \delta p_i y_i^j \psi_i^{j-1}.$$

Таким образом, окончательно получим, что приращение функционала имеет вид:

$$\Delta J(p) = h \sum_{i=1}^{N-1} \delta p_i \cdot \tau \sum_{j=2}^{M} y_i^j \psi_i^{j-1} + \tau h \sum_{i=1}^{N-1} y_i^0 \psi_i^1 \delta p_i ,$$

откуда градиент функционала

$$\nabla J(p) = \tau y_i^0 \psi_i^1 + \tau \sum_{j=2}^{M} y_i^j \psi_i^{j-1}. \tag{30}$$

Приведем общую схему оптимизационного метода на дискретном уровне:

1^0. Задаем начальное приближение $p^{(0)}(x_i)$ и решаем прямую задачу (13)–(16), находим $y^{(0)}\left\{ x_i, t_j; p^{(0)}(x_i) \right\}$.

2^0. Вычисляем краевое условие (29), и при $p_i(x_i) = p^{(0)}(x_i)$ решая сопряженную задачу (26)–(29), получим ее решение $\psi_i^{(0)}\left\{ x_i, t_j; p^{(0)}(x_i) \right\}$.

3^0. Вычисляем градиент функционала по формуле (30).

4^0. По методу спуска (7) находим очередное приближение $p^{(1)}(x_i)$.

5^0. Вычисляем значение функционала (18). Если он достиг минимума, то полагаем в качестве приближенного решения обратной задачи функцию $p(x_i) = p^{(1)}(x_i)$, если нет, то, полагая $p^{(0)}(x_i) = p^{(1)}(x)$, возвращаемся к пункту 2^0.

Заключение

При численной реализации оптимизационного метода решения обратной коэффициентной задачи эффективным является дискретный подход, описанный в параграфе 2. Эффективность этого подхода для обратной коэффициентной задачи для уравнения гиперболического типа показана в работе [4].

Список литературы

1. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
2. *Кабанихин С.И., Искаков К.Т.* Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2001. — 316 с.
3. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 656 с.
4. *Карчевский А.Л.* Схема действий при численном решении обратной задачи оптимизационным методом // Сиб. электронные математические известия. — Т. 5. — С. 609–619.