Теорема 1 доказана.

Для тригонометрического случая подобная теорема ранее была доказана С.Ю.Тихоновым [4].

Список литературы

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. — М.: Наука, 1987. — 344 с.
2. *Leindler.* On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series // Analysis Mathematica. — 2001. — Vol. 27. — P. 279–285.
3. *Potapov M. K. and Berisha M.* // Publ. Inst. Math. — Beograd (N.S.), 1979. — № 26(40). — P. 215–228.
4. *Tikhonov S.Yu.* On the integrability of trigonometric series // Mathematical Notes. — 2005. — Vol. 78. — № 3. — P. 437–442.

УДК 519 644

Д.Н.Кулбаева

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ К КВАДРАТУРНЫМ ФОРМУЛАМ КОРОБОВА

Функционалдарды тензорлы көбейту әдісі сандық интегралдауға қатысты дамыту есебінде қарастырылған. Берілген модельді жағдайдың мақсаты Коробов кластарында сандық интегралдаудың қателігін теориялық тұрғыдан бағалау және еспептеуіш тәжірибелер жүргізіп, белгілі жұмыстармен салыстыру болып табылады.

The problem of the given work consists in the further development of a method тензорных products of functionals применительно to a problem of numerical integration. The research plan in the given situation consists in the following: at first the general theoretical outcome with an estimation of an error of numerical integration for classes Коробова will be received. Then computing experiments for comparison of the received four-dimensional quadrature formulas with earlier known works will be made.

К основным математическим моделям относится понятие интеграла — одна из центральных и постоянно повторяющихся тем в истории математики за последние два тысячелетия (см. [1; 199]).

Исследования реальных явлений математическими методами проводятся по схеме: от наблюдений и экспериментов к построению математической модели с последующим её изучением математическими средствами; завершаются выводами в рамках модели и их сравнением с реальными фактами.

Мощным стимулом к применению математических методов к практическим задачам, своего рода математической экспансией, послужило появление в середине XX в. электронных вычислительных машин (компьютеров), позволяющих в режиме реального (полиномиального) времени получать приемлемые решения в виде чисел.

Тем самым задача приближенного вычисления интегралов относится к актуальным задачам математики и информатики, в последнее время именуемым как «Научные вычисления (Computing Science)».

К известным методам теории приближений относится «Метод Смоляка», который позволяет переносить результаты о приближениях функционалов меньших размерностей на большие [2, 3].

«Метод Смоляка» описан им самим как метод «тензорных произведений классов». Н.Темиргалиевым [4, 5] был исследован механизм действия «Метода Смоляка» и предложен «метод тензорного произведения функционалов», эффективность которых показана в публикациях [6, 7].

Конкретная реализация «Метода Смоляка», когда в качестве исходных была принята одномерная квадратурная формула $\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} f\left(\frac{k}{2^n}\right)$ с равными весами и равномерной сеткой, была предметом изучения математиков из разных стран. Среди них можно отметить группу ученых, работающих по теме под названием «Теория информационной сложности», в составе Дж. Трауба, Х.Вожняковского, Г.Василковского, С.Пашкова, а также Е.Нурсултанова, Н.Тлеуханову, Н.Темиргалиева, С.С.Кудайбергенова, А.А.Шоманову (подробные исторические сведения и техника, лежащая в основе «Метода Смоляка» применительно к численному интегрированию, даны в [8]).

Приведем необходимые определения и факты о тензорных произведениях функционалов.

Пусть даны целые положительные числа s, $d_1,...,d_s$ и пусть для каждого j ($j=1,2,...,s$) задана ортогональная (быть может, с весом) и нормированная на измеримом (здесь и всюду ниже — в смысле Лебега) множестве E_j, $E_j \subset R^{d_j}$ полная система $\left\{\phi^{(j)}_{m_j}\left(x_j\right)\right\}_{m_j\in M_j}$, где $M_j \subset Z^{d_j}$.

Пусть для каждого j на множестве, составленном из всех функций соответствующей ортонормированной системы, задан функционал $B^{(j)}$.

Тогда согласно [3] определенный на всех функциях ортонормированной на $\mathrm{E}\equiv \mathrm{E}_1\times\ldots\times \mathrm{E}_s \subset R^d$ $\left(d=d_1+...+d_s\right)$ полной системы

$$\Phi_m\left(x\right)\equiv \Phi_{m_1,...,m_s}\left(x_1,...,x_s\right)\equiv\prod_{j=1}^{s}\phi^{(j)}_{m_j}\left(x_j\right)\quad \left(m\equiv\left(m_1,...,m_s\right)\in M_1\times...\times M_s\equiv M\right),$$

функционал

$$\mathrm{B}\left(\Phi_{\mathrm{m}}\right)=\mathrm{B}\left(\Phi_{m_1,...,m_s,}\right)=\prod_{j=1}^{s}B^{(j)}\left(\phi^{(j)}_{m_j}\right)$$

называют *тензорным произведением функционалов* $B^{(1)},...,B^{(s)}$ и обозначают

$$\mathrm{B}=\mathrm{B}^{(1)}\otimes\ldots\otimes \mathrm{B}^{(s)}\equiv\otimes\prod_{j=1}^{s}B^{(j)}.$$

Всюду ниже, без каких-либо дополнительных сообщений, все привлекаемые к рассмотрению функции, вообще говоря, комплекснозначные, будут предполагаться измеримыми в смысле Лебега, интеграл будет пониматься в смысле Лебега, каждая ортонормированная система будет предполагаться полной (быть может, с соответствующим весом). Таким образом, с каждой функцией, допускающей разложение по такой системе в ряд Фурье-Лебега, с точностью до почти всюду будет связан единственный набор коэффициентов Фурье по этой системе.

Далее функционал В допускает распространение на множество, составленное из всех функций f, определенных на E, для которых абсолютно сходится числовой ряд $\sum\limits_{\mathrm{m}\in\mathrm{M}}\left\langle f,\Phi_m\right\rangle B\left(\Phi_m\right)$, где $<,>$ — скалярное произведение (в весовом случае с весом, обеспечивающим ортогональность), если принять в качестве $B(f)$ значение суммы этого ряда.

Ясно, что множества определения функционалов $B^{(j)}$ также могут быть расширены в этом же смысле.

Пусть для каждого $j=1,...,s$ имеется последовательность функционалов $\theta^{(j)}_{t_j}\left(t_j\in Z, t_j\ge t_j^{(0)}\ge 0\right)$, определенных (по крайней мере) на всех функциях системы $\left\{\phi^{(j)}_{m_j}\left(x_j\right)\right\}_{m_j\in M_j}$ и такая, что для каждой функции этой системы имеет место равенство

$$\sum_{t_j\ge t_j^{(0)}}\theta^{(j)}_{t_j}\left(\phi^{(j)}_{m_j}\right)=B^{(j)}\left(\phi^{(j)}_{m_j}\right), \tag{1}$$

или, что то же самое, для частичных сумм

$$\alpha^{(j)}_{\mu_j}\left(\phi^{(j)}_{m_j}\right)=\sum_{t_j^{(0)}\le t_j\le\mu_j}\theta^{(j)}_{\nu_j}\left(\phi^{(j)}_{m_j}\right)$$

выполнено

$$\lim_{\mu_j\to\infty}\alpha^{(j)}_{\mu_j}\left(\phi^{(j)}_{m_j}\right)=B^{(j)}\left(\phi^{(j)}_{m_j}\right).$$

Тогда, в условиях приведенных определений и обозначений имеет место основное в рассматриваемом круге вопросов равенство, заключенное в следующей теореме.

Теорема А [4]**.** Пусть даны вектор $t^{(0)}=\left(t_1^{(0)},\ldots,t_s^{(0)}\right)$ с целыми неотрицательными компонентами и конечное множество Ω, $t^{(0)}\in\Omega\subset Z^s_{t^{(0)}}\equiv\left\{\left(t_1,\ldots,t_s\right)\in Z^s : t_j\geq t_j^{(0)}\geq 0\ \left(j=1,\ldots,s\right)\right\}$. Тогда для всякой функции $f(x)$, определенной на измеримом множестве $E\subset R^d$, имеет место равенство

$$\left(B^{(1)}\otimes\ldots\otimes B^{(s)}\right)(f)\text{-}\sum_{(t_1,\ldots,t_s)\in\Omega}\left(\theta^{(1)}_{t_1}\otimes\ldots\otimes\theta^{(s)}_{t_s}\right)(f)=$$

$$=\sum_{(t_1,\ldots,t_s)\in Z^s_{t^{(0)}}\setminus\Omega}\ \sum_{m\in M}\left\langle f,\Phi_m\right\rangle\prod_{j=1}^{s}\theta^{(j)}_{t_j}\left(\phi^{(j)}_{m_j}\right)=\sum_{m\in M}\left\langle f,\Phi_m\right\rangle\sum_{(t_1,\ldots,t_s)\in Z^s_{t^{(0)}}\setminus\Omega}\ \prod_{j=1}^{s}\theta^{(j)}_{\nu_j}\left(\phi^{(j)}_{m_j}\right), \qquad (2)$$

если только все ряды в (1) и (2) сходятся абсолютно.

Рассмотрим следующую конкретизацию в (2) ортонормированной системы и функционалов.

Пусть даны простые числа $\ell_1=d_1+1$, $\ell_2=d_2+1$. Для $m\in Z^{d_1}$ и $n\in Z^{d_2}$ положим

$$\phi_m(x)=\phi_{m_1,\ldots,m_{d_1}}\left(x_1,\ldots,x_{d_1}\right)=e^{2\pi i\left(m_1x_1+\ldots+m_{d_1}x_{d_1}\right)}=e^{2\pi i(m,x)},$$

$$\psi_n(y)=\psi_{n_1,\ldots,n_{d_2}}\left(y_1,\ldots,y_{d_2}\right)=e^{2\pi i\left(n_1y_1+\ldots+n_{d_2}y_{d_2}\right)}=e^{2\pi i(n,y)},$$

определенные на множествах E и F соответственно, где $E=[0,1]^{d_1}$, $F=[0,1]^{d_2}$.

$$\Phi_{m,n}(x,y)\equiv\phi_{m_1,\ldots,m_{d_1}}\left(x_1,\ldots,x_{d_1}\right)\cdot\psi_{n_1,\ldots,n_{d_2}}\left(y_1,\ldots,y_{d_2}\right)=e^{2\pi i\left(m_1x_1+\ldots+m_{d_1}x_{d_1}+n_1y_1+\ldots n_{d_2}y_{d_2}\right)}=e^{2\pi i\left((m,x)+(n,y)\right)}.$$

Для функции $f(x,y)\in L(E\times F)$ и $(m,n)\in Z^{d_1+d_2}$ через $\hat{f}(m,n)$ будем обозначать тригонометрические коэффициенты Фурье-Лебега:

$$\hat{f}(m,n)=\int_{[0,1]^{d_1+d_2}}f(x,y)e^{-2\pi i\left((m,x)+(n,y)\right)}dxdy.$$

Для заданных векторов $m=\left(m_1,\ldots,m_{d_1}\right)\in Z^{d_1}$ и $n=\left(n_1,\ldots,n_{d_2}\right)\in Z^{d_2}$ функционалы B и D определим как

$$B(f)=\int_E f\left(x_1,\ldots,x_{d_1}\right)dx_1\ldots dx_{d_1} : L(E)\ni f\to C,$$

$$D(g)=\int_F g\left(y_1,\ldots,y_{d_2}\right)dy_1\ldots dy_{d_2} : L(F)\ni g\to C.$$

Тогда, по определению тензорных произведений функционалов для каждой функции $f(x,y): E\times F\to C$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье-Лебега, с учетом

$$B\left(\phi_{m_1,\ldots,m_{d_1}}\left(x_1,\ldots,x_{d_1}\right)\right)=B\left(e^{2\pi i\left(m_1x_1+\ldots+m_{d_1}x_{d_1}\right)}\right)=\int_{[0,1]^{d_1}}e^{2\pi i\left(m_1x_1+\ldots+m_{d_1}x_{d_1}\right)}dx_1\ldots dx_{d_1}=$$

$$=\begin{cases}1, & \text{если } m_1=\ldots=m_{d_1}=0\\ 0, & \text{в остальных случаях}\end{cases},$$

$$D\left(\psi_{n_1,\ldots,n_{d_2}}\left(y_1,\ldots,y_{d_2}\right)\right)=D\left(e^{2\pi i\left(n_1y_1+\ldots+n_{d_2}y_{d_2}\right)}\right)=\int_{[0,1]^{d_2}}e^{2\pi i\left(n_1y_1+\ldots+n_{d_2}y_{d_2}\right)}dy_1\ldots dy_{d_2}=$$

$$\begin{cases}1, & \text{если } n_1=\ldots=n_{d_2}=0\\ 0, & \text{в остальных случаях}\end{cases}$$

имеем

$$S\left(f(x,y)\right)\stackrel{def}{=}(B\otimes D)\left(f(x,y)\right)=(B\otimes D)\left(\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat{f}(m,n)\Phi_{m,n}(x,y)\right)=$$

$$=\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat{f}(m,n)B\otimes D\left(\Phi_{m,n}(x,y)\right)=\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat{f}(m,n)B\left(\phi_m(x)\right)\cdot D\left(\psi_n(y)\right)=$$

$$=\hat{f}(0,0)=\int_{E\times F}f(x,y)dxdy.$$

Сетку вида

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\}, ..., \left\{ \frac{a_d k}{p} \right\} \right), \quad (k = 1, 2, ..., p),$$

где p и a_i $(i = 1, ..., s)$ взаимно просты, будем называть сеткой Коробова.

Пусть даны простые числа l_1 и l_2, $d_1 = l_1 - 1$, $d_2 = l_2 - 1$ и пусть $\{p_\tau\}_{\tau=1}^{\infty}$ и $\{\rho_\kappa\}_{\kappa=1}^{\infty}$ строго возрастающие последовательности простых чисел, таких что $p_\tau = 1 \bmod (l_1)$, $\rho_\kappa = 1 \bmod (l_2)$, и удовлетворяют условиям $[\ln p_\tau] < [\ln p_{\tau+1}]$, $[\ln \rho_\kappa] < [\ln \rho_{\kappa+1}]$ $(\tau, \kappa = 1, 2, ...)$.

В качестве фунционалов $\alpha_\tau(f)$ и $\beta_\kappa(g)$ возьмем функционалы

$$\alpha_\tau(f) = \frac{1}{p_\tau} \sum_{k=1}^{p_\tau} f\left(\left\{ \frac{a_1^{(\tau)} k}{p_\tau} \right\}, ..., \left\{ \frac{a_{d_1}^{(\tau)} k}{p_\tau} \right\} \right), \ \beta_\kappa(g) = \frac{1}{\rho_\kappa} \sum_{t=1}^{\rho_\kappa} f\left(\left\{ \frac{b_1^{(\kappa)} t}{\rho_\kappa} \right\}, ..., \left\{ \frac{b_{d_2}^{(\kappa)} t}{\rho_\kappa} \right\} \right).$$

Положим

$$\begin{cases} \theta_1 = \alpha_1 \\ \theta_\tau = \alpha_\tau - \alpha_{\tau-1}, \ \tau \geq 2 \end{cases}, \begin{cases} \lambda_1 = \beta_1 \\ \lambda_\kappa = \beta_\kappa - \beta_{\kappa-1}, \ \kappa \geq 2 \end{cases}.$$

Пусть дано $c > 0$. Через $\Omega_q^{(c)}$ обозначим непустое множество

$$\left\{ (\tau, \kappa) \in Z_+^2 : \tau \geq 1, \kappa \geq 1, [\ln p_\tau] + [\ln \rho_\kappa] \leq q, \ \exists (\tau_0, \kappa_0) : q - c \leq \left[\ln p_{\tau_0} \right] + \left[\ln \rho_{\kappa_0} \right] \leq q \right\},$$

где $q \in N$ и $q \geq [\ln p_1] + [\ln \rho_1]$.

Таким образом, параметр q, $q \geq [\ln p_1] + [\ln \rho_1]$ будет также зависеть от c и, разумеется, от последовательностей $\{p_\tau\}_{\tau=1}^{\infty}$, $\{\rho_\kappa\}_{\kappa=1}^{\infty}$. Такие q мы будем называть c-допустимыми.

Далее сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений.

Как и в [9] через $\delta_p(m)$ обозначим величину

$$\delta_p(m) = \begin{cases} 1, \text{ если } m \equiv 0 \bmod (p), \\ 0, \text{ если } m \not\equiv 0 \bmod (p). \end{cases}$$

Лемма 1 [9; 22]. При любом a и натуральном p выполняется равенство

$$\delta_p(a) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ak}{p}}.$$

Теорема К [9; 96]. Пусть p пробегает последовательность простых чисел, больших d. Существуют целые $a_1 = a_1(p), ..., a_d = a_d(p)$, взаимно простые с p и такие, что для любого $r > 1$ выполняются оценки:

$$\sum_{m_1, ..., m_d = -\infty}^{\infty}{}_{\gamma} \frac{\delta_p(a_1 m_1 + ... + a_d m_d)}{(\bar{m}_1 \cdot ... \cdot \bar{m}_d)^r} \underset{d}{<<} \frac{\ln^{r(\gamma-1)} p}{p^r} \underset{d,r}{<<} \frac{\ln^{r\beta} p}{p^r} \ (\gamma = 1, 2, ..., d, \ \beta \geq d - 1),$$

где $\gamma \geq 1$ и сумма $\sum_\gamma$ распространена на системы целых $(m_1, ..., m_d)$, содержащие ровно γ величин m_j, отличных от нуля.

На основе изложенных выше определений и утверждений получим следующую квадратурную формулу:

$$\Lambda_q = \sum_{(\tau,\kappa) \in \Omega_q^{(c)} \subset Z_+^2} \theta_\tau \otimes \lambda_\kappa (f(x, y)) = \sum_{(\tau,\kappa) \in \Omega_q^{(c)}} ((\alpha_\tau - \alpha_{\tau-1}) \otimes (\beta_\kappa - \beta_{\kappa-1}))(f(x, y)) =$$

$$= \sum_{(\tau,\kappa) \in \Omega_q^{(c)} \subset Z_+^2} \left(\sum_{\varepsilon=0}^{1} \sum_{\sigma=0}^{1} (-1)^{\varepsilon+\sigma} \alpha_{\tau-\varepsilon} \otimes \beta_{\kappa-\sigma} \right) (f(x, y)).$$

Оценим количество узлов в ней. Сначала оценим сверху:

$$N_q = \sum_{\substack{(\tau,\kappa) \in Z_+^2 : [\ln p_\tau] + [\ln \rho_\kappa] \leq q \\ \tau \geq 1, \kappa \geq 1}} p_\tau \cdot \rho_\kappa.$$

Отметим, что если $(\tau,\kappa)\in\Omega_q$, то $\ln p_\tau\cdot\rho_\kappa\le q+2$, т.е. $p_\tau\cdot\rho_\kappa\le e^{q+2}$. Далее, из неравенств $1\le[\ln p_1]<[\ln p_2]<\ldots<[\ln p_n]$, $1\le[\ln\rho_1]<[\ln\rho_2]<\ldots<[\ln\rho_n]$ и $1<2<\ldots<n$ следует, что $\tau\le[\ln p_\tau]$, $\kappa\le[\ln\rho_\kappa]$. Отсюда имеем выполнение неравенства

$$N_q<<e^q\cdot q^2.$$

Теперь перейдем к оценке снизу: так как по определению множества $\Omega_q^{(c)}$ найдутся (τ_0,κ_0) такие, что $q-c\le\left[\ln p_{\tau_0}\right]+\left[\ln\rho_{\kappa_0}\right]\le q$, тогда $N_q\ge e^{q-c}$. Отсюда получим $e^q\underset{c}{<<}N_q<<e^q q^2$.

Таким образом, имеет место

Теорема 1. Для всякого $q\in N$ такое, что $q\ge[\ln p_1]+[\ln\rho_1]$ и для каждой функции $f(x,y):E\times F\to C$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье-Лебега имеет место равенство

$$\int\limits_{[0,1]^{d_1+d_2}} f(x,y)dxdy-\sum_{(\tau,\kappa)\in\Omega_q^{(c)}\subset Z_+^2}\left(\sum_{\varepsilon=0}^{1}\sum_{\sigma=0}^{1}(-1)^{\varepsilon+\sigma}\alpha_{\tau-\varepsilon}\otimes\beta_{\kappa-\sigma}\right)(f(x,y))=$$

$$=\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat f(m,n)\sum_{(\tau,\kappa)\in Z_+^2\setminus\Omega_q^{(c)}}\theta_\tau(\phi_m(x))\cdot\lambda_\kappa(\psi_n(y)).$$

Доказательство. Поскольку все встречающиеся ряды сходятся абсолютно, то последовательно имеем

$$S(f(x,y))=(B\otimes D)(f(x,y))=\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat f(m,n)B(\phi_m(x))\cdot D(\psi_n(y))=$$

$$=\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat f(m,n)B\left(e^{2\pi i\left(m_1x_1+\ldots+m_{d_1}x_{d_1}\right)}\right)\cdot D\left(e^{2\pi i\left(n_1y_1+\ldots+n_{d_2}y_{d_2}\right)}\right)=$$

$$=\sum_{(\tau,\kappa)\in Z_+^2}\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat f(m,n)\theta_\tau\left(e^{2\pi i\left(m_1x_1+\ldots+m_{d_1}x_{d_1}\right)}\right)\cdot\lambda_\kappa\left(e^{2\pi i\left(n_1y_1+\ldots+n_{d_2}y_{d_2}\right)}\right).\tag{3}$$

Далее, внутреннюю сумму можно записать и по-иному:

$$\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat f(m,n)\theta_\tau\left(e^{2\pi i\left(m_1x_1+\ldots+m_{d_1}x_{d_1}\right)}\right)\cdot\lambda_\kappa\left(e^{2\pi i\left(n_1y_1+\ldots+n_{d_2}y_{d_2}\right)}\right)\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat f(m,n)(\theta_\tau\otimes\lambda_\kappa)(\Phi_{m,n}(x,y))=$$

$$=(\theta_\tau\otimes\lambda_\kappa)\left(\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat f(m,n)e^{2\pi i((m,x)+(n,y))}\right)=(\theta_\tau\otimes\lambda_\kappa)(f(x,y)).\tag{4}$$

Из (3) и (4) следует утверждение теоремы. Теорема 1 доказана.

Далее, оценим погрешность квадратурной формулы для классов Коробова $E^r_{d_1+d_2}(r>1)$, который, по определению, состоит из всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,\ldots,x_{d_1+d_2})$, тригонометрические коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условию $\left(\overline{m}_i=\max\{1;|m_i|\}\right)$

$$\left|\hat f(m)\right|=\left|\hat f(m_1,\ldots,m_{d_1+d_2})\right|\le\left(\overline{m}_1\cdot\ldots\cdot\overline{m}_{d_1+d_2}\right)^{-r}\ \left(m\in Z^{d_1+d_2}\right).$$

Теорема 2. Пусть даны $r>1$ и $c>0$. Тогда для всех c-допустимых q справедливо неравенство

$$\sup_{f\in E^r_{d_1+d_2}}\left|\int\limits_{[0,1]^{d_1+d_2}}f(x)dx-\sum_{(\tau,\kappa)\in\Omega_q^{(c)}\subset Z_+^2}\left(\sum_{\varepsilon=0}^{1}\sum_{\sigma=0}^{1}(-1)^{\varepsilon+\sigma}\alpha_{\tau-\varepsilon}\otimes\beta_{\kappa-\sigma}\right)(f)\right|\underset{r,\beta,l}{<<}\frac{(\ln N)^{r(\beta+1)+r(\ell+1)+1}}{N^r},$$

$(\beta\ge d_1-1,\ell\ge d_2-1)$, где $N=N_q$.

Доказательство. В силу теоремы 1 имеем

$$\Delta_N\left(f,E^r_{d_1+d_2}\right)=\left|\int\limits_{[0,1]^{d_1+d_2}}f(x)dx-\sum_{(\tau,\kappa)\in\Omega_q^{(c)}\subset Z_+^2}\left(\sum_{\varepsilon=0}^{1}\sum_{\sigma=0}^{1}(-1)^{\varepsilon+\sigma}\alpha_{\tau-\varepsilon}\otimes\beta_{\kappa-\sigma}\right)(f)\right|=$$

$$=\left|\hat f(0)-\sum_{(\tau,\kappa)\in\Omega_q^{(c)}\subset Z_+^2}\left(\sum_{\varepsilon=0}^{1}\sum_{\sigma=0}^{1}(-1)^{\varepsilon+\sigma}\alpha_{\tau-\varepsilon}\otimes\beta_{\kappa-\sigma}\right)(f)\right|=$$

$$=\left|\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat f(m,n)\sum_{(\tau,\kappa)\in Z_+^2\setminus\Omega_q^{(c)}}\theta_\tau\left(e^{2\pi i\left(m_1x_1+\ldots+m_{d_1}x_{d_1}\right)}\right)\cdot\lambda_\kappa\left(e^{2\pi i\left(n_1y_1+\ldots+n_{d_2}y_{d_2}\right)}\right)\right|=$$

$$=\left|\sum_{(m.n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat f(m,n)\sum_{\substack{(1,\kappa)\in Z_+^2\setminus\Omega_q^{(c)}\\ \kappa>1}}\theta_1\left(\phi_m(x)\right)\cdot\lambda_\kappa\left(\psi_n(y)\right)+\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat f(m,n)\sum_{\substack{(\tau,1)\in Z_+^2\setminus\Omega_q^{(c)}\\ \tau>1}}\theta_\tau\left(\phi_m(x)\right)\cdot\lambda_1\left(\psi_n(y)\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat f(m,n)\sum_{(1,1)\in Z_+^2\setminus\Omega_q^{(c)}}\theta_1\left(\phi_m(x)\right)\cdot\lambda_1\left(\psi_n(y)\right)+\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat f(m,n)\sum_{\substack{(\tau,\kappa)\in Z_+^2\setminus\Omega_q^{(c)}\\ \tau>1,\ \kappa>1}}\theta_\tau\left(\phi_m(x)\right)\cdot\lambda_\kappa\left(\psi_n(y)\right)\right|.$$

Так как по условию $q\ge\left[\ln p_1\right]+\left[\ln\rho_1\right]$, случай $\tau=1,\kappa=1$ исключается. Далее имеем

$$\Delta_N\left(f,E^r_{d_1+d_2}\right)=\left|I_1+I_2+I_3\right|\le\left|I_1\right|+\left|I_2\right|+\left|I_3\right|,$$

где

$$I_1=\sum_{(m.n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat f(m,n)\sum_{\substack{(1,\kappa)\in Z_+^2\setminus\Omega_q^{(c)}\\ \kappa>1}}\theta_1\left(\phi_m(x)\right)\cdot\lambda_\kappa\left(\psi_n(y)\right),$$

$$I_2=\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat f(m,n)\sum_{\substack{(\tau,1)\in Z_+^2\setminus\Omega_q^{(c)}\\ \tau>1}}\theta_\tau\left(\phi_m(x)\right)\cdot\lambda_1\left(\psi_n(y)\right),$$

$$I_3=\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat f(m,n)\sum_{\substack{(\tau,\kappa)\in Z^2\setminus\Omega_q^{(c)}\\ \tau>1,\ \kappa>1}}\theta_\tau\left(\phi_m(x)\right)\cdot\lambda_\kappa\left(\psi_n(y)\right).$$

Оценим I_1:

$$\left|I_1\right|=\left|\sum_{\substack{\left[\ln p_1\right]+\left[\ln\rho_\kappa\right]>q\\ \kappa>1}}\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat f(m,n)\cdot\alpha_1\left(e^{2\pi i\left(m_1x_1+\ldots+m_{d_1}x_{d_1}\right)}\right)\left(\beta_\kappa\left(e^{2\pi i\left(n_1y_1+\ldots+n_{d_2}y_{d_2}\right)}\right)-\beta_{\kappa-1}\left(e^{2\pi i\left(n_1y_1+\ldots+n_{d_2}y_{d_2}\right)}\right)\right)\right|=$$

$$=\left|\sum_{\substack{\left[\ln p_1\right]+\left[\ln\rho_\kappa\right]>q\\ \kappa>1}}\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat f(m,n)\cdot\alpha_1\left(e^{2\pi i\left(m_1x_1+\ldots+m_{d_1}x_{d_1}\right)}\right)\beta_\kappa\left(e^{2\pi i\left(n_1y_1+\ldots+n_{d_2}y_{d_2}\right)}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{\substack{\left[\ln p_1\right]+\left[\ln\rho_\kappa\right]>q\\ \kappa>1}}\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\hat f(m,n)\cdot\alpha_1\left(e^{2\pi i\left(m_1x_1+\ldots+m_{d_1}x_{d_1}\right)}\right)\beta_{\kappa-1}\left(e^{2\pi i\left(n_1y_1+\ldots+n_{d_2}y_{d_2}\right)}\right)\right|.$$

В силу леммы 1 и определения класса получим

$$\left|I_1\right|\le\sum_{\substack{\left[\ln p_1\right]+\left[\ln\rho_\kappa\right]>q\\ \kappa>1}}\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\frac{\delta_{p_1}\left(a_1^{(1)}\cdot m_1+\ldots+a_{d_1}^{(1)}\cdot m_{d_1}\right)\delta_{\rho_\kappa}\left(b_1^{(\kappa)}\cdot n_1+\ldots+b_{d_2}^{(\kappa)}\cdot n_{d_2}\right)}{\left(\overline{m}_1\cdot\ldots\cdot\overline{m}_{d_1}\right)^r\left(\overline{n}_1\cdot\ldots\cdot\overline{n}_{d_2}\right)^r}+$$

$$+\sum_{\substack{\left[\ln p_1\right]+\left[\ln\rho_\kappa\right]>q\\ \kappa>1}}\sum_{(m,n)\in Z^{d_1+d_2}}\frac{\delta_{p_1}\left(a_1^{(1)}\cdot m_1+\ldots+a_{d_1}^{(1)}\cdot m_{d_1}\right)\delta_{\rho_{\kappa-1}}\left(b_1^{(\kappa-1)}\cdot n_1+\ldots+b_{d_2}^{(\kappa-1)}\cdot n_{d_2}\right)}{\left(\overline{m}_1\cdot\ldots\cdot\overline{m}_{d_1}\right)^r\left(\overline{n}_1\cdot\ldots\cdot\overline{n}_{d_2}\right)^r}.$$

Далее, в силу теоремы *К* получим

$$\left|I_1\right|\underset{r}{<<}\sum_{\substack{\left[\ln p_1\right]+\left[\ln\rho_\kappa\right]>q\\ \kappa>1}}\frac{\left(\ln p_1\cdot\ln\rho_\kappa\right)^{(\beta+\ell)r}}{\left(p_1\cdot\rho_\kappa\right)^r}+\sum_{\substack{\left[\ln p_1\right]+\left[\ln\rho_\kappa\right]>q\\ \kappa>1}}\frac{\left(\ln p_1\cdot\ln\rho_{\kappa-1}\right)^{(\beta+\ell)\,r}}{\left(p_1\cdot\rho_{\kappa-1}\right)^r}=$$

$$=\sum_{n>q}\sum_{\substack{\left[\ln p_1\right]+\left[\ln\rho_\kappa\right]=n\\ \kappa>1}}\frac{\left(\ln p_1\cdot\ln\rho_\kappa\right)^{(\beta+\ell)r}}{\left(p_1\cdot\rho_\kappa\right)^r}+\sum_{n>q}\sum_{\substack{\left[\ln p_1\right]+\left[\ln\rho_\kappa\right]=n\\ \kappa>1}}\frac{\left(\ln p_1\cdot\ln\rho_\kappa\right)^{(\beta+\ell)r}}{\left(p_1\cdot\rho_\kappa\right)^r}\underset{r,\beta,\ell}{<<}$$

$$\underset{r,\beta,\ell}{<<}\sum_{n>q}\frac{(n+1)^{(\beta+\ell)r}}{e^{nr}}\sum_{\substack{\left[\ln p_1\right]+\left[\ln\rho_\kappa\right]=n\\ \kappa>1}}1+\sum_{n>q}\frac{(n+1)^{(\beta+\ell)r}}{e^{nr}}\sum_{\substack{\left[\ln p_1\right]+\left[\ln\rho_\kappa\right]=n\\ \kappa>1}}1\underset{r,\beta,\ell}{<<}\frac{q^{(\beta+\ell)r+1}}{e^{qr}}.$$

Аналогично доказывается справедливость оценок

$$\left|I_2\right| \underset{r,\beta,\ell}{<<} \frac{q^{(\beta+\ell)r+1}}{e^{qr}}, \quad \left|I_2\right| \underset{r,\beta,\ell}{<<} \frac{q^{(\beta+\ell)r+1}}{e^{qr}}.$$

Далее, в пересчете на количество узлов получим

$$\Delta_N\left(f, E^r_{d_1+d_2}\right) \underset{r,\beta,\ell}{<<} \frac{\left(\ln N\right)^{r(\beta+1)+r(\ell+1)+1}}{N^r}.$$

Теорема доказана.

Численные эксперименты проведены на классах Коробова E^r_4, E^r_8 и E^r_{12}, т.е когда $d_1 = d_2 = d$. При целых положительных r крайней функцией этого класса является алгебраический многочлен Бернулли.

Так же, как и в [7], выпишем крайние функций для классов E^r_{2d}:

при $r = 4$:

$$\sum_{m=(m_1,\dots,m_{2d})\in Z^{2d}} \left(\bar{m}_1,\dots,\bar{m}_{2s}\right)^{-4} e^{2\pi i(m,x)} = \prod_{j=1}^{2d}\left(1 + \frac{\pi^4}{45} - \frac{2\pi^4}{3} x_j^2 \left(1 - x_j\right)^2\right),$$

при $r = 6$

$$\sum_{m=(m_1,\dots,m_{2d})\in Z^{2d}} \left(\bar{m}_1,\dots,\bar{m}_{2d}\right)^{-6} e^{2\pi i(m,x)} = \prod_{j=1}^{2d}\left(1 + \frac{(2\pi)^6}{6!}\left(\frac{1}{42} - \frac{1}{2}x_j^2 + \frac{5}{2}x_j^4 - 3x_j^5 + x_j^6\right)\right),$$

при $r = 8$

$$\sum_{m=(m_1,\dots,m_{2d})\in Z^{2d}} \left(\bar{m}_1,\dots,\bar{m}_{2d}\right)^{-8} e^{2\pi i(m,x)} = \prod_{j=1}^{2d}\left(1 + \frac{(2\pi)^8}{8!}\left(\frac{1}{30} - \frac{2}{3}x_j^2 + \frac{7}{3}x_j^4 - \frac{14}{3}x_j^6 + 4x_j^7 - x_j^8\right)\right),$$

при $r = 10$

$$\sum_{m=(m_1,\dots,m_{2d})\in Z^{2d}} \left(\bar{m}_1,\dots,\bar{m}_{2d}\right)^{-10} e^{2\pi i(m,x)} = \prod_{j=1}^{2d}\left(1 + \frac{(2\pi)^{10}}{10!}\left(\frac{5}{66} - \frac{3}{2}x_j^2 + 5x_j^4 - 7x_j^6 + \frac{15}{2}x_j^8 - 5x_j^9 + x_j^{10}\right)\right).$$

Далее, для описания вычислительного процесса приведем одно утверждение из [7].

Лемма 2 [7]. Пусть даны целые положительные числа p и a. Тогда параллелепипедальную сетку можно записать в виде

$$\zeta_k(a) = \left(\frac{k}{p}, \left\{\frac{k}{p}a_2\right\}, \dots, \left\{\frac{k}{p}a_d\right\}\right), \ (k = 1,\dots,p),$$

где целые положительные числа $a_2,\dots,a_s$ таковы, что

$$a^{\frac{p-1}{l}n} \equiv a_n \left(\operatorname{mod} p\right),\ 0 \le a_n < p,\ \left(n = 2,3,\dots,d\right).$$

При этом алгоритм нахождения чисел $a_2,\dots,a_d$ заключается в последовательном выполнении следующих действий $(k = 1,\dots,p)$:

1) находится целое $a_2 : 0 \le a_2 < p,\ a^{\frac{p-1}{l}} = A_2 p + a_2,\ A_2 \in Z$;

2) находится целое $a_3 : 0 \le a_3 < p,\ a_2 \cdot a_2 = A_3 p + a_3,\ A_3 \in Z$, поскольку

$$\left\{\frac{a^{2\frac{p-1}{l}}}{p}k\right\} = \left\{\frac{a^{\frac{p-1}{l}} \cdot a^{\frac{p-1}{l}}}{p}k\right\} = \left\{\frac{\left(A_2 p + a_2\right)\left(A_2 p + a_2\right)}{p}k\right\} = \left\{\frac{a_2 \cdot a_2}{p}k\right\} = \left\{\frac{A_3 p + a_3}{p}k\right\} = \left\{\frac{a_3}{p}k\right\};$$

3) находится целое $a_4 : 0 \le a_4 < p,\ a_3 \cdot a_2 = A_4 p + a_4,\ A_4 \in Z$, поскольку

$$\left\{\frac{a^{3\frac{p-1}{l}}}{p}k\right\} = \left\{\frac{a^{2\frac{p-1}{l}} \cdot a^{\frac{p-1}{l}}}{p}k\right\} = \left\{\frac{\left(A_3 p + a_3\right)\left(A_2 p + a_2\right)}{p}k\right\} = \left\{\frac{a_3 \cdot a_2}{p}k\right\} = \left\{\frac{A_4 p + a_4}{p}k\right\} = \left\{\frac{a_4}{p}k\right\};$$

...

d–1) находится целое $a_d : 0 \le a_d < p,\ a_{d-1}\cdot a_2 = A_d p + a_d,\ A_d \in Z$, поскольку

$$\left\{\frac{a^{(d-1)\frac{p-1}{l}}}{p}k\right\} = \left\{\frac{a^{(d-2)\frac{p-1}{l}}\cdot a^{\frac{p-1}{l}}}{p}k\right\} = \left\{\frac{\left(A_{d-1}p+a_{d-1}\right)\left(A_2 p+a_2\right)}{p}k\right\} = \left\{\frac{a_{d-1}\cdot a_2}{p}k\right\} = \left\{\frac{A_d p+a_d}{p}k\right\} = \left\{\frac{a_d}{p}k\right\}.$$

Вычисления организованы в следующем порядке.

Пусть даны конечные последовательности простых чисел $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$, $\rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_n$, удовлетворяющие условиям:

$p_\tau = 1\,\mathrm{mod}(l)$, $\rho_\tau = 1\,\mathrm{mod}(l)$, где $l = d+1$;

$\left[\ln p_\tau\right] < \left[\ln p_{\tau+1}\right]$,$\left[\ln \rho_\kappa\right] < \left[\ln \rho_{\kappa+1}\right]$ $\left(\tau,\kappa = 1, 2, \ldots, n\right)$.

Берется число $q \in N$ такое, что $q \ge \left[\ln p_1\right] + \left[\ln \rho_1\right]$. Далее из членов последовательностей $\left\{p_\tau\right\}_{\tau=1}^{n}$ и $\left\{\rho_\kappa\right\}_{\kappa=1}^{n}$ выписываются все возможные пары $\left(p_\tau, \rho_\kappa\right)$, удовлетворяющие условию $\left[\ln p_\tau\right] + \left[\ln \rho_\kappa\right] \le q$. Затем для каждой пары $\left(p_\tau, \rho_\kappa\right)$ вычисляются оптимальные коэффициенты $\left(a_1^{(\tau)},\ldots,a_{d_1}^{(\tau)}\right)$ и $\left(b_1^{(\kappa)},\ldots,b_{d_2}^{(\kappa)}\right)$ по алгоритму леммы 2.

Затем вычисляются величины

$$\Delta\left(r,\ \left\{p_\tau\right\}, \left\{\rho_\kappa\right\}, q\right) = \beta\cdot 10^{-\mu},\ 1 \le \beta \le 10.$$

Величины $\Delta\left(r,\ \left\{p_\tau\right\}, \left\{\rho_\kappa\right\}, q\right)$ разбиваются по группам с одинаковым показателем $\mu(\mu = 1, 2, \ldots)$, из которых в искомую таблицу в обязательном порядке выносятся значения погрешностей с наименьшим числом узлов.

Далее, последовательно увеличивая число q, по указанному выше алгоритму вычисляются следующие погрешности квадратурной формулы, полученные методом тензорных произведений функционалов.

Таблица 1

Оценки погрешности приближенного интегрирования, полученные применением теории дивизоров к построению оптимальных коэффициентов

s = 4				
N	r = 4	r = 6	r = 8	r = 10
41	6,3E–01	1,3E–01	3,2E–02	7,9–03
211	1,10E–02	2,80E–04	7,50E–04	2,00E–07
1151	9,70E–05	2,20E–07	6,10E–10	1,70E–12
s = 12				
N	r = 4	r = 6	r = 8	r = 10
465947	9,5E–01	1,5E–01	3,3E–02	8E–03
1795639	7,9E–02	2,5E–03	1,1E–04	5,4E–06

Таблица 2

Оценки погрешности приближенного интегрирования, полученные методом тензорных произведений функционалов

s = 4				
N	r = 4	r = 6	r = 8	r = 10
49	3,40E–01	7,00E–02	1,60E–02	4,00E–04
315	2,00E–02	1,00E–03	6,30E–05	3,90E–06
1145	3,30E–05	3,00E–06	4,10E–08	4,50E–10
s = 8				
N	r = 4	r = 6	r = 8	r = 10
3721	5,50E–01	8,40E–02	1,80E–02	4,00E–03
33123	6,70E–03	5,80E–04	5,10E–05	3,60E–06
140065	1,20E–03	2,10E–04	9,70E–06	4,00E–07
524036	8,00E–05	2,50E–05	6,20E–07	1,30E–08

Продолжение таблицы 2

s = 12				
N	*r* = 4	*r* = 6	*r* = 8	*r* = 10
299209	7,70E–01	1,00E–01	2,00E–02	4,00E–03
1939115	9,00E–02	1,00E–02	1,20E–03	1,30E–04
5233149	5,50E–03	1,00E–03	6,60E–05	4,10E–06
23574915	6,70E–04	1,90E–04	6,30E–06	1,90E–07

Таблица 3

Оценки погрешности приближенного интегрирования метода Н.М.Коробова и его школы (см. [10])

s = 4				
N	*r* = 4	*r* = 6	*r* = 8	*r* = 10
32	7,20E–01	1,40E–01	3,30E–02	8,00E–03
512	2,00E–03	4,50E–05	1,20E–06	3,30E–08
1024	3,70E–04	2,00E–06	1,2E–08	7,7E–11
2048	1,20E–04	4,80E–07	2,20E–09	1,10E–11
4096	5,40E–05	2,10E–07	8,60E–10	3,60E–12
s = 8				
N	*r* = 4	*r* = 6	*r* = 8	*r* = 10
16384	1,80E–01	3,40E–02	8,00E–03	2,00E–03
262144	1,80E–02	1,00E–03	6,20E–05	3,90E–06
524288	2,10E–03	5,10E–05	1,30E–06	3,50E–08
1048576	4,60E–05	1,40E–07	5,00E–10	0,00E+00
s = 12				
N	*r* = 4	*r* = 6	*r* = 8	*r* = 10
524288	3,00E+00	2,20E+00	2,00E+00	2,00E+00
1048576	2,50E+00	2,10E+00	2,00E+00	2,00E+00
2097152	4,60E–01	9,90E–02	2,40E–02	5,90E–03
4194304	1,50E–01	3,20E–02	7,90E–03	2,00E–03

Результаты проведенных нами вычислительных экспериментов оформлены в виде таблиц 1–3, где $N = N_q$ — число узлов, $\Delta\left(r,\ \{p_\tau\}, \{\rho_\kappa\}, q\right)$ — максимальная погрешность численного интегрирования функций для классов E_4^r, E_8^r и E_{12}^r посредством квадратурной формулы полученных методом тензорных произведений функционалов, примененных к агрегатам Коробова в сравнений с работами [6–7].

Список литературы

1. *Манин Ю.И.* Математика как метафора. — М.: МЦНМО, 2008. — 400 с.
2. *Смоляк С.А.* Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 148. — № 5. — С. 1042–1045.
3. *Смоляк С.А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дис. … канд. физ.-мат. наук. — МГУ, 1965.
4. *Темиргалиев Н.* Тензорные произведения функционалов и их применение к задачам восстановления // Вестн. ЕНУ. — 2004. — № 4. — С. 67–73.
5. *Темиргалиев Н.*Классы $U_s(\beta,\theta,\alpha;\psi)$ и квадратурные формулы // Докл. РАН. — 2003. — Т. 393. — № 5. — С. 605–608.
6. *Темиргалиев Н., Баилов Е.А., Жубанышева А.Ж.* Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных // Докл. РАН. — 2007. — Т. 416. — № 2. — С. 169–173.
7. *Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н., Темиргалиева Ж.Н.* Применение теории дивизоров к построению таблиц оптимальных коэффициентов // ЖВМ и МФ. — 2009. — Т. 49. — № 1. — С. 14–25.
8. *Темиргалиев Н., Кудайбергенов С.С., Шоманова А.А.* Применение тензорных произведений функционалов в задачах численного интегрирования // Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — Т. 73. — № 2. — С. 183–224.
9. *Коробов Н.М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. — М.: МЦНМО, 2004. — 288 с.
10. *Добровольский Н.М., Клепикова Н.Л.* Таблица оптимальных коэффициентов для приближенного вычисления кратных интегралов. Институт общей физики АН СССР. Прикладная математика. Отдел прикладных проблем. Препринт № 63. — М., 1990.