ӘОЖ 517.2

Группалар және оларды оқып-үйренудің әдістемелік аспектілері

The groups and the methodical aspects of their study

Жетпісов Қ.[1], Базылжанова А.С.[1], Жилкибаева Л.К.[2]

[1]*Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті;*
[2]*Қарағанды мемлекеттік техникалық университеті (E-mail: aiger111086@mail.ru)*

В современной алгебре изучение понятия гомоморфизма и методология построения фактор-алгебр основываются на понятии «конгруэнция». В данной статье показано применение базовых конструкций построения фактор-систем и технологий применения теоремы о гомоморфизмах, что демонстрируется на примерах групп. Кроме того, обобщая опыт апробированного изучения теории групп в высших учебных заведениях с позиции современной алгебры, авторы предлагают методику изучения концепций изоморфизма и гомоморфизма и формирования понятия «фактор-группа» на основе отношения конгруэнции.

In the modern algebra the study of the notion of homomorphism and the methodology of factor algebras building are based on the notion «congruence». In the article a using of basic constructions of factor systems building and technologies of a using theorem about homomorphismes are given on examples of groups. In addition generalizing a experience of certified study of the group theory in the institutions of higher education from the position of modern algebra we suggest the method of the isomorphism and homomorphism conceptions studying and the «factor group» notion forming based on the congruence relation.

Группалар теориясының даму тарихын сараптай отырып, «группа» ұғымының пайда болуына негіз болған негізгі үш бастауды көрсетуге болады.

1. Радикалдағы алгебралық теңдеулер жүйесін шешу шеңберіндегі группалар концепциясының дамуы «Радикалдағы алгебралық теңдеулер жүйесін шешуге арналған алмастырулар группасын кездейсоқ пайдаланылған Лагранждан (1771), Руффини (1799) мен Абель (1824) арқылы жұмыстарына группа идеяларын жеткілікті түрде білгендіктен, қолданылған Эварист Галуаға (1830) дейінгі (осы ұғымды өзі енгізген) даму — осы жол, алгебралық теңдеулер теориясы шеңберіндегі бұл идеяның дамуы».

2. Алгебралық теңдеулер теориясынан тәуелсіз геометриялық түрлендірулер группасын қарастырған XIX ғасырдың ортасындағы А.Кэли жұмыстары арқылы геометрияда туындады. Группалар теориясының дамуына өзінің «Эрлангельдік бағдарламасының» («Эрлангенская программа») көмегімен Ф.Клейн маңызды үлес қосты.

3. «Группа» ұғымының негізгі түбірін сандар теориясынан да табуға болады. XVIII ғасырдың өзінде Л.Эйлер берілген санның модулі бойынша салыстыру қатынасымен жұмыс істей отырып, яғни бүтін сандар жиынын бөліктеумен айырымдар класын құрғанда, шын мәнінде, іргелес кластардан тұратын ішкі группалар бойынша группаның жіктелуін пайдаланады.

Жоғары оқу орындарындағы алгебралық пәндер бағдарламаларында оқып-үйренуге ұйғарылатын классикалық алгебралар: группалар, сақиналар, өрістер аксиоматикалы беріледі, яғни әр түрлі аксиомалар жүйесі арқылы анықталады. Әдетте бұл аксиомалар сәйкес сигнатураның предикаттар алгебрасының формальданған тілінде жазылмайды, керісінше, алгебралар қарастырылатын алдын ала берілген негізгі жиындардың нақты амалдарының терминінде жазылады. Сонымен, оларды беру үшін, Евклидтен бастау алатын мағыналы аксиоматика әдісі қолданылады.

Мұндай тұрғының артықшылығы да, кемшіліктері де бар. Оның бір артықшылығы болып, формаль тілдің синтаксисін түбегейлі қарастыруды талап етпейтіндігі және оның бір ғана (табиғи) семантикамен байланыстылығы, яғни нақты алғашқы берілген алгебрамен байланыстылығы. Бірақ сонымен қатар мағыналы аксиоматика әдісі аксиоматикалық сипаттағы алгебралар кластарына көшуді қиындатады. Бұл оның айқын кемшілігі болып табылады.

Осыған қарамастан, мағыналы аксиоматика әдісі студенттерді қазіргі танымды таныстырудың қажетті буыны болып табылады. Формаль аксиоматикалық теория әдісі туралы көзқарасты қалыптастыруға көшу қарапайым аксиоматикаларды оқып-үйренуден басталғаны абзал.

Группаның анықтамасы [1]. Группалар теориясы (оның барлық жерде көрініс табуымен байланысты) алгебралық жүйелерге қатысты жұмыстарды қолдану үшін қажетті құрылымдар, сызбалар, әдістер мен технологиялардың барлық арсеналын паш етудің бірден-бір тамаша мүмкіндігі. Осыған сәйкес, группаның әр түрлі анықтамаларынан бастай отырып, жалпы тұрғы шебінен группалар теориясының базалық әдістерін қарастырамыз.

Группаның екі анықтамасының тең мәнділігін дәлелдеу мысалын біз аксиоматикалық анықтамалардың әдістемелік тұрғыларымен жұмыста нақты көрсетеміз.

Анықтама 1. **Группа** деп негізгі амалдары келесі қасиеттерге ие $<2;1;0>$ текті $G=<G;*;';e>$ алгебрасын айтады:

а) $(\forall x\in G)(\forall y\in G)(\forall z\in G)((x*y)*z=x*(y*z))$;

б) $(\forall x\in G)(x*e=e*x=x)$;

в) $(\forall x\in G)(\forall x'\in G)(x*x'=x'*x=e)$.

Анықтама 2. Группа деп негізгі амалы келесі қасиеттерге ие $<2>$ типті $G=<G;\circ>$ алгебрасын айтады:

а) $(\forall x\in G)(\forall y\in G)(\forall z\in G)((x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z))$;

б) $(\forall x\in G)(\forall y\in G)(\forall u\in G)(\forall v\in G)((x\circ u)=y\,\&\,(v\circ x=y))$.

Бұл екі анықтаманың теңкүштілігін дәлелдемес бұрын студенттерге олардың мазмұнды мағыналарын түсіндіру қажет.

Анықтама 1-де G жиынында анықталған $*$ екіорынды амалының ассоциативті болатындығын, нөлорынды амалдың бұл жиында $*$ амалына қатысты e бейтарап элементті ерекшелейтіндігін; бірорынды $'$ амалының әрбір $a\in G$ элементіне оған симметриялы a' элементін сәйкес қоятындығы туралы айтылады.

Анықтама 2-де G жиынында анықталған $\circ$ екіорынды амалының ассоциативті және $a\circ u=b$ және $v\circ a=b$ теңдеулерінің G жиынында (сәйкесінше u мен v қатысты) шешімді болу керектігін, сонымен қоса жалпы жағдайда бұл теңдеулердегі u мен v шешімдері, G жиынында табылған, тең болмауы да мүмкін, себебі $\circ$ амалы коммутативті болмауы да мүмкін дегенді айтады.

Осыдан әрі келесі сұрақты анықтауға көшу керек: «Бұл анықтамалар теңкүштілігін дәлелдеу деген нені білдіреді?» Жалпы алғанда, студенттер 1- және 2-анықтамалар теңкүшті дегенді келесі түрде түсінеді: кез келген алгебра 1 анықтама мағынасында группа болса, онда ол 2-анықтама бойынша группа болатын барлық алгебралар жиынтығына тиісті және керісінше. Бірақ келесі сұрақ туындайды: «1(2)-анықтамалар мағынасындағы барлық группалар жиынтығын қалай түсінуге (көруге) болады?». Қарастырылып отырған жағдайда бұл келесідей болуы керек: 1- және 2-анықтамалардағы группалық амалдардың қасиеттері амалдарды ешқандай нақты группаны қамтымайтын бейтарап таңбалар тілінде жазылуға тиісті. Осы мақсатта, қажетті мөлшерде, группаның амалдары үшін функционалдық таңбалар таңдалып алынады (яғни, группа бірінші әдіспен анықталғанда — 3 таңба, екінші әдіспен анықталғанда — 1 таңба).

Жеке жағдайда 1 және 2 анықтамалар мағынасында группалар класы абстрактілі анықтау үшін сигнатураның түрі келесідей болады:

$$\sigma=<F_1^2;F_2^1;F_3^0>.$$

Сигнатуралық таңбалар мәндер облысы нақты алгебралық амалдар жиыны болатын нақты бос емес жиында анықталған синтаксистік айнымалылар түрінде көрінуі мүмкін.

Одан әрі сигнатурасының бірінші ретті предикаттар санағының тілінде аксиомалар жазылады:

I. 1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\left(F_1^2\left(F_1^2(x;y);z\right)=F_1^2\left(x;F_1^2(y;z)\right)\right)$;

2) $(\forall x)\left(F_1^2\left(F_3^0;x\right)=F_1^2\left(x;F_3^0\right)=x\right)$;

3) $(\forall x)\left(F_1^2\left(x;F_2^1(x)\right)=F_1^2\left(F_2^1(x);x\right)=F_3^0=x\right)$.

II. 1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\left(F_1^2\left(F_1^2(x;y);z\right)=F_1^2\left(x;F_1^2(y;z)\right)\right)$;

2) $(\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v)\left(\left(F_1^2(x;u)=y\right)\&\left(F_1^2(v;x)=y\right)\right)$.

Жұмыстың соңғы қадамы $-\sigma$ сигнатурасының алгебралық жүйелер класын анықтауға байланысты жұмыс [2].

Осылардың ішіндегілердің I.1; I.2; I.3 аксиомаларының сәйкес баламаларында ақиқат болатындары 1-анықтама мағынасында барлық группалар жиынтығын құрайды. Осыған ұқсас, II.1; II.2 аксиомалар бойынша 2-анықтамада анықталған группалар жиынтығы белгіленеді.

Осыған сәйкес 1- және 2-анықтамалардың теңқүштілігін көрсету үшін 1-анықтама мағынасындағы әрбір группаны 2-анықтама мағынасындағы группаға «айналдыру» керек және керісінше.

Студенттердің көмегімен келесі қорытындыға келу қиын емес: егер $G =< G;*;';e >$ алгебрасының φ баламасында:

$$\varphi\left(F_1^2\right)=*;\ \ \varphi\left(F_1^1\right)=';\ \ \ \varphi\left(F_3^0=e\right).$$

I аксиомалар орындалатын болса, онда осы баламада да II аксиомалар орындалатын болады.

Ол үшін u және v ретінде $u = x' * y$; $v = y * x'$ элементтерін алу жеткілікті. Мысал үшін $x * u = y$; $v * x = y$ теңдіктерінің біреуін тексерген абзал. Бұл I аксиомалар тобының жұмысын көрсетер еді:

$$x * u = x * \left(x' * y\right) = \left(x * x'\right) * y = e * y = e.$$

Енді II аксиомалар орындалатын алгебраны, яғни 2 анықтама мағынасындағы $G =< G;\circ >$ алайық.

Бұл группаның 1-анықтама мағынасындағы группа екендігін көрсету үшін G жиынында $\circ$ амалына қатысты нейтралды e элементінің бар екенін және әрбір $a \in G$ элементінің осы амалға қатысты симметриялы болатындығын көрсету керек. Басқаша сөзбен айтқанда, егер $\circ$ амалы ассоциативті және $a \circ u = b$ және $y \circ a = b$ теңдеулері G жиынында u мен υ және кез келген $a, b \in G$ элементтері үшін шешімді болса, онда $\circ$ амалына қатысты нейтралды элемент болатындығын дәлелдеу керек. Бұл белгілі бір сызба бойынша іске асырылады:

а) алдымен, $\circ$ амалына қатысты G жиынында оң нейтралды e' элементінің бар екендігін, яғни $\left(\forall x \in G\right)\left(x \circ e' = x\right)$ теңдігі орындалатын элементтің бар екендігін көрсету керек;

б) осыдан кейін осы амалға қатысты сол нейтралды элементтің бар екендігін, яғни $\left(\forall x \in G\right)\left(e'' \circ x = x\right)$ теңдігі орындалатын элементтің бар екендігін көрсету керек;

в) осыдан кейін $e' = e'' = e$ теңдігі орындалады;

г) осыдан кейін жоғарыдағы пункттерге ұқсас, әрбір $a \in G$ элементі үшін $\circ$ амалына қатысты сол симметриялы a' және оң симметриялы a'' элементтерінің бар болатындығы, яғни $a' \circ a = e$ және $a \circ a'' = e$ екендігін, көрсету қажет;

д) ең соңында, $a' = a''$ екендігі дәлелденеді.

Бұл жұмыстың барлығын орындау барысында студенттердің көңіл аудартып, олардың белгілі бір ой-пайымдаулардың реттелген тізбегі екендігіне, әрбір бөліктің алдыңғыдан II.1 мен II.2 аксиомаларын қолдану негізінде немесе ертеректе алынған тұжырымдардың негізінде алынатындығын қайталап айтып отыру керек.

Фактор-группа құрудың технологиясы. Студенттерді «алгебралық жүйе» ұғымымен таныстырудың пропедевтивтік процесі және алгебралық жүйелерді изоморфизмге дейінгі дәлдікпен оқып-үйрену мәселесін шешудің ғылыми-әдістемелік тұрғыларын игеру үш кезеңнен тұрады:

1. Қарапайым жағдайда «таза» жиынды амалдар мен қатынастардың бос жиынтығынан тұратын алгебралық жүйе түрінде қарастыруда алғашқы көріністерінің әдістемелік сипаттамасының көрсетілген мәселеге байланысты ұғымдарды енгізу технологиясы мен конструкциясын қалыптастыру.

2. Биекцияға дейінгі дәлдікпен фактор-жиынды анықтау мен қолданудың сызбасын сипаттау.

3. Бейнелеулердің композициялық көріністерінің көбейткіштерін табу (сьюрекциялардың, биекциялардың, инъекциялардың көбейтіндісі түрінде).

Практикада көрсетілген кезеңдерді қарастыруды талдауда табиғаты әр түрлі жиындардағы эквиваленттік қатынастардың мысалдары қарастырылады.

Бұл эквиваленттік қатынастарды осы жиында алгебралық жүйенің құрылымы анықталғанда ол конгруэнцияға айналатындай етіп таңдап аламыз.

Мұндай қатынастардың ішіндегі ең маңыздысы, осы қатынас арқылы құрылған конгруэнцияның көмегімен фактор-группа құруға болатындығы.

Бірнеше мысалдар қарастырайық.

1. Айталық, C — өзінде декарттық координаталар жүйесі анықталған жазықтықтағы нүктелер жиыны, O нүктесі — координаталар басы болсын.

Кез келген $P_1; P_2 \in C$ үшін $P_1 \sim P_2 \Leftrightarrow |OP_1| = |OP_2|$ деп алайық. Әрине, «$\sim$» эквиваленттік қатынас. Бұл жағдайда $[P]_\sim = \left\{ P' \big/ P' \in C \,\&\, P' \sim P \right\}$ — эквиваленттік класы центрі бас нүктеде жатқан, радиусы $|OP|$ болатын шеңберде жатқан нүктелер жиынын береді. $C\big/_\sim = \left\{ [P]_\sim \big/ P \in C \right\}$ фактор-жиыны центрі бас нүктеде жатқан барлық концентрлі шеңберлер жиынын құрайды. $C\big/_\sim$ фактор-жиыны мен теріс емес нақты сандар жиындарының арасында биективті (өзара бірмәнді) сәйкестіктің бар екендігін түсіну қиын емес.

2. R — нақты сандар өрісіндегі өлшемдері $n \times n$ болатын барлық қайтымды матрицалар жиыны $GL(n; R)$ берілсін. Кез келген $A, B \in GL(n, R)$ үшін $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$, мұндағы $|A|$ — өрнегі A матрицасының анықтауышы деп алайық. «$\sim$» — эквиваленттік қатынас болады және $[A]_\sim$ класы анықтауыштары тең барлық матрицалардан тұрады. Фактор-жиын нөлден өзгеше барлық нақты сандар жиынымен биективтік сәйкестікте.

3. Айталық, S_n — n дәрежелі барлық орналастырулар жиыны болсын. Кез келген $\varphi, \psi \in S_n$ орналастырулары үшін $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \operatorname{sgn}\varphi = \operatorname{sgn}\psi$ деп алайық.

$\operatorname{sgn}\varphi$ функциясы

$$\operatorname{sgn}\varphi = \begin{cases} 1, & \text{егер } \varphi \text{ жұп орналастыру болса;} \\ -1, & \text{егер } \varphi \text{ тақ орналастыру болса,} \end{cases}$$

ережесімен анықталады.

«$\sim$» — эквиваленттік қатынас. Фактор-жиын тек қана екі кластан (жұп және тақ орналастыру кластарынан) тұрады және $\{-1; +1\}$ жиынымен биективтік сәйкестікте болады. Мұндай мысалдардың тізімін жалғастыра беруге болады.

Практикалық дағдыны қалыптастырудың келесі кезеңі — фактор-группаларды құру. Бұл нақты группаның нақты ішкі группасы бойынша оң (сол) іргелес кластарын құру әдісін игерумен сипатталады. Жалпылама жоспарда негізгі жұмыс H ішкі группасы бойынша G группасының «$\sim_o$» — оң, «$\sim_c$» — сол іргелес кластарын құрумен айқындалады. G группасындағы жазу мультипликативті (көбейту) болған жағдайда «$\sim_c$» қатынасы келесі түрде анықталады:

$$(\forall x, y \in G)\left(x \sim_o y \Leftrightarrow y \cdot x^{-1} \in H\right).$$

Осыған ұқсас $\sim_c$ қатынасы анықталады.

Группаның анықтамасын қолданып, $\sim_0, \sim_c$ қатынастарының эквиваленттік екендігін оңай дәлелдеуге болады.

$1'$ 1 мысалының комплекс жазықтыққа интерпретациясы $\boldsymbol{G}^* = < G^*; \cdot; ^{-1}; 1 >$ — мультипликативті комплекс сандар группасын қарастырайық.

Айталық, $H = \left\{ z \big/ z \in C^* \,\&\, |z| = 1 \right\}$, мұндағы $|z|$ өрнегі — z санының модулі.

H жиынының негізгі амалға қатысты тұйықталған болатындығын тексеру қиын емес.

Егер $z_1, z_2 \in H$ болса, онда $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = 1 \cdot 1 = 1$, яғни $z_1 \cdot z_2 \in H$. Бұл жерде екі комплекс санның көбейтіндісінің модулінің олардың модульдерінің көбейтіндісіне тең болатындығын студенттердің есіне сала кеткен орынды. Айталық, енді $x, y \in C^*$ болсын. Онда x және y бір оң іргелес класта жатады сонда тек сонда ғана, егер

$$x \sim_o y \Leftrightarrow y \cdot x^{-1} \in H \Leftrightarrow \left| y \cdot x^{-1} \right| = 1 \Leftrightarrow |y| \cdot \left| x^{-1} \right| = 1 \Leftrightarrow |x| = |y|.$$

Сонымен, z_1 және z_2 комплекс сандары бір іргелес класта жатады сонда тек сонда ғана, егер комплекс жазықтықта осы сандар бейнелейтін нүктелер координата басынан бірдей қашықтықта жатса.

1-мысалды еске түсіру арқылы бірден H ішкі группасы бойынша құрылған G^* группасының іргелес кластарының құрылымы туралы көріністі аламыз.

$2'$ Айталық, $H = \left\{ {}^{A}\!\big/_{A \in CL(n,R) \,\&\, |A| = 1} \right\}$ болсын. $H = < H; \cdot; ^{-1} >$ жүйесі $GL(n,R) =$ $= < GL(n,R); \cdot; ^{-1}; E >$ группасының ішкі группасы.

Студенттерге осы мысалды қарастыру барысында матрицалар теориясының келесі теңдіктерін естеріне түсіре кетуге болады:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \text{ және } \left|A^{-1}\right| = \left(|A|\right)^{-1}.$$

A және B матрицаларының бір іргелес класқа тиістілік шартын анықтайық. Айталық, $A, B \in GL(n,R)$ болсын. Онда A және B матрицалары бір оң іргелес класында жатады сонда тек сонда ғана, егер

$$A \sim_o B \Leftrightarrow B \cdot A^{-1} \in H \Leftrightarrow \left|B \cdot A^{-1}\right| = 1 \Leftrightarrow |B| \cdot \left|A^{-1}\right| = 1 \Leftrightarrow |B| = |A|.$$

Сонымен, A және B матрицаларының бір оң іргелес класта жатуы үшін олардың анықтауыштарының тең болуы қажетті және жеткілікті, яғни қайтадан 2-мысалға келдік.

$3'$ Айталық, $A_n = \left\{ {}^{\varphi}\!\big/_{\varphi \in S_n \,\&\, \operatorname{sgn}\varphi = 1} \right\}$ болсын. $A_n = < A_n; \cdot; ^{-1}; e >$ жүйесінің $S_n = \left\{ S_n; \cdot; ^{-1}; e \right\}$ группасының ішкі группасы болатындығын тексеру қиын емес. φ және ψ орналастырулары бір оң іргелес класта жатады сонда тек сонда ғана, егер

$$\varphi \sim_o \psi \Leftrightarrow \left(\psi \cdot \varphi^{-1}\right) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sgn}\psi \cdot \left(\operatorname{sgn}\varphi^{-1}\right) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sgn}\psi = \operatorname{sgn}\varphi.$$

Яғни, қайтадан 3-мысалдың шартына келдік. Келесі кезең — фактор-группа құруға көшу. Істелінетін негізгі жұмыс, — G группасының барлық ішкі группалар жиынынан нормаль ішкі группаны бөліп алу.

Анықтама бойынша, H ішкі жиыны G группасының нормаль бөлгіші $\Leftrightarrow$

$$(\forall h \in H)(\forall g \in G)\left(g^{-1}hg \in H\right).$$

Жұмыстың осы кезеңінде G группасының барлық нормаль бөлгіштер жиынтығы мен барлық фактор-группалар жиынтығының арасында биективті сәйкестіктің бар екендігін негіздеу керек.

Осы бағытта $1' - 3'$ мысалдарын қайта қарастырайық.

$1''$ G^* — абельдік группа болғандықтан, онда H жиыны — G группасының нормаль ішкі группа-сы. Онда жоғарыдағы ой-қорытудан $G^* / H \cong R_+^*$, мұндағы R_+^* оң нақты сандардың мультипликатив-ті ішкі группасы болғандығын оңай түсінеміз. Изоморфизм $\varphi\left([z]_{\sim C}\right) = |z|$ бейнелеуімен анықталады.

$2''$ Кез келген $A \in H$ және $B \in GL(n,R)$ үшін $\left|B^{-1} \cdot A \cdot B\right| = \left|B^{-1}\right| \cdot |A| \cdot |B| = |B|^{-1} \cdot |B| = 1$ болса, онда H жиыны $GL(n,R)$ группасының нормаль ішкі группасы және ${}^{GL(n,R)}\!\big/_{H} \cong R^*$, мұндағы R^* — нақты сандардың мультипликативті группасы.

Изоморфизм $\varphi\left([A]_{\sim C}\right) = |A|$.

Бұл жағдайда студенттерге φ бейнелеуінің сьюрективті екендігін тексеру қажет.

$3''$ Жоғарыда келтірілген мысалдарға ұқсас ${}^{S_n}\!\big/_{A_n} \cong < \{\pm 1\}; \cdot; ^{-1}; 1 >$ изоморфизмін кез келген $\sigma \in S_n$ орналастыруы үшін $\varphi\left([\sigma]_{\sim C}\right)$ ережесінің көмегімен анықтау арқылы беруге болады.

Қорытынды кезеңде i, i', i'' $(i = 1,2,3)$ мысалдарына ұқсас фактор-группаны құрудың қажетті тәжірибесін алғаннан соң гомоморфизм туралы теореманы қолданып, фактор-группаны сипаттауға көшуге болады (гомоморфизмді композициялы құру туралы теорема). Фактор-группаны сипаттау және бірден алу мақсатында группалардың гомоморфизмі туралы теореманы келесі түрде қолданамыз:

G_1/H фактор-группасының G_1 группасына изоморфты болатындығын көрсету үшін, G_1 группасының G_2 группасында $\varphi: G_1 \to G_2$ гомоморфизмін ядросы H ішкі группасымен $(\ker\varphi = H)$ сәйкес келетіндей етіп құрамыз.

Біздің мысалдарымызда сәйкесінше мұндай гомоморфизмдердің рөлін

$$\varphi(z) = |z|; \varphi(A) = |A|; \varphi(\sigma) = \operatorname{sgn}\varphi$$

бейнелеулері атқарады.

Конгруэнциялар мен фактор-группалар. Жоғары оқу орындарының алгебра курсының типтік жоспарында группалар теориясы мен сақиналар теориясының бастапқы бөлімін оқып-үйрену қарастырылған.

Осыған сәйкес жоғарғы алгебра курсында фактор-жүйе құру әдістемесі фактор-группалар мен фактор-сақиналардың мысалдарын құрумен негізделеді. Сондықтан алгебралардың изоморфизмдері туралы бірінші теорема группалар мен бірлік элементті коммутативті сақиналар класы үшін тұжырымдалады. Бұл теорема жоғарғы алгебраның көптеген бөлімдерінде қолданылады. Бұл теореманың жай ішкі өрістердің типін сипаттау мен өрістің жай алгебралық кеңеюін құрудағы рөлін ерекше атап өтуге болады.

«Изоморфизм», «гомоморфизм», «фактор-группа» және «фактор-сақина» ұғымдарына байланысты тақырыпты баяндаудың тұрғыларын «конгруэнция» ұғымымен негіздеуге болады.

Айталық, $G = < G; *; '; e >$ — группа болсын. Онда «конгруэнция» ұғымына сәйкес G группасындағы эквиваленттік σ конгруэнция деп аталады, егер келесі шарттар орындалса:

$$(\forall a,b,c,d \in G)\big(((a\sigma c)\,\&\,(b\sigma d)) \Rightarrow (a*c)\sigma(c*d)\big); \tag{1}$$

$$(\forall a,b \in G)(a\sigma b \Rightarrow a'\sigma b'). \tag{2}$$

1) және 2) шарттар, «конгруэнция» ұғымын енгізудің негізгі мағынасы G группасының негізгі амалын табиғи түрде эквиваленттік кластарға көшіру екендігін көрсетеді.

$$[a]_\sigma * [b]_\sigma = [a*b]_\sigma; \tag{3}$$

$$[a]'_\sigma = [a']_\sigma, \tag{4}$$

3) және 4) ережелермен берілген * және $'$ амалдардың G/σ фактор-жиынында дұрыс (корректно) анықталуын 1) және 2) шарттар қамтамасыз етеді.

(Мысалы, 1)-шарт *- амалының кластардағы тәуелсіздігін қамтамасыз етеді).

Сонымен, «конгруэнция» ұғымы тікелей фактор-группа ұғымына жәрдем жасайды.

Теорема [3].

а) $< [e]_\sigma; *; '; e >$-өрнегі — G группасының ішкі группасы;

б) кез келген $a \in G$ үшін $[a]_\sigma = (a * [e]_\sigma)$;

в) кез келген $a \in G$ үшін $(a * [e]_\sigma) = ([e]_\sigma * a)$;

г) $< [e]_\sigma; *; '; e >$-өрнегі — G группасының нормаль ішкі группасы.

Бұл тұжырымдарды 1) және 2) шарттарды бірден қолдану арқылы оңай және қарапайым алуға болады. Мысал үшін 1) және 2) пункттерінің дәлелдеулерін келтірейік.

а) Ол үшін $[e]_\sigma$ ішкі жиынның * және $'$ амалдарына қатысты тұйықталғандықтарын көрсету керек, яғни келесі өрнектерді тексеру керек:

а.1) $(\forall x; y \in [e]_\sigma)(x * y \in [e]_\sigma)$;

а.2) $(\forall x; y \in [e]_\sigma)(x' \in [e]_\sigma)$.

Айталық, $x; y \in [e]_\sigma$ болсын. Онда 1) сәйкес $x; y \in [e]_\sigma \Rightarrow (e\sigma x) \& (e\sigma y) \Rightarrow ((e*e)\sigma(x*y))$, яғни, $e\sigma(x*y)$ және сол себепті $(x*y) \in [e]_\sigma$. Сонымен, а.1) пункті дәлелденді; а.2) пункті осыған ұқсас 2)-ден алынады.

б) Дәлелдеу қарапайым қамтылу әдісімен жүргізіледі.

$[a]_\sigma \subseteq (a*[e]_\sigma)$ қамтылуын дәлелдейік.

Айталық, $x \in [a]_\sigma$, яғни, $a\sigma x$. σ қатынасы рефлективті болғандықтан, онда $a'\sigma a'$.

$a\sigma x$ және $a'\sigma a'$-тен 1) импликацияны қолдану арқылы $(a'*a)\sigma(a'*x)$ немесе $e\sigma(a'*x)$ аламыз. Бұл бізге не $(a'*x) \in [e]_\sigma$, не $x \in a*[e]_\sigma$ береді. Кері қамтылу осыған ұқсас тексеріледі.

Айталық, енді $G_1 =< G_1; \cdot; '; e_1 >$ және $G_2 =< G_2; \cdot; '; e_2 >$ екі группасы және G_1 группасының G_2 группасына гомоморфты бейнелеуі φ берілсін. Онда теңбейнелілік қатынасы P_φ G_1 жиынындағы конгруэнция болады және әрі қарай дәстүрлі түрде группалардың гомоморфизмі туралы бірінші теорема дәлелденеді.

References

1. *Kargapolov M., Merzlyakov I.* Basic theory of groups. — M.: Science, 1982. — P. 288.
2. *Mal'cev A.I.* Algeraic system. — M.: Science, 1970. — P. 392.
3. *Goncharov S.S., Ershov U.L., Samokhvalov K.F.* Introduction to logic and methodology of science. — M.: Interpraks, 1994. — P. 255.

УДК 517.927.25

О неустойчивости свойств базисности корневых функций возмущенной задачи Самарского-Ионкина

On non-stability of properties of basisness of one type of problems Samarski-Ionkin on the eigenvalues with nonlocal perturbation of boundary conditions

Иманбаев Н.С.

Международный Казахско-Турецкий университет им. Х.А.Ясави, Шымкент (E-mail: imanbaevnur@mail.ru)

Біршама қобалжуы бар алғашқы оператордың базистік қасиеттерінің сақталуы туралы сұрақ қазіргі кезде өзекті болып табылады. Мақалада қобалжуы шеттік шарттармен берілген екінші ретті дифференциалдық теңдеудің спектралдық есебінің сипаттамалық анықтауышы қобалжулы емес спектралдық Самарский-Ионкин есебінің сипаттамалық анықтауышынан тәуелді екендігі дәлелденген. Интегралдық қобалжулы шеттік шарты бар есептің өзіндік функцияларының жүйесі үшін Рисс базистігі қасиеттерінің тұрақсыздығы көрсетілген.

The question about conservation properties of basisness of source operator at presence of a certain indignation it is enough actual. In given work is proved that characteristic determinant of the spectral problem for differential equation of the second order with outraged boundary condition is depending of characteristic determinant of nonindignant spectral problem of Samarski-Ionkin. Non-stability of properties of Riss basisness systems of proper functions of problem under integral indignation of the boundary condition is shown.

Хорошо известно, что система собственных функций оператора, заданного формально самосопряженным дифференциальным выражением, с произвольными самосопряженными краевыми условиями, обеспечивающими дискретный спектр, образует ортонормированный базис пространства L_2. Во многих работах исследовался вопрос о сохранении свойств базисности при некотором (слабом в