N.A.Abiev

On linearization of the system of nonlinear ODEs appearing at investigations of Ricci flows on generalized Wallach spaces

In the paper we consider the normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces that could be reduced to a system of nonlinear ODEs. As a main result we get the convenient formulas for the matrix of linear parts of the considered system in the important partial case $a_i = a_j$, $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$.

References

1 Abiev N.A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu.G., Siasos P. *Preprint, arXiv: 1305.0440*, 2013.

2 Chow B., Knopf D. *The Ricci Flow: an Introduction. Mathematical Surveys and Monographs*, 110, AMS, Providence, RI, 2004, 325 p.

3 Topping P. *Lectures on the Ricci flow. London Mathematical Society Lecture Note Series*, 325. Cambridge University Press: Cambridge, 2006, 133 p.

4 Besse A.L. *Einstein* manifolds, 1, Moscow: Mir, 1990, 318 p.

5 Lomshakov A.M., Nikonorov Yu.G., Firsov E.V. *The mathematical papers*, 2003, 6, 2, p. 80–101.

6 Nikonorov Yu.G. *Siberian Mathematical Journal*, 2000, 41, 1, p. 200–205.

7 Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 2007, 146, 7, p. 6313–6390.

8 Dumortier F., Llibre J., Artes J. *Qualitative theory of planar Differential systems. Universitext*. Springer-Verlag, Berlin, 2006, 298 p.

9 Jiang Q., Llibre J. *Qualitative theory of Dynamical systems*, 2005, 6, 1, p. 87–167.

УДК 514.765 + 517.938

Н.А.Абиев

Таразский государственный университет им. М.Х.Дулати (E-mail: abievn@mail:ru)

О необходимых и достаточных условиях появления вырожденных особых точек потоков Риччи

В статье рассмотрены нормализованные потоки Риччи, которые на обобщенных пространствах Уоллаха сводятся к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Для такой системы найдены необходимые и достаточные условия появления вырожденных особых точек вида $x_1^0 = x_2^0$ в случае $a_i = a_j$, $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$.

Ключевые слова: обобщенное пространство Уоллаха, поток Риччи, динамическая система, нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, вырожденная особая точка.

Введение. В настоящей работе рассматривается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, полученная в [1]:

$$\frac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2, x_3), \ \frac{dx_2}{dt} = g(x_1, x_2, x_3), \ \frac{dx_3}{dt} = h(x_1, x_2, x_3), \qquad (1)$$

где

$$f(x_1, x_2, x_3) = -1 - a_1 x_1 \left(\frac{x_1}{x_2 x_3} - \frac{x_2}{x_1 x_3} - \frac{x_3}{x_1 x_2} \right) + x_1 B;$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = -1 - a_2 x_2 \left(\frac{x_2}{x_1 x_3} - \frac{x_3}{x_1 x_2} - \frac{x_1}{x_2 x_3} \right) + x_2 B;$$

$$h(x_1,x_2,x_3) = -1 - a_3x_3\left(\frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3}\right) + x_3B;$$

$$B := \left(\frac{1}{a_1x_1} + \frac{1}{a_2x_2} + \frac{1}{a_3x_3} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2}\right)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right)^{-1};$$

$$a_i \in (0,1/2],\ x_i = x_i(t) > 0,\ i = 1,2,3.$$

Напомним, что система (1) возникает при изучении потоков Риччи (см. [2, 3]) в специальных классах однородных многообразий, называемых три-локально-симметрическими, или обобщенными, пространствами Уоллаха (см. [4–6]).

1. Предварительные сведения. Как доказано в [1], используя первый интеграл $x_1^{1/a_1}x_2^{1/a_2}x_3^{1/a_3} = 1$, систему (1) можно свести к эквивалентной системе из двух уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = \tilde{f}(x_1,x_2);\ \frac{dx_2}{dt} = \tilde{g}(x_1,x_2), \tag{2}$$

где $\tilde{f}(x_1,x_2) = f(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))$; $\tilde{g}(x_1,x_2) = g(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))$; $\varphi(x_1,x_2) = x_1^{-\frac{a_3}{a_1}}x_2^{-\frac{a_3}{a_2}}$.

Отметим особые точки (2), удовлетворяющие условию $x_1^0 = x_2^0$ при $a_i = a_j$, $i,j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$. Напомним, что при $a_i = a_j$, $i,j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$, система (1) обладает особыми точками $\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)$, удовлетворяющими одному из альтернативных условий (см. [1, 4]): $x_1^0 = x_2^0$ или $x_3^0 = 2b\left(x_1^0 + x_2^0\right)$.

Пусть $a_1 = a_2 = b$, $a_3 = c$, где $b,c \in (0,1/2]$, и пусть $D := 1 - 4(1-2c)(b+c)$. Тогда согласно [1, 4] система (1) имеет два семейства (соответственно одно семейство) особых точек, если $D > 0$ (соответственно $D = 0$):

$$\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right) = (2(b+c)q, 2(b+c)q, \mu q),\ \mu = 1 \pm \sqrt{D},\ \mu > 0, \tag{3}$$

где $q \in R$, $q > 0$; и не имеет ни одного семейства особых точек, если $D < 0$.

Согласно лемме 1 из [7] каждое семейство из (3) дает изолированную особую точку системы (2) вида

$$\left(x_1^0, x_2^0\right) = (2(b+c)q, 2(b+c)q), \tag{4}$$

где $q = \left(2(b+c)\right)^{-2d/b}\mu^{-d/c} > 0$, $d = \left(2b^{-1} + c^{-1}\right)^{-1}$.

В формуле (4) значение μ предполагается равным $1+\sqrt{D}$ или $1-\sqrt{D}$, если $D > 0$, и, конечно же, $\mu = 1$ при $D = 0$.

Согласно качественной теории ОДУ (см., например, [8]) вырожденный случай является наиболее сложным для изучения и наступает в том и только в том случае, если $\delta := \det(J) = 0$,

где $J = J\left(x_1^0, x_2^0\right) = \left.\begin{pmatrix} \tilde{f}_{x_1} & \tilde{f}_{x_2} \\ \tilde{g}_{x_1} & \tilde{g}_{x_2} \end{pmatrix}\right|_{(x_1,x_2)=\left(x_1^0,x_2^0\right)}$.

Напомним, что согласно теореме 1 из [7] справедливы следующие формулы:

$$\rho := trace(J) = \frac{2(1-2(b+c))}{\mu q};\ \delta := \det(J) = \frac{D \pm \sqrt{D}}{4(b+c)^2\mu^2q^2}\left(8b(b+c) - \mu\right), \tag{5}$$

где выбор знака в $D \pm \sqrt{D}$ согласован с выбором знака в $\mu = 1 \pm \sqrt{D}$.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими специальными значениями параметров b,c:

$$b_1 = (\sqrt{3}-1)/4,\ b_2 = (\sqrt{2}-1)/2;\ b_3 = (\sqrt{5}-1)/4,\ b_4 = \sqrt{2}/4;$$

$$c_1 = \left(1 - 2b - \sqrt{4b^2 + 4b - 1}\right)/4;\ c_2 = \left(1 - 2b + \sqrt{4b^2 + 4b - 1}\right)/4;$$

$$c_3 = (16b^3 - 4b + 1)/(2 - 16b^2);\ c_4 = (1 - 8b^2)/(8b).$$

Очевидно, что $b_1 < b_2 < 1/4 < b_3 < b_4$.

Постановка задачи. В настоящей работе мы продолжаем исследования [7], посвященные случаю $a_1 = a_2 = b,\ a_3 = c,$ где $b, c \in (0, 1/2],$ и ставим задачу нахождения всех значений параметров $b, c \in (0, 1/2],$ которые могут обеспечить системе (2) вырожденные особые точки вида (4).

2. Вспомогательные результаты. Докажем три важные леммы, которые будут часто использоваться в наших исследованиях.

Таблица 1

Знаки c_i и соотношения между c_i, где i = 1,…,4

b	c_1	c_2	c_3	c_4	Соотношения
$\in (0, b_1)$	-	-	$\in (0,1/2)$	$>1/2$	$0 < c_3 < 1/2 < c_4$
b_1	-	-	$\in (0,1/2)$	$1/2$	$0 < c_3 < c_4 = 1/2$
$\in (b_1, b_2)$	-	-	$\in (0,1/2)$	$\in (0,1/2)$	$0 < c_3 < c_4 < 1/2$
b_2	$\in (0,1/2)$	$\in (0,1/2)$	$\in (0,1/2)$	$\in (0,1/2)$	$0 < c_1 = c_2 < c_3 < c_4 < 1/2$
$\in (b_2, 1/4)$	$\in (0,1/2)$	$\in (0,1/2)$	$\in (0,1/2)$	$\in (0,1/2)$	$0 < c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < 1/2$
$1/4$	0	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$0 = c_1 < c_2 = c_3 = c_4 = 1/4$
$\in (1/4, b_3)$	<0	$\in (0,1/2)$	$\in (0,1/2)$	$\in (0,1/2)$	$0 < c_4 < c_2 < c_3 < 1/2$
b_3	<0	$\in (0,1/2)$	$1/2$	$\in (0,1/2)$	$0 < c_4 < c_2 < c_3 = 1/2$
$\in (b_3, b_4)$	<0	$\in (0,1/2)$	$>1/2$	$\in (0,1/2)$	$0 < c_4 < c_2 < 1/2 < c_3$
b_4	<0	$\in (0,1/2)$	-	0	$0 < c_2 < 1/2$
$\in (b_4, 1/2]$	<0	$\in (0,1/2)$	<0	<0	$0 < c_2 < 1/2$

Лемма 1. В таблице 1 указаны значения $b \in (0, 1/2],$ при которых функции $c_i = c_i(b),\ i = 1, ..., 4,$ вещественны и удовлетворяют условию $0 < c_i \le 1/2.$ Кроме того, в таблице 1 приведены соотношения между $c_i,\ i = 1, ..., 4.$

Доказательство. Функции c_1, c_2. Функции c_1 и c_2 вещественны только при $b \in [b_2, 1/2],$ где b_2 — положительный корень уравнения $4b^2 + 4b - 1 = 0,$ причем $c_2 > 0$ в области своего определения. Очевидно также, что

$$c_2 < 1/2 \Leftrightarrow \sqrt{4b^2 + 4b - 1} < 2b + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le 4b^2 + 4b - 1 < (2b+1)^2, \\ 2b + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow b_2 \le b \le 1/2.$$

Для c_1 имеем следующее: $c_1 = 0$ при $b = 1/4$ и

$$c_1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{4b^2 + 4b - 1} < 1 - 2b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le 4b^2 + 4b - 1 < (1-2b)^2, \\ 1 - 2b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow b_2 \le b < 1/4.$$

Значит, $c_1 < 0$ при $1/4 < b \le 1/2.$

Функция c_3. Так как $16b^3 - 4b + 1 > 0$ при всех $b \in (0, 1/2],$ то $c_3 > 0$ только при $1 - 8b^2 > 0,$ что равносильно $b \in (0, b_4).$ Значит, $c_3 < 0$ при $b \in (b_4, 1/2],$ причем $\lim\limits_{b \to b_4 - 0} c_3 = +\infty,\ \lim\limits_{b \to b_4 + 0} c_3 = -\infty.$ Заметим, что

$$0 < c_3 \le 1/2 \Leftrightarrow 0 < \frac{16b^3 - 4b + 1}{1 - 8b^2} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 16b^3 - 4b + 1 \le 1 - 8b^2, \\ 1 - 8b^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < b \le b_3, \\ 0 < b < b_4 \end{cases} \Leftrightarrow b \in (0, b_3],$$

причем $c_3 = 1/2$ только при $b = b_3$. Следовательно, $c_3 > 1/2$ при $b \in (b_3, b_4).$

Функция c_4. Ясно, что $c_4 = 0$ при $b = b_4$ и $c_4 < 0$ при $b \in (b_4, 1/2]$. Далее

$$0 < c_4 \le 1/2 \Leftrightarrow 0 < \frac{1 - 8b^2}{4b} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 8b^2 + 4b - 1 \ge 0, \\ 1 - 8b^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \le b \le 1/2, \\ 0 < b < b_4 \end{cases} \Leftrightarrow b \in [b_1, b_4),$$

причем $c_4 = 1/2$ только при $b = b_1$. Следовательно, $c_4 > 1/2$ при $b \in (0, b_1).$

Соотношения между c_i, $i=1,...,4$. Очевидно, что $c_1 \le c_2$ при всех $b \in [b_2, 1/2]$, причем $c_1 = c_2 = (2-\sqrt{2})/4$ только при $b = b_2$. Следовательно, $0 < c_1 \le c_2 < 1/2$ при $b \in [b_2, 1/4)$ и $c_1 \le 0 < c_2 < 1/2$ при $b \in [1/4, 1/2]$.

Очевидно равенство $c_4 - c_3 = \dfrac{4b-1}{8b(8b^2-1)}$. Поэтому

$$0 < c_3 < c_4 \le 1/2 \Leftrightarrow \begin{cases} b < 1/4, \\ b_1 \le b \le b_3 \end{cases} \Leftrightarrow b \in [b_1, 1/4).$$

Отсюда $0 < c_4 < c_3 \le 1/2 \Leftrightarrow b \in (1/4, b_3]$. Имеют место также неравенства

$$0 < c_2 < c_3 \le 1/2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4b^2+4b-1} < 4c_3 - (1-2b), \\ b_2 \le b \le b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{4b-1}{8b^2-1}\right)^2 > 0, \\ \dfrac{16b^3+8b^2-6b+1}{8b^2-1} < 0, \\ b_2 \le b \le b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \ne 1/4, \\ b_2 \le b \le b_3. \end{cases}$$

Аналогично можно установить, что $c_4 < c_2 \Leftrightarrow b \in (1/4, b_4)$.

Наконец, очевидно, что $c_2 = c_3 = c_4 = 1/4$ при $b = 1/4$. Лемма доказана.

Таблица 2

Знаки $D = 1 - 4(1 - 2c)(b + c)$

Значения b	Значения c, обеспечивающие		
	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
$b \in (0, b_2)$	-	-	$c \in (0, 1/2]$
$b = b_2$	-	$c = c_1 = c_2$	$c \ne c_1 = c_2$
$b \in (b_2, 1/4)$	$c \in (c_1, c_2)$	$c = c_1$, $c = c_2$	$c \in (0, c_1) \cup (c_2, 1/2]$
$b \in [1/4, 1/2]$	$c \in (0, c_2)$	$c = c_2$	$c \in (c_2, 1/2]$

Лемма 2. Функция $D = 1 - 4(1-2c)(b+c)$ имеет знаки, указанные в таблице 2.

Доказательство. Ясно, что D можно представить в виде квадратного трехчлена $D = 8c^2 + 4(2b-1)c + 1 - 4b$ с дискриминантом $4b^2 + 4b - 1$.

Случай $b \in (0, b_2)$. Так как $4b^2 + 4b - 1$ отрицателен, то $D > 0$ при всех $c \in (0, 1/2]$.

Случай $b \in [b_2, 1/2]$. Тогда $4b^2 + 4b - 1$ неотрицателен, и уравнение $D = 0$ имеет действительные корни $c = c_1$ и $c = c_2$. Решения неравенства $D > 0$ теперь очевидны из леммы 1. Лемма доказана.

Таблица 3

Знаки $8b(b + c) - 1$

Значения b	Значения c, обеспечивающие		
	$8b(b+c)-1 < 0$	$8b(b+c)-1 = 0$	$8b(b+c)-1 > 0$
$b \in (0, b_1)$	$c \in (0, 1/2]$	-	-
$b = b_1$	$c \in (0, 1/2)$	$c = c_4 = 1/2$	-
$b \in (b_1, b_4)$	$c \in (0, c_4)$	$c = c_4$	$c \in (c_4, 1/2]$
$b \in [b_4, 1/2]$	-	-	$c \in (0, 1/2]$

Лемма 3. Функция $8b(b+c)-1$ имеет знаки, указанные в таблице 3.

Доказательство. Нетрудно заметить, что неравенство $8b(b+c)-1>0$ эквивалентно $c>c_4$. Значения $c_4 \geq 1/2$ нас не устраивают, а в случае $c_4 \leq 0$ решением неравенства $c>c_4$ является $c\in(0,1/2]$. Содержимое столбцов 1 и 4 легко получить, учитывая лемму 1.

Неравенство $8b(b+c)-1<0$ имеет решение $c<c_4$. Ясно, что при значениях $c_4 \leq 0$ неравенство $c<c_4$ лишено смысла; при $c_4 \geq 1/2$ любое $c\in(0,1/2]$ удовлетворяет $c<c_4$. Отсюда с учетом леммы 1 получаем содержимое столбца 2. Решение уравнения $8b(b+c)-1=0$ очевидно. Лемма доказана.

3. Основные результаты. Теперь приступим к изложению и доказательству основных результатов данной работы, касающихся необходимых и достаточных условий существования у системы (2) *вырожденных особых точек* вида (4). Согласно (5) особая точка (4) системы (2) вырождена тогда и только тогда, когда параметры $b,c\in(0,1/2]$ удовлетворяют уравнению

$$\left(D\pm\sqrt{D}\right)\left(8b(b+c)-\mu\right)=0. \tag{6}$$

Исследование (6) проведем отдельно для каждого семейства особых точек из (3), соответствующих случаям $D=0$; $D>0,\ \mu=1+\sqrt{D}$; $0<D<1,\ \mu=1-\sqrt{D}$.

Начнем с наиболее простого случая, когда $\delta=0$ за счет $D=0$.

Теорема 1. Только следующие значения параметров b,c обеспечивают равенство $D=0$ и вырожденные особые точки системы (2) вида (4): $b\in[b_2,1/4),\ c=c_1$ или $b\in[b_2,1/2],\ c=c_2$.

Доказательство. Из (5) очевидно, что $D=0$ влечет за собой $\delta=0$. Согласно лемме 2 равенство $D=0$ возможно только при $b\in[b_2,1/4),\ c=c_1$ или $b\in[b_2,1/2],\ c=c_2$. Других решений уравнение $\delta=0$ не имеет. Действительно, при $D=0$ имеем $\mu=1$. Согласно лемме 3 $8b(b+c_1)-1\neq 0$ всегда и $8b(b+c_2)-1=0$ только при $b=1/4$. Теорема доказана.

Далее будем анализировать случаи наступления равенства $\delta=0$ при $D\neq 0$ (см. формулы (5)).

Теорема 2. В случае $D>0,\ \mu=1+\sqrt{D}$ только следующие значения параметров $b,c\in(0,1/2]$ обеспечивают системе (2) вырожденные особые точки вида (4): $b\in(1/4,b_3],\ c=c_3$. Причем $\mu=\tilde{\mu}:=\dfrac{4b(2b-1)}{8b^2-1}>0$ при таких b,c.

Доказательство. Заметим, что $D+\sqrt{D}\neq 0$ при $D>0$, следовательно, уравнение (6) сводится к $8b(b+c)-1-\sqrt{D}=0,\ D>0,$ что эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} D=\left(8b(b+c)-1\right)^2; \\ 8b(b+c)-1>0. \end{cases} \tag{7}$$

Уравнение в (7) имеет решение $c=c_3$, причем $b\in(0,b_3]$ согласно лемме 1. Решение неравенства системы (7) знаем из леммы 3. Значит, систему (7) можно эквивалентно преобразовать в объединение следующих двух систем:

$$\begin{cases} b\in(0,b_3], \quad c=c_3; \\ b\in(b_1,b_4), \quad c_4<c\leq 1/2; \end{cases} \qquad \begin{cases} b\in(0,b_3], \quad c=c_3; \\ b\in[b_4,1/2], \quad 0<c\leq 1/2. \end{cases}$$

Вторая система в этом объединении несовместна ввиду пустоты пересечения интервалов $(0,b_3]$ и $[b_4,1/2]$. Следовательно, достаточно в первой системе найти те значения $b\in(b_1,b_3]$, при которых $c_4<c_3\leq 1/2$. Лемма 1 показывает, что такое возможно только при $b\in(1/4,b_3]$.

Найдем теперь значение μ, соответствующее значениям $b\in(1/4,b_3]$ и $c=c_3$. Нетрудно заметить, что $\mu=1+\sqrt{D}=1+\left|\dfrac{4b-1}{8b^2-1}\right|=1-\dfrac{4b-1}{8b^2-1}=\tilde{\mu}$. Теорема доказана.

Теорема 3. В случае $0<D<1,\ \mu=1-\sqrt{D}$ только следующие значения параметров $b,c\in(0,1/2]$ обеспечивают системе (2) вырожденные особые точки вида (4): $b\in(0,1/4),\ c=c_3$. Причем $\mu=\tilde{\mu}$ при таких b,c.

Доказательство. Из условия $0<D<1$ вытекает неравенство $D-\sqrt{D}\neq 0.$ Поэтому уравнение (6) эквивалентно уравнению $8b(b+c)-1+\sqrt{D}=0,$ что эквивалентно в свою очередь следующей системе:

$$\begin{cases} D=\left(8b(b+c)-1\right)^2; \\ 8b(b+c)-1<0. \end{cases} \tag{8}$$

Заметим, что условие $0<D<1$ равносильно следующему: $D>0$ и $c<1/2$. Решение уравнения системы (10) уже известно из теоремы 2. Неравенство в (8) имеет решение, указанное в лемме 3. Следовательно, с учетом лемм 1 и 3 система (8) распадается на объединение следующих двух систем:

$$\begin{cases} b\in(0,b_3), \quad c=c_3; \\ b\in(b_1,b_4), \quad 0<c<c_4; \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} b\in(0,b_3), \quad c=c_3; \\ b\in(0,b_1], \quad 0<c<1/2. \end{cases} \tag{10}$$

Система (10) имеет решение $b\in(0,b_1],\ c=c_3.$ Решить систему (9) означает найти те значения b из интервала $(b_1,b_3),$ которые бы обеспечили неравенство $0<c_3<c_4.$ Как известно из леммы 1, такое возможно только при $b\in(b_1,1/4).$ Таким образом, объединяя решения (9) и (10), получаем решение (8): $b\in(0,1/4),\ c=c_3.$ Очевидно, что $\mu=1-\sqrt{D}=1-\left|\dfrac{4b-1}{8b^2-1}\right|=1-\dfrac{4b-1}{8b^2-1}=\tilde{\mu}$ при $b\in(0,1/4),\ c=c_3.$ Теорема доказана.

Замечание 1. В теоремах 2 и 3 значение $\mu=\tilde{\mu}$ можно было бы определить независимо от выбора $\mu=1\pm\sqrt{D},$ непосредственно разрешая уравнение $8b(b+c_3)-\mu=0$ относительно μ. Однако при таком подходе вопрос об интервалах изменения параметра b остался бы открытым.

Заключение. В теоремах 1–3 мы нашли все значения параметров $a_1=a_2=b,\ a_3=c,$ которые обеспечивают системе (2) вырожденные ($\delta=0$) особые точки вида (4). Изложению результатов, касающихся классификации таких точек, мы будем посвящать отдельную статью.

Список литературы

1 *Abiev N.A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu.G., Siasos P.* The Ricci flow on generalized Wallach spaces // Preprint, arXiv: 1305.0440. — 2013.

2 *Chow B., Knopf D.* The Ricci Flow: an Introduction. Mathematical Surveys and Monographs. — Vol. 110. AMS, Providence, RI, 2004. — 325 p.

3 *Topping P.* Lectures on the Ricci flow. London Mathematical Society Lecture Note Series. — Vol. 325. Cambridge University Press: Cambridge, 2006. — 133 p.

4 *Ломшаков А.М., Никоноров Ю.Г., Фирсов Е.В.* Инвариантные метрики Эйнштейна на три-локально-симметрических пространствах // Математические труды. — 2003. — Т. 6. — № 2. — С. 80–101.

5 *Никоноров Ю.Г.* Об одном классе однородных компактных многообразий Эйнштейна // Сиб. матем. журн. — 2000. — Т. 41. — № 1. — С. 200–205.

6 *Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V.* Geometry of homogeneous Riemannian manifolds // Journal of Mathematical Sciences (New York). — 2007. — Vol. 146. — № 7. — P. 6313–6390.

7 *Абиев Н.А.* О линеаризации системы нелинейных ОДУ, возникающей при исследовании потоков Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2014. — № 1 (73). — С. 4–9.

8 *Dumortier F., Llibre J., Artes J.* Qualitative theory of planar Differential systems. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006. — 298 p.

Н.А.Әбиев

Риччи ағымдарының өзгеше ерекше нүктелерінің пайда болуының қажетті және жеткілікті шарттары туралы

Мақалада жалпыланған Уоллах кеңістіктерінде сызықсыз қарапайым дифференциалдық теңдеулердің жүйесіне келтірілетін нормалдастырылған Риччи ағымдары қарастырылды. $a_i = a_j$, $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$, жағдайында осындай жүйенің $x_1^0 = x_2^0$ түріндегі өзгешеленген ерекше нүктелерінің пайда болуының қажетті және жеткілікті шарттары табылған.

N.A.Abiev

On necessary and sufficient conditions of appearing degenerate singular points of the Ricci flows

In the paper we consider the normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces that could be reduced to a system of nonlinear ODEs. For this system the necessary and sufficient conditions of appearing singular points of the kind $x_1^0 = x_2^0$ in the case $a_i = a_j$, $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$ are found.

References

1 Abiev N.A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu.G., Siasos P. *Preprint, arXiv: 1305.0440*, 2013.

2 Chow B., Knopf D. *The Ricci Flow: an Introduction. Mathematical Surveys and Monographs*, 110, AMS, Providence, RI, 2004, 325 p.

3 Topping P. *Lectures on the Ricci flow. London Mathematical Society Lecture Note Series*, 325. Cambridge University Press: Cambridge, 2006, 133 p.

4 Lomshakov A.M., Nikonorov Yu.G., Firsov E.V. *The mathematical* papers, 2003, 6, 2, p. 80–101.

5 Nikonorov Yu.G. *Siberian Mathematical Journal*, 2000, 41, 1, p. 200–205.

6 Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 2007, 146, 7, p. 6313–6390.

7 Abiev N.A. *Bull. of University of Karaganda*, Ser. Matematika, 2014, 1 (73).

8 Dumortier F., Llibre J., Artes J. *Qualitative theory of planar Differential systems.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006, 298 p.