ФИЗИКАНЫҢ ӘДІСТЕМЕСІ
МЕТОДИКА ФИЗИКИ

УДК 37.022:53

В.В.Архипов, А.М.Ещанова, Ж.Т.Камбарова, А.С Кудусов, Н.Т.Шулембаева

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

НЕСТАНДАРТНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Физикадан мөлшерлік есептерді шешу кезіндегі негізгі талаптар іздену, физикалық құбылысқа (немесе процеске) жауап беретін теңдеулер (формулалар) жүйесін құру мен шығару болып табылады. Көптеген есептерді шешу белгілі алгоритмдермен жүреді. Сәйкесті талдаудан кейін күрделі есептер дәстүрлі алгоритмдер аясында шешілуі мүмкін. Есепті шығару кезіндегі басты қиындық есептің талдау қажеттілігінен туады. Есепті талдау жеткілікті логикалық тұжырымдауды талап ететін дәстүрлі алгоритмдер мен есептеулер көмегімен шешілетін есептерге бөлуге, сондай-ақ стандартты емес физикалық есептер тобына жіктеуге мүмкіндік береді.

Basic demands to solving physical problems are searching, combination and solving of equations set (formulas), that are responsible of a physical effect (or a process) due to the problem situation. Solving of majority problems keeps with well-known algorithms. Complicated problems can be solved in frames of traditional algorithms too, after appropriated analysis of ones. Main difficulty of solving problems appears because of necessity of the problem analysis. The problem analysis allows separate traditional problems off problems, which demands considerable logical reasoning. This circumstance allows choose latest ones in the grope of non-standard physical problems.

Основными требованиями при решении количественных задач по физике являются поиск, составление и решение системы уравнений (формул), ответственных за описанное в условии задачи физическое явление (или процесс). Решение большинства задач укладывается в известные алгоритмы. Сложные задачи после соответствующего анализа также могут быть решены в рамках традиционных алгоритмов. Общий алгоритм решения задач может быть представлен в следующем виде:

Блок-схема
«Общий метод решения задач»

Этап I. Построение модели ситуации, приведенной в задаче

Шаг 1. Выделить в тексте задачи структурные элементы физического явления:

1) материальный объект, об изменении состояния которого идет речь;

2) другой материальный объект, с которым первый взаимодействует (воздействующий объект);

3) воздействие и условия, при которых оно осуществляется;

4) результат воздействия (или взаимодействия).

Шаг 2. Перевести их на физический язык.

Шаг 3. Представить модель схематически и записать условие задачи.

Этап II. Составление уравнений, описывающих модель ситуации

Этап III. Вывод формулы для нахождения искомой

Этап IV. Проверка полученной формулы

Этап V. Вычисление значения искомой физической величины и контроль ответа [1]

Главная трудность при решении задач возникает в связи с необходимостью проведения анализа задачи. Анализ задачи позволяет отделить задачи, решаемые с помощью традиционных алгоритмов, и задачи, решение которых требует значительных логических рассуждений. Это позволяет их выделить в группу нестандартных физических задач.

Рассмотрим примеры анализа и решения таких нестандартных задач.

Задача 1 (республиканская олимпиада). Материальная точка движется по дуге окружности радиусом R = 1 м. Скорость точки изменяется по закону $\upsilon = \dfrac{\upsilon_0}{\cos\alpha}$, где υ_0 = 1м/с. Найдите ускорение (по модулю) точки M в тот момент, когда угол $\alpha = 60^0$.

Анализ задачи

Введём систему координат XOY (рис. 1).

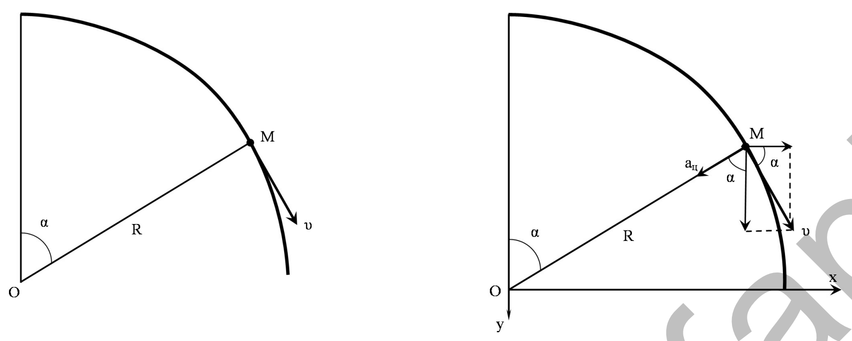

Рис. 1

Проекция скорости на ось X: $\upsilon_x = \dfrac{\upsilon_0}{\cos\alpha}\cos\alpha = \upsilon_0 = const$.

Следовательно, в таком случае $a_x = 0$ и $a_y = a = a_{полн}$.

Решение:

$$a_ц = a\cos\alpha = \frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow a = \frac{\upsilon^2}{R\cos\alpha} = \frac{\upsilon_0^2}{R\cos^3\alpha} = 8 \text{ м/с}^2.$$

Отметим, что попытка решения этой задачи в рамках традиционного алгоритма не приводит к успеху, потому что такое решение требует применения сложных математических преобразований и привлечения понятия «скорость как производная перемещения по времени». Простое решение получается только из-за того, что зависимость скорости v от угла α именно $\upsilon = \dfrac{\upsilon_0}{\cos\alpha}$ и, следовательно, тело вдоль оси X движется равномерно. Естественно, решают задачу только те, кто догадается построить величину проекции скорости v_x = const.

Задача 2 (ЗФТШ при МФТИ) [2]. Автомобиль массой 1000 кг пытается въехать без разгона на гору с углом наклона $\alpha = 30^0$. Коэффициент трения между шинами автомобиля и поверхностью горки $\mu = 0{,}1$. С каким ускорением будет двигаться автомобиль? Считать все колеса ведущими.

Анализ задачи

Максимальная сила трения покоя (колёс относительно поверхности горки):

$$F_{tr.\max} = \mu N = \mu mg\cos\alpha \approx 860 \text{ Н}.$$

Составляющая силы тяжести, препятствующая движению автомобиля:

$$F_{mg.x} = mg\sin\alpha \approx 5000 \text{ Н}.$$

Видим, что $F_{tr.\max} \prec F_{mg.x}$, т.е. при любой силе тяги мотора машина не сможет въехать в гору, колёса будут пробуксовывать. Таким образом, ускорение автомобиля будет a = 0.

Решение задачи требует предварительной оценки величины трения покоя колёс о поверхность горки.

Задача 3 (московская городская олимпиада) [3]. Гоночный автомобиль имеет привод на все четыре колеса. Его двигатель выдает максимальную мощность $N = 60$ кВт при любой скорости. Пренебрегая сопротивлением воздуха, вычислите время разгона этого автомобиля от старта до скорости 20 м/с. Масса автомобиля 1000 кг., коэффициент трения между колесами и дорожным покрытием не зависит от скорости и равен 0,6.

Анализ задачи

Разгон автомобиля будет проходить в два этапа.

На первом этапе колеса автомобиля будут проскальзывать, часть развиваемой двигателем мощности будет превращаться в тепло, а остальная — уходить на разгон. При этом автомобиль будет двигаться с постоянным ускорением, величина которого определяется величиной силы трения скольжения: $a = \mu g$.

Так будет до тех пор, пока мощность двигателя не будет равна мощности силы трения $N = \mu m g u$, где u — скорость автомобиля, при которой прекратится проскальзывание колес.

Решение:

$u = \dfrac{N}{\mu m g} \approx 10$ м/с. Эту скорость автомобиль достигнет за время

$$\Delta t_1 = \frac{u}{a} = \frac{N}{\mu^2 m g^2} \approx 1{,}7 \text{ с}.$$

На втором этапе проскальзывания не будет, и вся мощность двигателя будет расходоваться на разгон автомобиля, т.е. превращаться в его кинетическую энергию.

$$N\Delta t_2 = \frac{mv^2}{2} - \frac{mu^2}{2} \Rightarrow \Delta t_2 = 2{,}5 \text{ с}.$$

В итоге полное время разгона автомобиля от старта до скорости 20 м/с

$$t = \Delta t_1 + \Delta t_2 \approx 4{,}2 \text{ с}.$$

Решение задачи требует предварительной оценки величины трения покоя колёс о поверхность.

Задача 4 (*А.П.Рымкевича)* [4]. Какова сила трения, действующая на брусок массой *m,* с каким ускорением движутся грузы и какова сила натяжения нити, если $h = 60$ см, $l = 1$ м, $m = 0{,}5$ кг, $\mu = 0{,}25$? Решите задачу при значениях массы *M:* 0,1 кг; 0,25 кг; 0,3 кг; 0,35 кг; 0,5 кг. Блок считать идеальным.

Анализ задачи

Отметим, что именно здесь проявляются основные трудности решения задач на динамику тел с учётом сил трения. Естественно, такую задачу без выяснения состояния тел — покой или движение, направление движения — невозможно решить в рамках традиционного алгоритма (рис. 2).

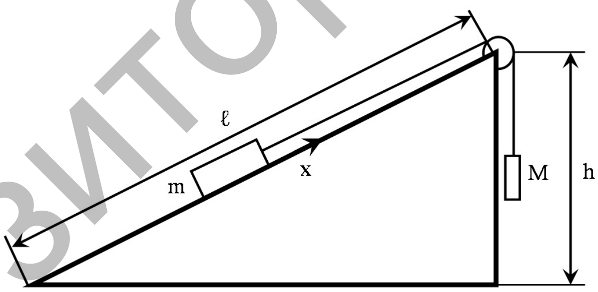

Рис. 2

Сначала необходимо для каждого значения массы *M* оценить численные значения и направления всех сил, действующих на каждое из связанных тел. Очевидно, что силой тяги, действующей на тело массой *m,* является сила, численно равная весу второго тела массой *M.* В дальнейшем следует сопоставить все силы, действующие на тело, находящееся на наклонной плоскости, и установить, движется ли оно и в каком направлении. Далее можно оценить ускорение движения тела для данного случая из условия задачи. Проведём анализ, например, для *M* = 0,25 кг.

Произведём первоначальные оценки. Предположим, что тело *m* движется вверх вдоль оси *X.* Сила тяги *F,* действующая на тело *m,* направлена вверх по наклонной плоскости (при движении вверх эта сила максимальна, когда тело массой М покоится или равномерно движется): $F = P = Mg = 2{,}5$ Н .

Численное значение максимальной силы трения покоя тела:

$$F_{тр.\max} = \mu m g \cos\alpha = 1 \text{ Н}, \ \sin\alpha = \frac{h}{l} = 0{,}6, \ \cos\alpha = \sqrt{\frac{l^2 - h^2}{l^2}} = 0{,}8.$$

Препятствующая движению тела составляющая силы тяжести $F_{тяж} = mg\sin\alpha = 3$ Н . Отмечаем, что $F \prec F_{тр.мах} + F_{тяж}$, т.е. даже при F = 2,5 Н тело не сможет подняться по наклонной плоскости.

Тогда возможен другой вариант: тело m движется вниз против оси X. Условие выполнения такого движения: $F + F_{тр.мах} \prec F_{тяж}$. Однако при движении тела m вниз, сопоставляя численные значения указанных сил, видим, что неравенство не выполняется (3 Н < 3,5 Н), т.е. тело вниз не движется. Куда же тела движутся на самом деле? В чём противоречие?

Естественно, здесь нет никакого противоречия, просто при оценках в качестве силы трения ошибочно была принята *максимально возможная сила* $F_{тр.мах}$, что имеет место только при движении тел. В самом деле, если связанные тела m и M покоятся, то $a = 0$, сила трения покоя $F_{покоя} = mg\sin\alpha - F = 0{,}5$ Н и направлена вверх по оси X.

Аналогичные ситуации для случаев M = 0,3 кг и M = 0,35 кг. При M = 0,3 кг сила трения равна 0.

Задача 5 (ЗФТШ при МФТИ) [2]. В калориметр, где находится $m_л$ = 10 кг льда при температуре t_1 = –40 °С, впускают $m_п$ = 1 кг пара при температуре t_2 = 120 °С. Определите установившуюся температуру и агрегатное состояние системы. Нагреванием калориметра пренебречь. Удельные теплоёмкости: льда $c_л$ = 2100 Дж/(кг·К), пара $c_п$ = 2200 Дж/(кг·К), воды $c_в$ = 4200 Дж/(кг·К); удельная теплота плавления льда $\lambda_л$ = 0,32 МДж/кг, удельная теплота парообразования воды $r_в$=2,26 МДж/кг.

Анализ задачи

Условие задачи не позволяет заранее выяснить конечное состояние термодинамической системы (ТДС) в общем виде: после смешивания двух ТДС в различных состояниях (с различными фазами, температурами) устанавливается некоторое равновесие общей системы, термодинамические параметры которой неизвестны, а часто неизвестно и агрегатное состояние. В таких случаях полезно провести предварительную оценку.

Сначала для наглядности приведём графики зависимости температуры $t°$ системы от времени t теплообмена с окружением (другой ТДС):

а) график с выделением тепла (охлаждение ТДС), при этом возможны фазовые превращения;

б) график с поглощением теплоты (нагревание ТДС), тоже возможны фазовые превращения (рис. 3).

Нетрудно догадаться, что при смешивании двух ТДС, находящихся в различных фазовых состояниях и имеющих различные температуры, можно получить любое равновесное состояние. Фазовое состояние новой ТДС и его температура определяются массами m и термодинамическими характеристиками смешиваемых систем (теплоёмкостью c фазового состояния систем до и после их смешивания и удельной теплотой фазовых превращений λ, r).

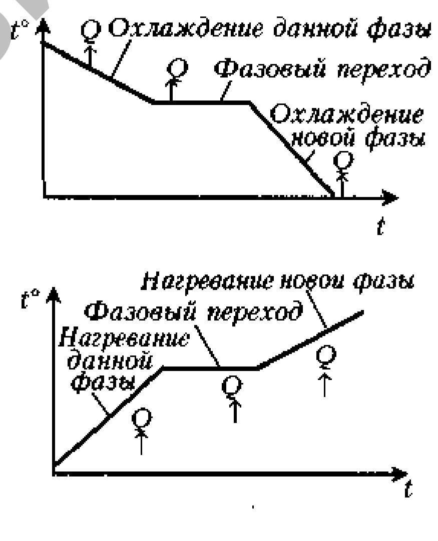

Рис. 3

Некоторые возможные процессы установления равновесного состояния могут быть показаны графически (для случая смешивания одного и того же вещества в различных фазах: твёрдое–жидкое, жидкое–пар). Заметим, что многие методисты по оси абсцисс откладывают количество теплоты Q, которым данная ТДС обменивается с окружением, т.е. с другой, смешивающейся с ней ТДС. Думаем, что здесь никаких противоречий нет, процесс теплообмена идёт во времени (рис. 4).

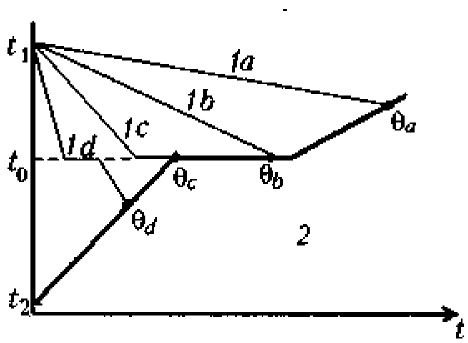

Рис. 4

Итак, при смешивании ТДС 1 и 2 устанавливается равновесие системы 1 с новой системой 2, причём изменение состояния системы 2 идёт за счёт только охлаждения системы 1; выделенное количество теплоты идёт на нагревание системы 2 в начальной фазе, на фазовый переход и на нагревание новой фазы этой системы. Уравнение теплового баланса в этом случае запишется так:

$$Q_{11} + Q_{21} + Q_{20} + Q_{22} = 0 \Rightarrow c_{11} m_1 (t_1 - \theta) = c_{21} m_2 (t_0 - t_2) + q m_2 + c_{22} m_2 (\theta - t_0),$$

где первый индекс обозначает номер системы, второй — номер процесса, причём индекс «0» относится к фазовому переходу; c — удельная теплоёмкость; q — удельная теплота фазового перехода, θ — конечная температура смеси.

Процесс опять идёт за счёт только охлаждения системы 1, при этом только часть системы 2 переходит в новую фазу. Уравнение теплового баланса имеет вид

$$c_{11} m_1 (t_1 - \theta) = c_{21} m_2 (\theta - t_2) + q_{20} m_2',$$

где $q_{20} = \lambda m_2'$ — масса части системы 2, перешедшей в новую фазу.

Часть системы 1 переходит в новую фазу. Процесс сопровождается нагреванием системы 2 за счёт охлаждения системы 1 и выделения ею теплоты фазового перехода. Уравнение теплового баланса:

$$c_{11} m_1 (t_1 - \theta) + q_{10} m_1' = c_{21} m_2 (\theta - t_2),$$

где m_1' — масса части системы 1, перешедшей в новую фазу.

Система 1, охлаждаясь, переходит целиком в новую фазу и охлаждается далее до равновесного состояния, а система *2* только нагревается до этой температуры. Уравнение теплового баланса имеет вид

$$c_{11} m_1 (t_1 - t_0) + q_{10} m_1 + c_{12} m_1 (t_0 - \theta) = c_{21} m_2 (\theta - t_2).$$

Следует заметить, что наклоны приведённых на рисунке графиков определяются массой и удельной теплоёмкостью соответствующей фазы ТДС, а длина горизонтальной линии фазового перехода (время фазового превращения) — массами смешиваемых веществ. Встречаются задачи, в которых равновесие может наступать после нескольких фазовых переходов одного и того же вещества типа пар$\Rightarrow$жидкость$\Rightarrow$твёрдая фаза или наоборот. Возможны задачи о тепловом контакте систем, представляющих собой вещества различной природы с различными температурами фазового перехода.

Подводя итог, отметим, что такого типа задачи в рамках традиционного алгоритма решить невозможно. Необходимо предварительно оценить, какое равновесное состояние должно установиться при смешивании систем, какое из четырёх уравнений теплового баланса следует выбрать при решении задачи. Поэтому, естественно, нужна предварительная количественная оценка тепловых эффектов наблюдаемых процессов. Возможно, придётся учитывать роль калориметра, где происходит перемешивание.

Решение

Для решения задачи сделаем предварительные оценки:

При охлаждении пара до точки конденсации (100 °С) выделяется количество теплоты

$$Q_n = c_n m_n \Delta t_n^0 = 44000 \text{ Дж}.$$

При конденсации пара выделяется количество теплоты

$$Q_k = rm_n = 2260000 \text{ Дж}.$$

При остывании воды от 100 до 0 °С необходимо количество теплоты

$$Q_н = c_в m_л \Delta t_в^0 = 420000 \text{ Дж}.$$

Для нагревания льда до 0 °С необходимо количество теплоты

$$Q_л = c_л m_л \Delta t_л^0 = 840000 \text{ Дж}.$$

Для плавления льда необходимо количество теплоты

$$Q_{пл} = \lambda m_л = 3200000 \text{ Дж}.$$

Сравнение оценённых значений количеств теплоты показывает, что в калориметре установится равновесное состояние ТДС лед+вода при температуре 0 °С. Массу расплавленного льда можно найти из условия

$$m_n' = (Q_k + Q_н - Q_л)/\lambda .$$

Задача 6 (московская городская олимпиада) [3]. В очень высокой U-образной трубке с внутренним диаметром d = 1 см и радиусом закругления нижней части R = 3 см находится $V_0 = 50 \text{ см}^3$ ртути плотностью $\rho = 13{,}6 \text{ г/см}^3$ (см. рис. 5). В левое колено трубки наливают $V_1 = 2 \text{ л}$ воды. На какое расстояние ртуть переместится вдоль трубки?

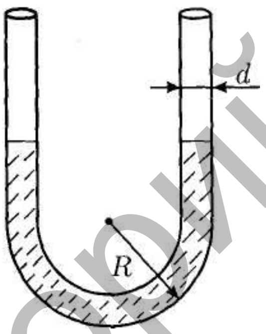

Рис. 5.

Анализ задачи

По условию задачи диаметр трубки достаточно велик для того, чтобы можно было не учитывать капиллярных явлений. При наливании в левое колено трубки большого количества воды ртуть может переместиться настолько, что вода доберётся до низа трубки. Дальнейшее увеличение количества налитой воды не будет приводить к перемещению ртути, так как вода из левого колена через изогнутый участок будет перетекать в правое колено. При этом перетёкшая вода будет располагаться поверх ртути.

Выясним, хватит ли двух литров воды для того, чтобы часть воды перетекла из левого колена в правое. Сечение трубки равно $S = \pi d^2 / 4 \approx 0{,}785 \text{ см}^2$. Общая длина столбика ртути в этой трубке составляет $V_0 / S \approx 63{,}7 \text{ см}$. Максимальное давление, которое может создать столбик ртути такой длины, равно $P_{Hg} = \rho g V_0 / S \approx 84{,}9 \text{ кПа}$. Два литра воды плотностью ρ_0 = 1 г/см^3 могут создать в вертикальной трубке максимальное давление $P_в = \rho g V_1 / S \approx 249{,}7 \text{ кПа}$. Так как $P_{Hg} \prec P_в$, то это означает, что в процессе наливания воды ртуть сместится настолько, что её верхний уровень в том колене, куда налита вода, совпадёт с верхней точкой самого нижнего поперечного сечения трубки, и часть воды перетечёт в правое колено. Поскольку радиус закругления нижней части трубки по порядку величины сравним с её внутренним диаметром, то длину столбика оставшейся в левом колене ртути можно оценить из следующих соображений: по теореме Пифагора длина горизонтальной части поверхности ртути в этом колене равна $\sqrt{3^2 - 2^2} \approx 2{,}2$ см, но с учётом того, что ртутью заполнен не весь этот объём, а примерно 3/4 его, в левой части трубки остаётся столбик с эффективной длиной, примерно равной 1,7 см. Поэтому смещение ртути вдоль оси трубки составит: $L \approx \dfrac{V_0}{2S} - 1{,}7 \approx 31{,}8 - 1{,}7 \approx 30$ см.

Задача 7 (московская городская олимпиада) [3]. Напряжение электрической сети в квартире составляет 220 В. Школьник решил сделать ёлочную гирлянду. В своих запасах он отыскал одну лампочку (36 В/40 Вт), 220 лампочек (3,5 В/0,28 А) и много соединительных проводов, сопротивление которых пренебрежимо мало. Какую цепь, включающую лампочку на 36 В и минимальное количество лампочек на 3,5 В, он должен собрать, чтобы все лампы в его гирлянде горели нормальным накалом? Считается, что лампа горит нормальным накалом, если падение напряжения на ней отличается от напряжения, на которое она рассчитана, не более, чем на 1 %.

Анализ задачи

Понятно, что лампочка (36 В/40 Вт) должна быть подключена к источнику напряжения последовательно, с некоторым количеством соединённых в различных комбинациях лампочек (3,5 В/0,28 А) — в противном случае будет невозможно обеспечить подачу на неё напряжения 36 В. По условию задачи падение напряжения на лампе может отличаться от номинального не более чем на 1 %, т.е. для лампочки, рассчитанной на 36 В, оно может варьироваться в пределах от 35,64 В до 36,36 В, а для лампочки, рассчитанной на 3,5 В, — от 3,465 В до 3,535 В. При последовательном подключении лампочки (36 В/40 Вт) и лампочек (3,5 В/0,28 А) на долю последних придётся от 183,64 В до 184,36 В. Поэтому для того, чтобы лампочки (3,5 В/0,28 А) горели нормально, их цепочка должна включать в себя от 183,64/3,535 = 51,95 лампы до 184,36/3,465 = 53,21 лампы, т.е. реально — 52 или 53 лампы.

Легко видеть, что для нормальной работы схемы недостаточно последовательно подключить к лампе (36 В/40 Вт) одну цепочку из 52 или 53 ламп (3,5 В/0,28 А). Действительно, сила тока через лампу (3,5 В/0,28 А) может составлять от 0,2772 А до 0,2828 А, а через лампу (36 В/40 Вт) — от 1,1 А до 1,122 А. Поэтому для нормальной работы схемы необходимо последовательно соединить лампу (36 В/40 Вт) с несколькими параллельно включёнными цепями из ламп (3,5 В/0,28 А), причём количество цепей может варьироваться от 1,1/0,2828 = 3,890 до 1,122/0,2772 = 4,048, т.е. реально количество цепей должно быть равно четырём. Значит, возможны следующие случаи:

1) все четыре цепи состоят из 52 ламп (3,5 В/0,28 А);

2) все четыре цепи состоят из 53 ламп (3,5 В/0,28 А);

3) часть цепей состоит из 52, а часть — из 53 ламп (3,5 В/0,28 А).

Рассмотрим эти случаи по отдельности.

1) Прежде всего вычислим сопротивления R лампы (36 В/40 Вт) и r лампы (3,5 В/0,28 А):

$$r = \frac{3,5}{0,28} = 12,5 \text{ Ом}; \quad R = \frac{U^2}{P} = \frac{36^2}{40} = 32,4 \text{ Ом}.$$

Сопротивление одной цепи из 52 ламп равно $52r$, четырёх параллельно соединённых одинаковых цепей — $52r/4$, всей цепи — $R + (52r/4)$, а напряжение на лампе (36 В/40 Вт) в соответствии с законом Ома составляет

$$U_R = \frac{220R}{R + (52r/4)} \approx 36,57 \text{ В},$$

т.е. отличается от номинального более чем на 1 %. Таким образом, случай 1) не удовлетворяет условиям задачи.

2) Аналогично случаю 1) можно показать, что напряжение на лампе (36 В/40 Вт) составляет

$$U_R = \frac{220R}{R + (53r/4)} \approx 35,995 \text{ В},$$

т.е. оно удовлетворяет условию задачи. Напряжение же на каждой из ламп (3,5 В/0,28 А) в этом случае равно

$$U_r = \frac{220 - U_R}{53} \approx 3,472 \text{ В},$$

что также лежит в пределах 1 % от номинала. Таким образом, случай 2) возможен. При таком способе включения (4 параллельные цепи из 53 последовательно соединённых ламп (3,5 В/0,28 А) последовательно соединены с лампой (36 В/40 Вт)) условия задачи выполняются, и количество ламп (3,5 В/0,28 А) составляет 212 штук.

3) Пусть часть цепей состоит из 52, а часть — из 53 ламп (3,5 В/0,28 А). В соответствии с законом Ома сила тока в участке цепи прямо пропорциональна падению напряжения на этом участке и обратно пропорциональна его сопротивлению. Так как напряжение на всех параллельно включённых цепях одинаково, и они состоят из одинаковых ламп, то отношение сил тока I_{52} и I_{53}, текущих в цепях