УДК 517.968

С.А.Искаков, М.И.Рамазанов, И.А.Иванов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: isagyndyk@mail.ru)

Первая краевая задача для уравнения теплопроводности с нагрузкой дробного порядка. II

В статье рассмотрена первая краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности в четверти плоскости. Нагруженное слагаемое — след производной дробного порядка на многообразии $x = t$. Решение задачи сводится к исследованию особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода с несжимаемым ядром. Решение характеристического уравнения методом регуляризации показало, что особое интегральное уравнение Вольтерра имеет непустой спектр при $1/2 \le \beta < 1$. Доказана теорема о существовании нетривиального решения однородной краевой задачи в неограниченной области.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, дробная производная, особое интегральное уравнение Вольтерра, нетривиальное решение.

Краевые задачи для нагруженного уравнения теплопроводности исследовались многими авторами [1–10]. Данная работа является продолжением работы [11]. В случае $\beta = \frac{1}{2}$ характеристическим уравнением для полного интегрального уравнения (10) будет

$$\mu(t) - \frac{\lambda}{\pi}\int_0^t k_h(t,\tau)\,\mu(\tau)\,d\tau = g(t), \tag{11}$$

где $k_h(t,\tau) = \dfrac{1}{\sqrt{t(t-\tau)}}$.

Данное интегральное уравнение возникает, например, при решении различных краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений, когда часть границы области задания уравнения освобождена от граничных условий [12]. В [13] исследован вопрос о спектре и разрешимости уравнения (11) при условиях $\lambda \in C$ и $t \in R_+ \equiv (0, +\infty)$. Для соответствующего однородного уравнения

$$\mu(t) - \frac{\lambda}{\pi}\int_0^t k_h(t,\tau)\,\mu(\tau) = 0 \tag{12}$$

справедлива

Теорема 2 [13]. Для $\forall\lambda$, при $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$, однородное интегральное уравнение (12) (наряду с тривиальным) имеет нетривиальное решение вида

$$\mu(t) = C \cdot t^{\gamma^*},$$

при этом $\gamma^*(\lambda)$ определяется из трансцендентного уравнения

$$A(\gamma) \equiv 1 - \frac{\lambda}{\pi}\hat{k}(\gamma),$$

где $\operatorname{Re}\gamma > -1$, $\hat{k}(\gamma) = B\left(\frac{1}{2}, \gamma + 1\right)$; $B(p,q)$ — бета-функция. Если же $\operatorname{Re}\lambda < 0$, то однородное уравнение (12) имеет только тривиальное решение.

Теперь найдем частное решение неоднородного интегрального уравнения (11). Введем обозначение

$$l(\gamma) = -\frac{\hat{k}(\gamma)}{\hat{k}'(\gamma)}. \tag{13}$$

Это величина, обратная логарифмической производной функции $k(\gamma)$. Если $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$, то частное решение уравнения (11) можно записать в виде

$$\mu(t) = g(t) + l(\gamma^*) \int_0^t r(t,\tau) g(\tau) d\tau,$$

где

$$r(t,\tau) = \frac{\tau^{\gamma^*}}{t^{\gamma^*+1}}.$$

Если же $\mathrm{Re}\lambda < 0$, то решение уравнения (12) будет иметь вид

$$\mu(t) = g(t) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} l(\gamma_k^0) \frac{\tau^{\gamma_k^0}}{t^{\gamma_k^0+1}} g(\tau) d\tau,$$

где $\gamma_k^0 = \gamma_{1k}^0 + i\gamma_{2k}^0$, $k = 1, 2, ...,$— нули функции $A(\gamma) = 1 - \frac{\lambda}{\pi}\hat{k}(\gamma)$, расположенные в полуплоскости $\mathrm{Re}\gamma < -1$.

Значит, справедлива

Теорема 3. [13]. Для любой функции $g(t)$ $(e^{-t} \cdot g(t) \in L_1(0,+\infty))$ неоднородное интегральное уравнение (12) имеет решение $\mu(t)$ $(e^{-t} \cdot \mu(t) \in L_1(0,+\infty))$

$$\mu(t) = g(t) + (\gamma^*) + \int_0^t \frac{\tau^{\gamma^*}}{t^{\gamma^*+1}} g(\tau) d\tau + ct^{\gamma^*}, \text{ если } \mathrm{Re}\lambda \geq 0;$$

$$\mu(t) = g(t) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} l(\gamma_k^0) \frac{\tau^{\gamma_k^0}}{t^{\gamma_k^0+1}} g(\tau) d\tau, \text{ если } \mathrm{Re}\lambda < 0.$$

Теперь уравнение (10) перепишем в виде

$$\mu(t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^t k_h(t,\tau) \mu(\tau) d\tau = f_2(t) - \lambda \int_0^t k_{3/2}(t,\tau) \mu(\tau) d\tau,$$

где

$$k_{3/2}(t,\tau) = \frac{2}{3\pi} \left(\frac{t}{t-\tau} \right)^{3/2} {}_2F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{5}{4}, \frac{7}{4}; -\frac{t^2}{4(t-\tau)}\right).$$

Как отмечено выше, $\lim\limits_{t \to 0} \int_0^t k_{3/2}(t,\tau) d\tau = 0.$

В силу того, что ядро $k_{3/2}(t,\tau)$ является регулярным (имеет слабую особенность), то, используя теорию возмущений линейных операторов, получим следующее утверждение.

Теорема 4. Для интегрального уравнения (10) в пространстве (3) $\dim\left\{\ker(K_{3/2})\right\} = 0$, если $\mathrm{Re}\lambda < 0$, если $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$, то $\dim\left\{\ker(K_{3/2})\right\} = 1.$

Таким образом, для задачи (1)–(2) будет справедлива

Теорема 5. Краевая задача (1)–(2) при $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$ является нетеревой с индексом 1. Если же $\mathrm{Re}\lambda < 0$, то задача (1)–(2) имеет единственное решение в (3).

Перейдем теперь к случаю $\frac{1}{2} < \beta < 1$. Характеристическим интегральным уравнением, соответствующим уравнению (6), будет следующее уравнение:

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t K_h(t,\tau) \mu(\tau) d\tau = g(t), \ t > 0, \tag{14}$$

где

$$K_h(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(1-\beta)} \cdot \frac{1}{t^{\beta}\sqrt{t-\tau}}. \tag{15}$$

Замечание 1. Оставшаяся часть ядра $K_{1+\beta}(t,\tau),$ которую обозначим

$$K_{\kappa}(t,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(3-\beta)}\cdot\frac{t^{2-\beta}}{(t-\tau)^{3/2}}\cdot{}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3-\beta}{2},\frac{4-\beta}{2};-\frac{t^2}{4(t-\tau)}\right),$$

будет иметь слабую особенность при $0<\tau<t<\infty.$

Используя оператор дробного интегрирования, уравнение (14) можно записать в виде

$$\mu(t)=\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(1-\beta)}\cdot\frac{1}{t^{\beta}}\cdot{}_0D_t^{-\frac{1}{2}}\mu(t), \tag{16}$$

или же

$${}_0D_t^{-\frac{1}{2}}\mu(t)=\frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(1-\beta)}{\lambda}\cdot t^{\beta}\cdot\mu(t). \tag{17}$$

Если к обеим частям уравнения (16) применим оператор ${}_0D_t^{-\frac{1}{2}},$ то с учетом соотношения (17) получим

$$\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\lambda^2}\cdot t^{\beta}\cdot\mu(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}D_t^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{t^{\beta}}\ {}_0D_t^{-\frac{1}{2}}\mu(t)\right\}. \tag{18}$$

Преобразуем правую часть равенства (18):

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\ {}_0D_t^{-\frac{1}{2}}\mu(t)=\left\{\frac{1}{t^{\beta}}\ {}_0D_t^{-\frac{1}{2}}\mu(t)\right\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\tau^{\beta}\sqrt{t-\tau}}\int_0^{\tau}\frac{\mu(\xi)}{\sqrt{\tau-\xi}}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^t\mu(\xi)d\xi\int_{\xi}^t\frac{d\tau}{\tau^{\beta}\sqrt{(t-\tau)(\tau-\xi)}}=\left\|\frac{\tau-\xi}{t-\tau}=z\right\|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^t\mu(\xi)d\xi\int_0^{\infty}t^{-\beta}\cdot\sqrt{z}(1+z)^{-(1-\beta)}\cdot\left(z+\frac{\xi}{t}\right)^{-\beta}dz=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}t^{-\beta}\left(\frac{\xi}{t}\right)^{1/2-\beta}\cdot B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot{}_2F_1\left(1-\beta,\frac{1}{2};1;1-\frac{\xi}{t}\right)\mu(\xi)d\xi=$$

$$=\int_0^t\frac{\xi^{1/2-\beta}}{\sqrt{t}}\cdot{}_2F_1\left(1-\beta,\frac{1}{2};1;1-\frac{\xi}{t}\right)\mu(\xi)d\xi.$$

Значит, окончательно, равенство (18) примет вид

$$\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\lambda^2}\cdot t^{\beta+1/2}\cdot\mu(t)=\int_0^t{}_2F_1\left(1-\beta,\frac{1}{2};1;1-\frac{\tau}{t}\right)\frac{\mu(\tau)}{\tau^{\beta-1/2}}d\tau. \tag{19}$$

Функция

$${}_2F_1\left(1-\beta,\frac{1}{2};1;1-\frac{\tau}{t}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-\beta)_k\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!}\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^k \text{ —}$$

гипергеометрический ряд, который является аналитической функцией и абсолютно сходится для всех $0\le\tau\le t.$

Для $\forall\tau\in[0,t]$ при $\frac{1}{2}<\beta<1$ данная гипергеометрическая функция монотонно убывает и справедливы оценки

$$1\le{}_2F_1\left(1-\beta,\frac{1}{2};1;1-\frac{\tau}{t}\right)\le\frac{\Gamma\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\beta)}.$$

К интегралу в равенстве (19) применим обобщенную теорему о среднем, тогда

$$\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\lambda^2}\cdot t^{\beta+1/2}\cdot\mu(t)={}_2F_1\left(1-\beta,\frac{1}{2};1;1-\frac{\tau}{t}\right)\Bigg|_{\tau=\theta\cdot t}\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{\tau^{\beta-1/2}}d\tau,$$

или же имеем

$$\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{b(\theta,\beta)\lambda^2}\cdot t^{\beta+1/2}\cdot\mu(t)=\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{\tau^{\beta-1/2}}d\tau, \tag{20}$$

где $b(\theta,\beta)={}_2F_1\left(1-\beta,\frac{1}{2};1;1-\theta\right)$; $0\le\theta\le1$. $b(\theta,\beta)={}_2F_1\left(1-\beta,\frac{1}{2};1;1-\theta\right)$; $0\le\theta\le1$, $\theta=const$.

Дифференцируя обе части равенства (20), получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\mu'(t)=\left(\frac{\lambda^2\cdot b(\theta,\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\cdot\frac{1}{t^{2\beta}}-\frac{\beta+1/2}{t}\right)\cdot\mu(t),$$

решением которого будет

$$\mu_{0.0}(t)=C\cdot\frac{1}{t^{\beta+1/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda^2\cdot b(\theta,\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)(2\beta-1)}\cdot\frac{1}{t^{2\beta-1}}\right\}. \tag{21}$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения (14), которое представим в следующем виде:

$$\mu(t)=\frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}t^{\beta}}\cdot{}_0D_t^{-\frac{1}{2}}[\mu(t)]+g(t), \tag{22}$$

или

$${}_0D_t^{-\frac{1}{2}}[\mu(t)]=\frac{\Gamma(1-\beta)}{\lambda}\cdot t^{\beta}(\mu(t)-g(t)).$$

Применим оператор ${}_0D_t^{-\frac{1}{2}}$ к соотношению (22) и с учетом последнего равенства получим

$$\frac{\Gamma(1-\beta)}{\lambda}\cdot t^{\beta}(\mu(t)-g(t))-{}_0D_t^{-\frac{1}{2}}[g(t)]=\frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,{}_0D_t^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{t^{\beta}}\,{}_0D_t^{-\frac{1}{2}}[\mu(t)]\right\}.$$

Повторяя выкладки, проведенные для соответствующего однородного уравнения, будем иметь

$$\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\lambda^2}\cdot t^{\beta+1/2}(\mu(t)-g(t))-\frac{\Gamma(1-\beta)}{\lambda}\cdot\sqrt{t}\cdot{}_0D_t^{-\frac{1}{2}}[g(t)]=$$

$$=b(\theta,\beta)\cdot\int_0^t\frac{\mu(t)}{\tau^{\beta-1/2}}d\tau.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по переменной t, сведем его к следующему дифференциальному уравнению относительно искомой функции $\mu(t)$:

$$\mu'(t)-\left[\frac{\lambda^2\cdot b(\theta,\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\cdot\frac{1}{t^{2\beta}}-\frac{\beta+1/2}{t}\right]\cdot\mu(t)=\tilde{g}(t), \tag{23}$$

где

$$\tilde{g}(t)=\frac{1}{t^{\beta+1/2}}\cdot\left[t^{\beta+1/2}\cdot g(t)+\frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)}\cdot\sqrt{t}\;D^{-\frac{1}{2}}[g(t)]\right]_t'.$$

Значит, частное решение уравнения (23) будет иметь вид

$$\mu_{\tau p}(t)=g(t)+\frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)}\;t^{-\beta}\cdot{}_0D_t^{-\frac{1}{2}}[g(t)]\;+$$

$$+(2\beta-1)\frac{A_\lambda(\theta,\beta)}{t^{\beta+1/2}}\cdot\exp\left[-\frac{A_\lambda(\theta,\beta)}{t^{2\beta-1/2}}\right]\cdot\int_0^t\tilde{\tilde{g}}(\tau)\cdot\exp\left[\frac{A_\lambda(\theta,\beta)}{t^{2\beta-1}}\right]d\tau,$$

где

$$A_\lambda(\theta,\beta)=\frac{\lambda^2\cdot b(\theta,\beta)}{(2\beta-1)\cdot\Gamma^2(1-\beta)}; \tag{24}$$

$$\tilde{\tilde{g}}(t)=\frac{1}{t^{\beta-1/2}}\cdot g(t)+\frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)}\cdot\frac{1}{t^{2\beta-1/2}}\cdot{}_0D_t^{-\frac{1}{2}}[g(t)]. \tag{25}$$

Таким образом, справедливо следующее

Утверждение. Если для функции $g(t)$ выполнено условие

$$\exp\left[\frac{A_\lambda(\theta,\beta)}{t^{2\beta-1}}\right]\cdot\tilde{\tilde{g}}(\tau)\in L_1(0,+\infty), \tag{26}$$

где $\tilde{\tilde{g}}(t)$ определяется соотношением (25), то сингулярное интегральное уравнение (14) имеет общее решение вида

$$\mu(t)=g(t)+\frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)}\,t^{-\beta}\cdot{}_0D_t^{-\frac{1}{2}}[g(t)]\,+$$

$$+(2\beta-1)\frac{A_\lambda(\theta,\beta)}{t^{\beta+1/2}}\cdot\exp\left[-\frac{A_\lambda(\theta,\beta)}{t^{2\beta-1/2}}\right]\cdot\int_0^t\tilde{\tilde{g}}(\tau)\cdot\exp\left[\frac{A_\lambda(\theta,\beta)}{t^{2\beta-1}}\right]d\tau+$$

$$+C\cdot t^{-(\beta+1/2)}\cdot\exp\left\{-\frac{A_\lambda(\theta,\beta)}{t^{2\beta-1}}\right\},$$

где функция $\tilde{\tilde{g}}(t)$ принадлежит классу (26) и определяется из соотношения (25).

Для полного интегрального уравнения (6), в силу замечания 1, будет справедлива

Теорема 5. При $\frac{1}{2}<\beta<1$, $\forall\lambda\in C$, для сингулярного интегрального уравнения типа Вольтерра (6) в классе функций

$$t^{+(\beta+1/2)}\cdot\exp\left\{\frac{\lambda^2\cdot b(\theta,\beta)}{(2\beta-1)\Gamma^2(1-\beta)}\right\}\cdot\mu(t)\in M(0,\infty), \tag{27}$$

где $M(0,\infty)$ — класс ограниченных на $(0,+\infty)$ функций

$$\dim Ker(K_{1+\beta})=1.$$

Таким образом, окончательно, для задачи (1)–(2) в случае $\frac{1}{2}<\beta<1$ справедлива

Теорема 6. Краевая задача (1)–(2) при $\frac{1}{2}<\beta<1$, $\forall\lambda\in C$, в классе (3) является нетеревой с индексом, равным 1.

Список литературы

1 *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. — М.: Наука, 2012. — 232 с.

2 *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003. — 272 с.

3 *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. — Алматы: Ғылым, 2010. — 334 с.

4 *Жанболова А.К., Каршыгина Г.Ж.* О нагруженном уравнении теплопроводности с нагрузкой дробного порядка // Теоретические и прикладные проблемы математики, механики и информатики: Материалы междунар. науч. конф. (12–14 июня). — Караганда, 2014. — С. 25, 26.

5 *Есбаев А.Н., Жанболова А.К., Петерс С.Н.* О первой краевой задаче для слабо-нагруженного параболического уравнения // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2012. — № 4 (68). — С. 31–37.

6 *Аттаев А.Х.* Задача Гурса для локально-нагруженного уравнения со степенным параболическим вырождением // Докл. Адыгской (Черкесской) междунар АН. — 2008. — Т. 10. — № 2. — С. 14–16.

7 *Дикинов Х.Ж., Керефов А.А., Нахушев А.М.* Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Дифференциальные уравнения. — 1976. — Т. 12. — № 1. — С. 177–179.

8 *Akhmanova D.M., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., Tuimebayeva A.E.* On the solutions of the homogeneous mutually conjugated Volterra integral equations // Bull. of Karaganda university. Ser. Mathematics. — 2013. — № 2 (70). — С. 153–158.

9 *Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Об особом интегральном уравнении Вольтерра второго рода со спектральным параметром // Сибирский математический журнал. — 2011. — Т. 52. — № 1. — С. 3–14.

10 *Амангалиева М.М., Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М. И.* Краевые задачи для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности с приближением линии загрузки в нуль или бесконечность // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Вып. 47. — № 2. — С. 231–243.

11 *Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I., Tuimebayeva A.E.* On a Singular Volterra Integral Equations of the Third Kind // World Applied Sciences Journal. — 2013. — 26 (11). — P. 1424–1427.

12 *Нахушев А.М.* Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода // Дифференциальные уравнения. — 1974. — Т. 10. — № 1. — С. 100–111.

13 *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. — 982 с.

С.А.Ысқақов, М.Ы.Рамазанов, И.А.Иванов

Бөлшекті жүктелген жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бірінші шеттік есеп. II

Мақалада жазықтың ширегінде жүктелген жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бірінші шеттік есеп қарастырылған. Мұндағы жүктелген қосылғыш $x = t$ сызығында — бөлшек ретті туындының ізі. Есептің шешімі сығылмайтын өзекті екінші текті Вольтерра ерекше интегралдық теңдеуін зерттеуге келтірілді. Сипаттамалық теңдеуінің шешімімен регуляризациялау әдісін пайдаланып, Вольтерра ерекше интегралдық теңдеуінің $1/2 \le \beta < 1$ болғанда бос емес спектрі бар екені көрсетілген. Шектелмеген облыста біртекті шеттік есептің тривиалды емес шешімінің бар екені туралы теорема дәлелденді.

S.A.Iskakov, M.I.Ramazanov, I.A.Ivanov

The first boundary problem for heat conduction equation with a load of fractional order. II

In this paper we consider the first boundary value problem for a loaded heat conduction equation in a quarter plane. A loaded summand is the trace of the derivative of fractional order on the manifold $x = t$. Solving of the problem is reduced to the study of singular Volterra integral equation of the second kind with incompressible kernel. Using the regularization method by solution of the characteristic equation it is shown that the singular Volterra integral equation have the non-empty spectrum a $1/2 \le \beta < 1$. Theorem on the existence of a nontrivial solution of the homogeneous boundary value problem in an unbounded domain is proved.

References

1 Nakhushev A.M. *Loaded equations and their applications*, Moscow: Nauka, 2012, 232 p.

2 Nakhushev A.M. *Fractional calculus and its application*, Moscow: Fizmatlit, 2003, 272 p.

3 Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I. *Loaded equation how perturbed differential equations*, Almaty: Gylym, 2010, 334 p.

4 Zhanbolova A.K., Karshygina G.Zh. *Theoretical and applied problems of mathematics, mechanics and informatics:* Proceedings of the International Scientific Conference con (June, 12–14), Karaganda, 2014, 25–26.

5 Esbaev A.N., Zhanbolova A.K., Peters S.N. *Bull. Karagand. University. Ser. Mathematics*, 2012, 4 (68), p. 31–37.

6 Attaev A.Kh. *Docking frets Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences*, 2008, 10, 2, p. 14–16.

7 Dikinov Kh.Zh., Kerefov A.A., Nakhushev A.M. *Differential equations*, 1976, 12, 1, p. 177–179.

8 Akhmanova D.M., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., Tuimebayeva A.E. *Bull. University of Karaganda. Ser. Mathematics*, 2013, 2 (70), p. 153–158.

9 Akhmanova D.M., Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I. *Siberian Mathematical Journal*, 2011, 52, 1, p. 3–14.

10 Amangalieva M.M., Akhmanova D.M., Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I. *Differential equations*, 2011, 47, 2, p. 231–243.

11 Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I., Tuimebayeva A.E. *World Applied Sciences Journal*, 2013, 26 (11), p. 1424–1427.

12 Nakhushev A.M. *Differential equations*, 1974, 10, 1, p. 100–111.

13 Gradshteiyn I.S., Ryzhik I.M. *Tables of integrals, series and products (in Russian)*, Moscow: Fizmatgiz, 1963, 982 p.