МАТЕМАТИКА

УДК 517.518

К.Т.Бертисканова, А.А.Бердалиева

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова

О ВЗАИМОСВЯЗИ УЧЕБНЫХ МАТЕРИАЛОВ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ ПОНЯТИЮ ОТНОШЕНИЯ

Мақалада мектеп математикасы курсының негізгі ұғымдарының бірі — қатынастың атқаратын қызметі мен орны көрсетілген. Осы ұғымның мектептегі алгебра және геометрия курстары арасындағы санның модулі мен қатынас графигін түрлендіргендегі симметрия ұғымдарымен байланысы баяндалған.

In the article there are shown the role and place of concept of the relation that is one of the important mathematical concepts of a school course. Here is considered the connection of this concept with such concepts of a school course of algebra and geometry as the absolute value of a number and the symmetry while the relations′ graphs transformation.

Знания, умения учащихся, приобретенные ими в процессе обучения математике, не должны быть простым, механическим их суммированием. Решение многих математических задач основывается на применении системы знаний не только по одной дисциплине. Качество обучения учащихся зависит от применения ими различных компонентов научных знаний по алгебре и геометрии в их взаимосвязи. Поэтому в статье рассматривается вопрос о взаимосвязи учебных материалов алгебры и геометрии в процессе обучения учащихся школьной математике на примере понятия отношения.

В основе школьного курса математики лежит теоретико-множественный подход, что позволяет ввести некоторые теоретико-множественные понятия при изучении ряда вопросов [1]. Одним из таких общих понятий математики является понятие отношения, которое не определяется, а дается с помощью описания. Отношение можно рассматривать как между элементами одного, так и двух множеств. При этом, говоря об отношении между множествами, имеют дело с множеством упорядоченных пар, т.е. парами элементов, находящихся в данном отношении. Отношение между двумя множествами можно задать с помощью множества точек плоскости с координатами x и y, т.е. графически. Другими словами, некоторое множество точек координатной плоскости является графиком отношения между абсциссами и ординатами точек.

Специальным видом отношения является понятие отображения, которое можно рассматривать как: отображения числовых множеств на числовые множества (числовые функции); отображения числовых множеств на точечные множества (метод координат); отображения множеств геометрических фигур на числовые множества (измерение геометрических величин); отображения точечных множеств на точечные множества (геометрические преобразования) [2]. Такая особенность понятия отображения, распространяющаяся на многие вопросы школьного курса математики, дает возможность при рассмотрении некоторых понятий переходить от алгебраического языка на геометрический и, наоборот, позволяя тем самым устанавливать взаимосвязь в изучении алгебраического и геометрического материалов, проводить интеграцию при изучении родственных вопросов математики [3].

Понятие функции в школьном курсе математики вводится на основе общего понятия отношения. С понятием отношения в математику вводятся такие понятия, как область определения, область значений отношения, график отношения и др.

Известно, что функция является частным случаем отношения, а именно всякая функция является отношением, но не всякое отношение может быть функцией. Действительно, на двух рисунках (см. рис. 1 и 2) даны изображения графиков некоторых множеств точек координатной плоскости или, иначе говоря, графики отношений между абсциссами и ординатами этих точек.

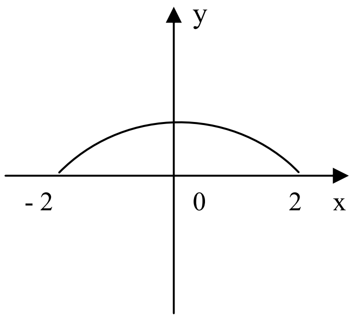

Рис. 1

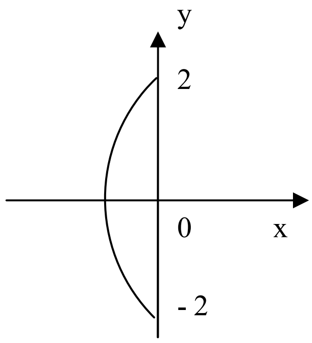

Рис. 2

В первом случае (рис. 1) мы имеем график отношения, являющегося функцией, во втором (рис. 2) — некоторое отношение, не являющееся графиком функции. Если некоторое отношение между элементами двух множеств является функцией, то каждому элементу одного множества соответствует единственный элемент другого множества. Здесь первое множество является областью определения данного отношения (в нашем случае — функции), а второе — областью значений этого отношения. Таким образом, понятие функции трактуется как соответствие, и последнее понятие является исходным. Авторы современных школьных учебников рассматривают понятие функции как некоторое соответствие, поскольку в таком представлении понятие функции становится интуитивно возможным и доступным для учащихся.

В школьных учебниках не указывается различие между понятиями «отношение» и «соответствие». Определение функции, принятое авторами современных школьных учебников, дает возможность рассмотреть только понятие отношения, поскольку общая теория отношений и соответствий не играет особой роли в процессе обучения математике учащихся [2]. Отношение между множествами определяется законом соответствия, который устанавливается с помощью формулы или путем описания.

Понятие функции, как некоторого подмножества отношения, как его видового отличия, является одним из фундаментальных понятий математики. Впервые термин «функция» был введен в науку в конце XVII в., и лишь в 1918 г. он стал применяться в курсе средней школы.

Понятие функции имеет большое теоретическое и практическое значение. В школьном курсе математики знакомство с понятием функции, с первым графиком функции (линейной) начинается в 6 классе и завершается в 11 классе изучением показательных, логарифмических и степенных функций. Поэтому изучение темы «Функция» представляет собой одну из важных методических линий школьного курса математики.

Изучая понятие функции, учащиеся знакомятся с переменными величинами, которых больше, чем постоянных. Известно, что постоянных величин, как в природе, так и в самой математике, очень мало. В математике в качестве примера постоянной величины можно привести две формулы (отношение длины окружности к ее диаметру и сумма внутренних углов треугольника), которые не зависят от выбранных значений величин. Одни переменные величины изменяются произвольно, а другие — в определенной зависимости, именно последние величины представляют собой предмет особого изучения математики.

В школьном курсе математики график отношения не является предметом специального изучения. А между тем именно это понятие представляет собой основную базу для построения курса математики 6–8 классов. В связи с этим для систематизации знаний, умений учащихся по теме «Функция» можно в старших классах более глубже рассмотреть понятие отношения и его график.

Перейдем к вопросу о графике отношения. Для этого рассмотрим различные варианты одного и того же отношения между элементами множеств, закон соответствия которого выражается формулами, содержащими переменную под знаком модуля. Кроме того, остановимся на связи между поставленной алгебраической задачей и понятием симметрии из курса геометрии, которая осуществляется теоретико-множественным подходом.

С понятием симметрии учащиеся знакомятся в 6 классе, а систематическое его изучение начинается в 9 классе в разделе «Преобразования фигур». Это понятие играет важную роль при изучении геометрии и находит широкое применение не только в самой геометрии, но и в реальной действительности. Идеально красивые формы зданий и других сооружений, узоры на тканях, комнатных обоях, листья растений, крылья бабочки и другие часто содержат в себе элементы симметрии, точнее, являются симметричными относительно некоторой оси. Поэтому изучению темы «Осевая симметрия» необходимо уделить должное внимание. В школьном курсе геометрии вопросу симметрии уделяется мало времени. Изучение данного вопроса носит фрагментарный характер, учащиеся имеют по теме неполное, поверхностное представление. А между тем возвращение к идее симметрии на уроках не только в курсе геометрии, но и алгебры позволило бы развить пространственное воображение учащихся и более прочно освоить свойства фигур, например, при построении графиков функций, содержащих переменную под знаком модуля. С осевой симметрией можно тесно связать вопрос о графиках отношений. Рассмотрим, как симметрия относительно оси может быть представлена в аналитической форме, и наоборот. Это становится возможным благодаря тому, что одним из свойств отношения является его симметричность. Для рассмотрения этого вопроса учащиеся должны иметь представления о свойствах отношений. Такой подход к обучению о свойствах, осуществляющий связь между учебными материалами курсов алгебры и геометрии, позволит систематизировать знания учащихся, сделать их более осознанными и прочными.

Основными видами графика функции, содержащей переменную под знаком модуля, являются: $y=f(|x|)$; $y=|f(x)|$; $|y|=f(x)$. В школьном курсе математики одним из простейших графиков функций указанных видов является $y=|x|$. Из этих основных видов путем различных комбинаций знака модуля можно получить следующие виды отношений:

1. $y=f(|x|)$.
2. $y=-f(|x|)$.
3. $y=f(-|x|)$.
4. $y=-f(-(|x|))$.
5. $y=|f(x)|$.
6. $y=|f(-x)|$.
7. $y=-|f(x)|$.
8. $y=-|f(-x)|$.
9. $y=|f(|x|)|$.
10. $y=-|f(|x|)|$.
11. $y=|f(-(|x|))|$.
12. $y=-|f(-(|x|))|$.
13. $|y|=f(x)$.
14. $|y|=-f(x)$.
15. $|y|=f(-x)$.
16. $|y|=-f(-x)$.
17. $|y|=|f(x)|$.
18. $|y|=|f(-x)|$.
19. $|y|=f(|x|)$.
20. $|y|=f(-(|x|))$.
21. $|y|=-f(-(|x|))$.
22. $|y|=|f(|x|)|$.
23. $|y|=|f(-(|x|))|$.

Как отмечалось ранее, мы рассмотрим не числовую функцию, а некоторое множество точек координатной плоскости (отношение), изображенное на рисунке 3, и построим различные графики данного отношения.

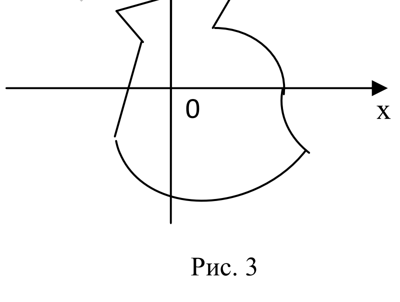

Рис. 3

При построении графиков наряду с понятием симметрии следует воспользоваться также определением модуля действительного числа, которое здесь не приводится.

На построениях графиков отношений вида: $y=f(-x)$, $y=-f(x)$, $y=-f(-x)$, мы не будем останавливаться, считая их элементарными. Отметим лишь то, что графики отношений $y=f(x)$ и $y=f(-x)$ - симметричны относительно оси *ОУ,* а графики отношений $y=f(x)$ и $y=-f(x)$ симметричны относительно оси *ОХ.*

Рассмотрим более подробно построения некоторых графиков отношений из предлагаемой системы заданий.

1. График отношения, заданного формулой $y=f\left(\left|x\right|\right)$, является симметричным относительно оси *OУ*. Поэтому сначала строим часть графика при неотрицательных значениях *x*, а затем его симметрично отразим относительно оси *OУ* (рис.4). Если перегнуть лист бумаги по оси *OУ*, то левая и правая части графика отношения совпадут.

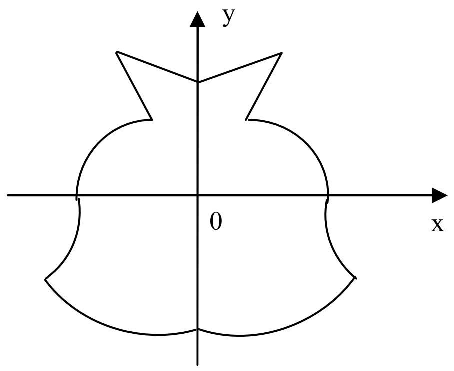

Рис. 4

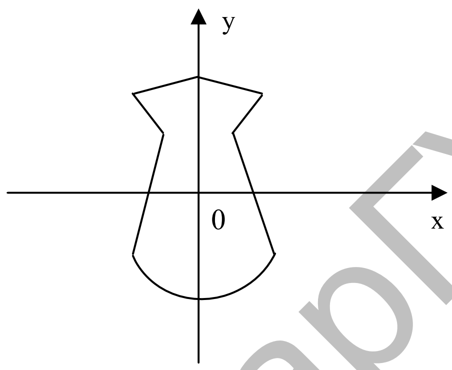

Рис. 5

3. Для построения графика отношения $y=f\left(-\left(|x|\right)\right)$, исходя из определения модуля действительного числа и симметричности графика относительно оси *OУ*, рассмотрим два графика отношений:

а) $y=f\left(-x\right)$ при $x\geq 0$; б) $y=f\left(x\right)$, при $x<0$.

График данного отношения представлен на рисунке 5.

4. График отношения $y=-f\left(-\left(\left|x\right|\right)\right)$ получается из графика, изображенного на рисунке 5, симметричным отражением его относительно оси *OX* (рис. 6).

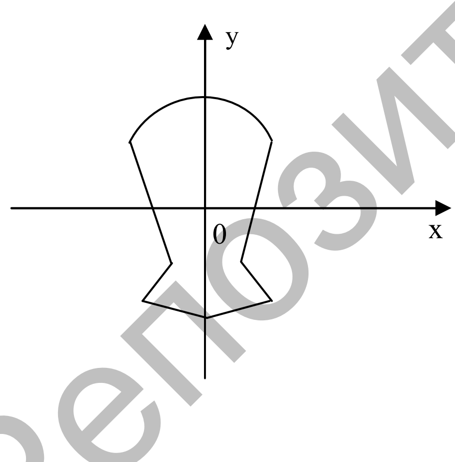

Рис. 6

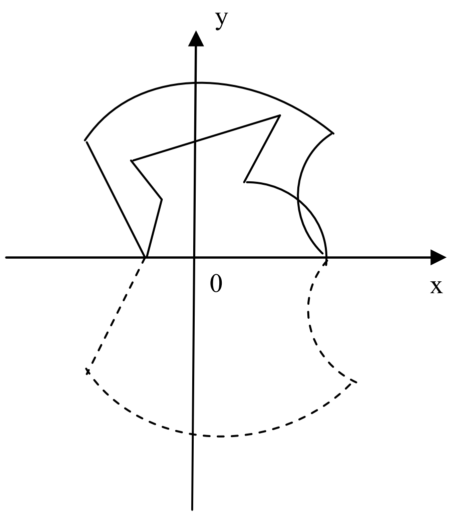

Рис. 7

5. График отношения, заданного формулой $y=\left|f\left(x\right)\right|$, будет лежать в верхней полуплоскости, т.е. выше оси *OX*, включая саму ось, поскольку все выражение $f\left(x\right)$ находится под знаком модуля. Поэтому часть графика, лежащую выше оси *OX,* оставляем без изменения, а часть графика, которая находится ниже оси *OX,* симметрично отразим относительно оси *OX* (рис. 7).

6. Графики отношений $y=\left|f\left(-x\right)\right|$ и $y=\left|f\left(x\right)\right|$ (рис. 7) симметричны относительно оси *OУ*. Откуда легко получается график $y=\left|\ f\left(-x\right)\right|$ (рис. 8).

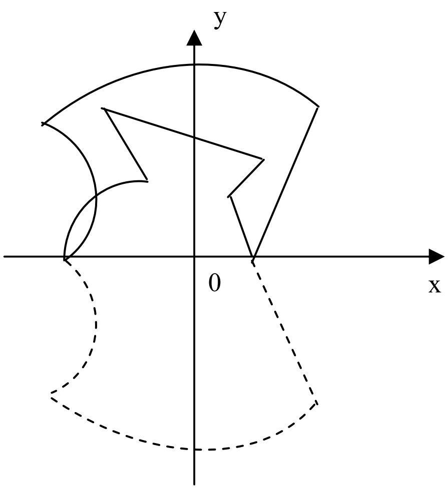

Рис. 8

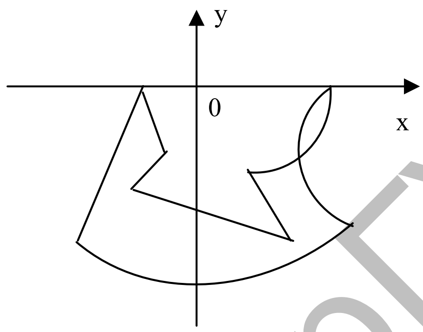

Рис. 9

7. График отношения $y = -\left| f(x) \right|$ получается из графика отношения $y = \left| f(x) \right|$ (рис.7) симметричным отражением относительно оси *OX* (рис. 9).

9. График отношения $y = \left| f(|x|) \right|$ симметричен относительно оси *OУ*, потому что неизвестное находится под знаком модуля и располагается выше оси *OX,* так как все выражение $f(x)$ находится под модулем. Из графика отношения $y = f(|x|)$ (рис. 4) данный график получается путем симметричного отражения его относительно оси *OX.* Полученный таким образом график представлен на рисунке 10.

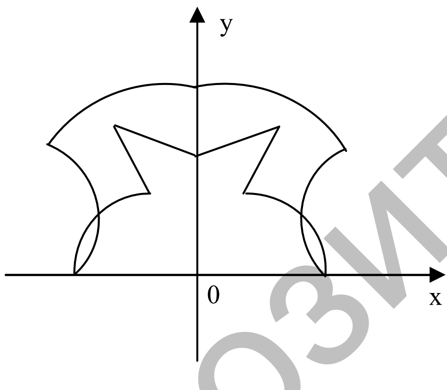

Рис. 10

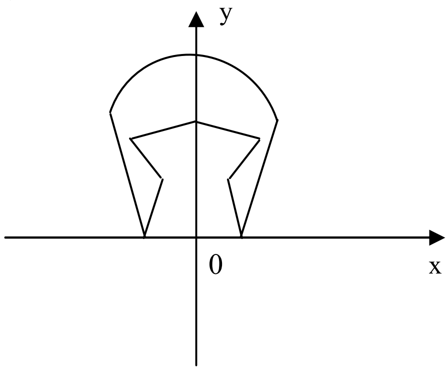

Рис. 11

11. Как и в предыдущем задании (рис. 10), график $y = \left| f(-(|x|)) \right|$ симметричен относительно оси *OУ* и будет лежать выше оси *OX*, включая эту ось. В качестве исходного графика берется график отношения $y = f(-(|x|))$ (рис. 5). Данный график представлен на рисунке 11.

13. Отношение, заданное формулой $|y| = f(x)$, обладает свойством симметричности относительно оси *OX*. Поскольку данное отношение имеет смысл при $f(x) > 0$, то построим его график, сохранив верхнюю часть, лежащую выше оси *OX,* и отразим ее симметрично относительно этой же оси *OX* (рис.12). Если лист бумаги перегнуть по оси *OX,* то верхняя и нижняя части графика данного отношения совпадут.

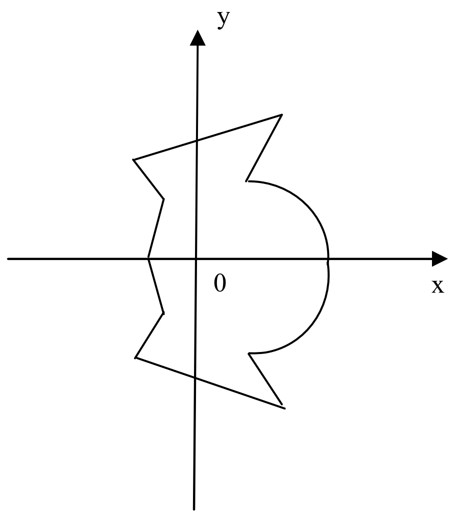

Рис. 12

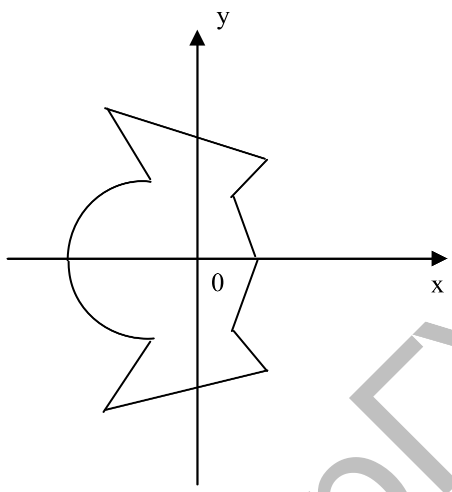

Рис. 13

15. График отношения $|y| = f(-x)$ легко получить из графика отношения $|y| = f(x)$ (рис. 12), симметрично отразив последний относительно оси *ОУ*. Либо, построив график отношения $y = f(-x)$, сохраним его верхнюю часть и отразим симметрично относительно оси *OX* (рис. 13).

17. Для построения графика отношения $|y| = |f(x)|$ воспользуемся графиком отношения $y = |f(x)|$ (рис. 7), а затем его симметрично отразим относительно оси *OX* (рис. 14).

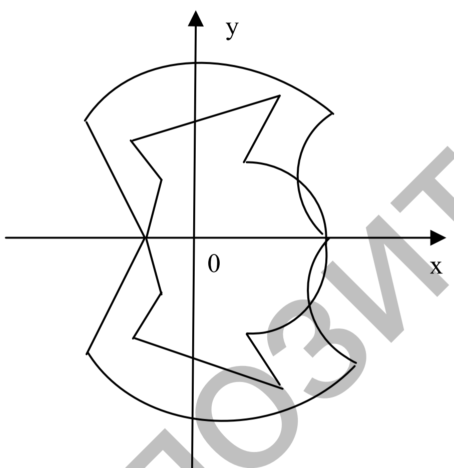

Рис. 14

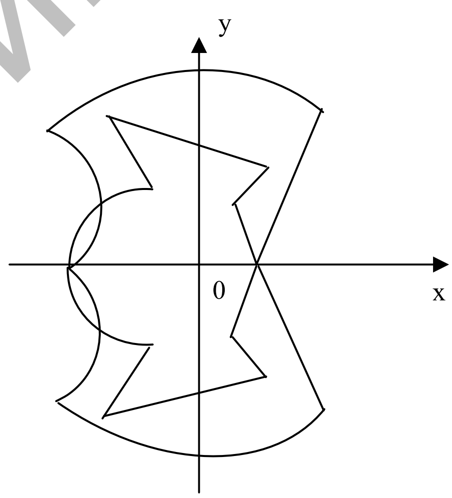

Рис. 15

18. График отношения $|y| = |f(-x)|$ получается из графика отношения $|y| = |f(x)|$ (рис. 14) симметричным отражением относительно оси *ОУ*. Либо можно использовать график отношения $y = |f(-x)|$ (рис. 8), а затем симметрично отразить последний относительно оси *OX* (рис. 15).

19. Построим график отношения $|y| = f(|x|)$. Здесь имеем двойную симметрию: как по оси *OX,* так по оси *OY*. Лист бумаги можно перегнуть по координатным осям, тогда все части графика совпадут (рис.16). График данного отношения можно также получить из графиков отношений, изображенных на рисунках 4 и 12. В первом случае сохраним верхнюю часть графика $y = f(|x|)$, лежащую выше оси *OX* и ее же отразим симметрично относительно оси *OX* . Во втором случае часть графика отношения $|y| = f(x)$, находящуюся в первой четверти, дважды симметрично отразим относительно осей координат (рис. 16).

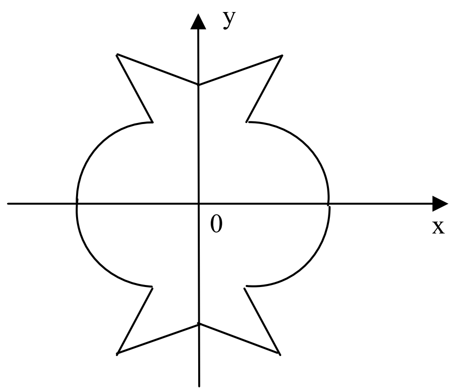

Рис. 16

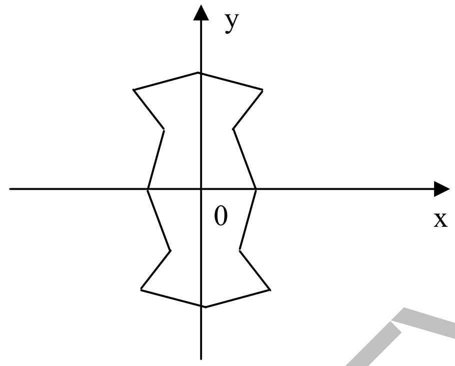

Рис. 17

20. Для построения графика отношения $|y| = f(-(|x|))$ можно использовать графики отношений: $y = f(-(|x|))$ на рисунке 5, в котором сохраним часть графика, находящуюся в первой четверти и выполним дважды симметрию относительно координатных осей; либо $|y| = f(-x)$ (рис. 13). Здесь, оставив без изменения часть этого графика при $x \geq 0$, ее же симметрично отразим относительно оси *OУ*. В обоих случаях получим график данного отношения, изображенного на рисунке 17.

В этом задании $|y| = |f(|x|)|$ имеем дело с тремя модулями и двойной симметрией: относительно обеих осей координат. Можно воспользоваться графиком отношения, изображенного на рисунке 10, отразив его симметрично относительно оси *OX* (рис. 18). Либо использовать график отношения $y = |f(x)|$ (рис. 7) при $x \geq 0$ и выполнить дважды симметрию относительно осей координат. Также можно воспользоваться графиком отношения $|y| = |f(x)|$ (рис. 14) при $x \geq 0$ и симметрично отразить его относительно оси *OУ*.

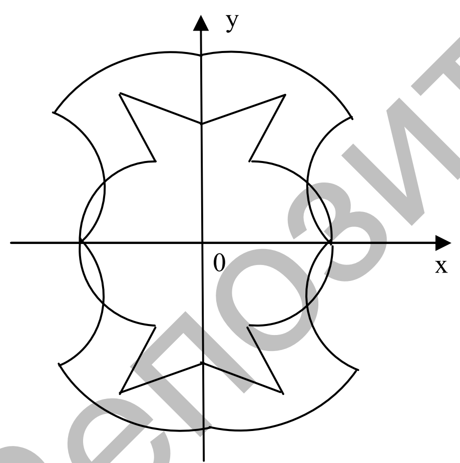

Рис. 18

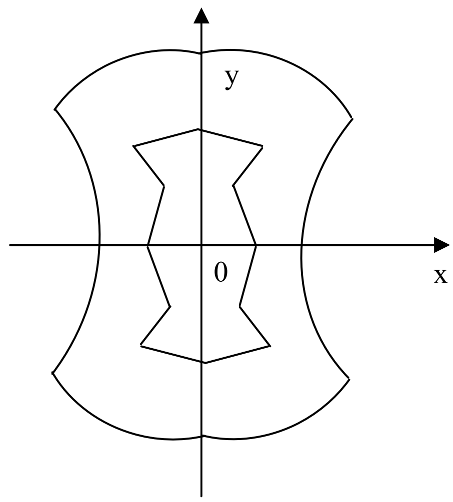

Рис. 19

23. Для построения графика отношения $|y| = |f(-(|x|))|$ воспользуемся графиком отношения $y = f(-(|x|))$ (рис. 5). Сначала нижнюю часть графика симметрично отразим относительно оси *OX,* сохранив часть графика, находящуюся в первой четверти, выполним два раза симметрию относительно осей координат (рис. 19). Либо данный график получим из графика отношения $y = |f(-(|x|))|$ (рис. 11) путем симметричного отражения его относительно оси *OX.*

Остальные номера (2, 8, 10, 12, 14, 16, 21) предлагаем выполнить самостоятельно.

Выполняя систему приведенных выше заданий, учащиеся учатся анализировать, абстрагировать конкретные объекты, ситуации. Конструируя различные образы, они развивают пространственное воображение, начинают познавать математические объекты в движении, а также связи между алгеброй и геометрией. Помимо этого, у учащихся формируются исследовательские навыки, так как такого рода задания не имеют определенного стереотипа решения.

Материалы статьи, системы разработанных заданий учителя могут использовать на дополнительных занятиях по математике, при планировании и выполнении научных проектов, а также на занятиях по элементарной математике для студентов.

Список литературы

1. Преподавание алгебры в 6–8 классах / Сост. Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк. — М.: Просвещение, 1980. — 270 с.
2. Современные основы школьного курса математики: Пособие для студентов педагогических институтов / Под ред. Н.Я.Виленкина, К.И.Дуничева и др. — М.: Просвещение, 1980. — 240 с.
3. Современные проблемы методики преподавания математики: Сб. ст. Учеб. пособие для студентов математических и физических специальностей педагогических институтов / Сост. Н.С.Антонов, В.А.Гусев. — М.: Просвещение, 1985. — 304 с.

УДК 338.242:[338.26.015:51:004]

М.В.Гимранова, Н.К.Сыздыкова, А.С.Шульгина-Таращук

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММЫ «SOLVER» ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Мақалада «Solver» редакторы көмегімен сызықтық программалау есептерін шешуде тиімді жоспар жасалған. Математикалық әдістер экономикалық ақпараттардың жүйесін реттейді. ЭЕМ-ді қолдану есептерді шығаруды жылдамдатады.

Mathematical methods allow to put in order the system of economic information. Application of Computer accelerates calculations. In the article there is an optimum plan at the decision of task of the linear programming by the program «Solver». The program of optimization rationalizes the solution of this economic task.

Использование современных информационных технологий при решении прикладных производственных задач является актуальнейшим требованием нашего времени. Темой одного из таких специальных курсов могло бы стать линейное программирование задач из различных отраслей экономики и управления при помощи электронных таблиц Microsoft Excel.

Линейное программирование — это раздел математики, занимающийся решением таких задач на отыскание наибольших и наименьших значений, для которых методы математического анализа оказываются непригодными. Другими словами, термин «линейное программирование» характеризует определение плана работы конкретного экономического объекта на основе выявления линейных связей между его элементами. Задачей линейного программирования является нахождение оптимального, т.е. наилучшего плана при заданной системе налагаемых на решение ограничений [1].

К классу задач линейного программирования относится большое количество разнообразных задач планирования и управления, как, например:

– нахождение оптимального плана выпуска продукции (оптимальное распределение ресурсов);
– оптимизация межотраслевых потоков (планирование производства различных видов продукции по отраслям);
– определение оптимального рациона (оптимизация состава химической смеси);
– транспортная задача (оптимальное распределение потоков товарных поставок по транспортной сети);