A.A.Vikentyev, E.S.Kabanova

The distance between the formulas of five digit Lukasiewicz logic and unreliable measure of expert's statements

In this work statements of experts are represented as formulas of the five-valued Lukasiewicz logic. Likewise the case of the classical logic, using model theory, distance between formulas and unreliability measure were defined. In this work properties of introduced notions are defined and proved. These properties take into account semantics of similarity and differences of information contained in statements. These notions can be applied for clustering of many-valued knowledge databases. The example of grouping a set of statements using the hierarchical clustering algorithm is considered. In this case the unreliability measure is a stopping criterion of clustering procedure.

УДК 517.947

С.Ж.Игисинов

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана
(E-mail: igisinovsabit@mail.ru)

О замыкаемости и об ограниченной обратимости дифференциального оператора смешанного типа в неограниченной области

В статье рассмотрен один класс сингулярного дифференциального оператора смешанного типа в неограниченной области. Первоначально доказана замыкаемость данного оператора, так как в данном случае не существует априорной оценки, как в случае с оператором, коэффициенты которого при слагаемых $u_x(x,y)$ и $u(x,y)$ зависят только от переменной y. Доказано существование резольвенты рассматриваемого оператора в неограниченной области. В работе использованы методы локализации и теории линейных операторов.

Ключевые слова: оператор смешанного типа, замыкание, резольвента, ограниченная обратимость, обратный оператор, неограниченная область, полоса, покрытие, ядро, сопряженный оператор, преобразование Фурье.

Часть 1. Введение. Формулировка основных результатов

Пусть $\Omega=\{(x,y):-\infty<x<\infty,-1<y<1\}$. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L_0u=k(y)u_{xx}-u_{yy}+a(x)u_x+c(x)u, \tag{0.1}$$

первоначально определенный на $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ — множестве, состоящем из бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию $u(x;-1)=u(x;1)=0$ и финитных по переменной x, где коэффициенты $a(x)$ и $c(x)$ — непрерывные функции в $R=(-\infty;\infty)$, а $k(y)$ — непрерывная и ограниченная функция, удовлетворяющая условию: $yk(y)>0$ при $y\neq 0$ и $k(0)=0$.

Здесь отметим, что коэффициенты оператора (0.1) $a(x)$ и $c(x)$ могут быть неограниченными функциями.

В случае $\kappa(y)=-1$ оператор (0.1) принадлежит эллиптическому типу. Как известно, вопрос о существовании резольвенты сингулярных эллиптических операторов, заданных в неограниченных областях, достаточно хорошо изучен, например, в работах [1, 2].

Дифференциальный оператор гиперболического типа во всем пространстве E^n (евклидово пространство размерности n) исследован в работе [3], где коэффициенты оператора — непрерывные и ограниченные функции в E^n.

Оператор смешанного типа в случае неограниченной области с растущими и колеблющимися коэффициентами рассмотрен в работах [4, 5]. В этих работах изучен оператор, первоначально определенный на множестве функций, сколь угодно дифференцируемых с периодическими по переменной x и финитными по y в полосе $\Omega=\{(x,y):-\pi<x<\pi,\ -\infty<y<\infty\}$, а в работе [6] — на всем R^2. В отличие от оператора (0.1), коэффициенты изученного в этих работах оператора при $u_x(x,y)$ и $u(x,y)$ зависят только от y.

Совершенно иная ситуация возникает при исследовании оператора (0.1). В частности, применить подход работ [4–6], базирующийся на разделение переменных, становится невозможным.

Обозначим через $K(\tau,b)$ класс коэффициентов, удовлетворяющих следующим условиям:

i) $|a(x)|\ge\delta_0>0,\ c(x)\ge\delta>0$ — непрерывные функции в R;

ii) $c_0c(x)\le a^2(x)\le c_1c(x)$, для любого $x\in R,\ c_0>0,\ c_1>0$ — постоянные числа;

iii) $|a(x)-a(t)|^2+|c(x)-c(t)|\le\tau c(t),$ для всех $x,t\in R$ таких, что $|x-t|\le bd(t),\ d(t)=\dfrac{1}{[c(t)]^{\frac{1}{2}}},\ b>0,$ $\tau>0.$

Теорема 1. Пусть $a(x),c(x)\in K(\tau,b).$ Тогда найдутся такие числа τ_0 и b_0, что при $\tau\in(0,\tau_0)$ и $b>b_0$ замыкание L оператора $L_0u=u_{xx}-u_{yy}+a(x)u_x+c(x)u,\ D(L_0)=C_0^\infty(\Omega),$ в $L_2(\Omega)$ существует.

Теорема 2. Пусть $a(x),c(x)\in K(\tau,b).$ Тогда найдутся такие числа τ_0 и b_0, что при $\tau\in(0,\tau_0)$ и $b>b_0$ оператор L имеет непрерывный обратный оператор в $L_2(\Omega)$.

Рассмотрим оператор

$$L_ju=k(y)u_{xx}-u_{yy}+a(x_j)u_x+(c(x_j))u \qquad (1)$$

на $C_0^\infty(\Omega),$ где $x_j\in R$ (их специальный выбор будет сделан позже), $j=1,2,\ldots$.

Нетрудно проверить, что оператор L_j допускает замыкание в $L_2(\Omega),$ и замыкание также обозначим через L_j.

Утверждение 1. Пусть выполнены условия *i)-ii)*. Тогда оператор L_j непрерывно обратим в $L_2(\Omega)$.

Утверждение 2. Пусть выполнены условия *i)-ii)*. Тогда справедливы оценки:

a) $$\|L_j^{-1}\|_{2\to2}\le\frac{c}{c(x_j)}; \qquad (2)$$

b) $$\|D_xL_j^{-1}\|_{2\to2}\le\frac{c_1}{|a(x_j)|}; \qquad (3)$$

c) $$\|D_yL_j^{-1}\|_{2\to2}\le\frac{c_2}{\sqrt{c(x_j)}}, \qquad (4)$$

где $c>0,\ c_1>0,\ c_2>0$ — постоянные числа; $\|\cdot\|_2$ — норма пространства $L_2(\Omega)$.

Для доказательства этих утверждений сперва докажем предварительно несколько лемм.

Рассмотрим оператор

$$l_{t,j}u=-u''+(-\mathrm{k}(\mathrm{y})t^2+it(a(x_j))+c(x_j))u\ \ (-\infty<t<\infty),$$

определенный в $L_2(-1,1)$, $u(-1)=u(1)=0.$

Лемма 1. Пусть выполнены условия *i)- ii)*, тогда:

a) $\|l_{t,j}u\|_2\ge|a(x_j)||t|\|u\|_2,\ \ u\in D(l_{t,j}),\ -\infty<t<\infty,\ t\ne0;$

b) $c\|l_{t,j}u\|_2\ge c(x_j)\|u\|_2,\ \ u\in D(l_{t,j}),\ -\infty<t<\infty,\ c>0$ — постоянное число;

c) $\dfrac{c}{\sqrt{c(x_j)}}\|l_{t,j}u\|_2\ge\|u'\|_2,\ \ u\in D(l_{t,j}),\ c>0$ — постоянное число.

Лемма 2. Пусть выполнены условия *i)-ii)*. Тогда оператор $l_{t,j}$ непрерывно обратим в $L_2(-1,1)$, причем

$$\left\| l_{t,\mathrm{j}}^{-1} \right\|_{2\to 2} \le \frac{c}{c(x_j)}, \tag{5}$$

$c > 0$ — постоянное число.

Доказательство. Леммы 1 и 2 доказываются точно так же, как леммы 2.2 и 2.3 работы [5].

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим задачу

$$L_j' u = k(y)u_{xx} - u_{yy} - a(x_j)u_x + c(x_j)u + u = f \in C_0^\infty\left(\bar{\Omega}\right);$$

$$u\left(x,-1\right) = u\left(x,1\right) = 0,$$

где оператор L_j' — формально сопряженный оператор к оператору L_j.

Применяя преобразование Фурье по x, получаем, что

$$l_{t,j}^{'}\tilde{u} = -\tilde{u}'' + (-k(y)t^2 - ita(x_j) + c(x_j))\tilde{u} = \tilde{f}(t,y);$$
$$\tilde{u}(-1) = \tilde{u}(1) = 0,$$

где $\tilde{u}$, $\tilde{f}$ — преобразования Фурье по переменной x.

Нетрудно показать, что существует обратный оператор $l_{t,j}'^{\,-1}$, определенный в $L_2\left(-1,1\right)$. Для этого повторяем выкладки и рассуждения, использованные при доказательстве леммы 2.1 работы [5]. Отсюда, а также используя свойства преобразования Фурье, имеем:

$$u\left(x,y\right) = L'^{\,-1}_{j} f = F_{t\to x}^{-1} l_{t,j}'^{-1} \tilde{f}. \tag{6}$$

Лемма 3. Пусть выполнены условия *i)–ii)*, тогда

$$D(L_j) \subseteq D(L_j'^{*}),$$

где $D(L_j)$ и $D(L_j'^{*})$ — области определения соответственно операторов L_j и $L_j'^{*}$.

Доказательство. Согласно определению сопряженного оператора справедливо равенство

$$\left\langle L_j' u, \upsilon \right\rangle = \left\langle u, L_j'^{*} \upsilon \right\rangle$$

для любого $u(x,y) \in D(L_j')$, $\upsilon(x,y) \in D(L_j'^{*})$.

Если мы докажем, что последнее равенство справедливо также для любого $\upsilon \in D(L_j)$, то утверждение леммы будет доказано.

Итак, пусть $u_n(x,y) \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ и $u_n \to u \in D(L_j')$, $\upsilon_n(x,y) \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ и $\upsilon_n \to \upsilon \in D(L_j)$. Тогда справедливо следующее равенство для любых $u_n, \upsilon_n \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$:

$$\left\langle L_j' u_n, \upsilon_n \right\rangle = \left\langle u_n, L_j \upsilon_n \right\rangle. \tag{7}$$

В справедливости последнего равенства можно убедиться, интегрируя по частям и учитывая граничные условия.

Теперь, переходя в равенстве (7) к пределу, имеем:

$$\left\langle L_j' u, \upsilon \right\rangle = \left\langle u, L_j \upsilon \right\rangle.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть выполнены условия *i)- ii)*. Тогда

$$Ker\left(L_j\right) = \left\{0\right\}.$$

Доказательство. Из равенства (6) следует, что множество значений оператора L_j' совпадает со всем $L_2(\Omega)$, т.е.

$$R\left(L_j'\right) = L_2(\Omega). \tag{8}$$

Из общей теории линейных операторов известно, что

$$L_2(\Omega) = R\left(L'_j\right) \perp KerL'^{*}_j.$$

Отсюда и из (8) находим, что $KerL'^{*}_j = \{0\}$.

Следовательно, пользуясь леммой 3, имеем, что $KerL_j = \{0\}$.

Лемма 4 доказана.

Теперь покажем существование обратного оператора L_j^{-1} — оператора L_j.

Для этого рассмотрим задачу

$$L_j u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a\left(x_j\right)u_x + c\left(x_j\right)u = f \in C_0^\infty(\Omega); \tag{9}$$

$$u(x,-1) = u(x,1) = 0.$$

Применяя преобразование Фурье по x, получаем, что

$$l_{t,j}\tilde{u} = -\tilde{u}'' + \left(-k(y)t^2 + ita\left(x_j\right) + c\left(x_j\right)\right)\tilde{u} = \tilde{f}(t,y);$$

$$\tilde{u}(-1) = \tilde{u}(1) = 0,$$

где

$$\tilde{u}(t,y) = \underset{x\to t}{F} u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R u(x,y)e^{-ixt}dx;$$

$$\tilde{f}(t,y) = \underset{x\to t}{F} f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R f(x,y)e^{-itx}dx.$$

Из леммы 2 следует, что

$$\tilde{u} = l_{\mathrm{t,j}}^{-1}\tilde{f}.$$

Далее, используя преобразование Фурье $\underset{t\to x}{F^{-1}}$, имеем:

$$u(x,y) = L_{\mathrm{j}}^{-1}f = \underset{t\to x}{F^{-1}} l_{\mathrm{t,j}}^{-1}\tilde{f}. \tag{10}$$

Последнее равенство, в силу непрерывности оператора $l_{\mathrm{t,j}}^{-1}$ и преобразования Фурье, справедливо для всех $f \in L_2$. Отсюда и согласно лемме 4 следует, что существует непрерывный оператор L_{j}^{-1}, определенный в $L_2(\Omega)$.

Доказательство утверждения 2. Из (10), пользуясь свойствами преобразования Фурье, получаем, что

$$\|u\|_2^2 = \left\|L_j^{-1}f\right\|_2^2 = \left\|\underset{t\to x}{F^{-1}} l_{\mathrm{t,j}}^{-1}\tilde{f}\right\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1}\left|l_{\mathrm{t,j}}^{-1}\tilde{f}(t,y)\right|^2 dy\right)dt \le$$

$$\le \sup_{t\in R}\left\|l_{\mathrm{t,j}}^{-1}\right\|_{2\to 2}^2 \cdot \|f\|_2^2.$$

Отсюда и из леммы 2 находим, что

$$\left\|L_j^{-1}\right\|_{2\to 2}^2 \le \frac{c}{c^2\left(x_j\right)}. \tag{11}$$

Пункт *a)* утверждения 2 доказан.

Далее имеем

$$D_x L_j^{-1} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\underset{t\to x}{F^{-1}} l_{\mathrm{t,j}}^{-1}\tilde{f}(t,y) = \underset{t\to x}{F^{-1}}(it) l_{\mathrm{t,j}}^{-1}\tilde{f}(t,y).$$

Отсюда

$$\left\|D_x L_j^{-1} f\right\|_2^2 \le \sup_{t\in R}\left\|it l_{\mathrm{t,j}}^{-1}\right\|_{2\to 2}^2 \cdot \left\|f(x,y)\right\|_2^2.$$

В силу пункта *a)* леммы 1 из последного неравенства получаем, что

$$\left\|D_x L_j^{-1} f(x,y)\right\|_2^2 \le \frac{1}{\left|a(x_j)\right|^2}\left\|f(x,y)\right\|_2^2. \tag{12}$$

Это неравенство доказывает пункт *b)* утверждения 2.

Непосредственно вычисляя и пользуясь пунктом c) леммы 1, находим, что

$$\left\| D_y L_j^{-1} f \right\|_2^2 \le \frac{c^2}{(c(x_j))} \left\| f \right\|_2^2 . \qquad (13)$$

Утверждение 2 доказано.

References

1 *Otelbaev M.* Coercive estimates and separability theorems for elliptic equations in R^n// Tr. Mat. Inst. named V.A.Steklova. — 1983. — № 61. — P. 195–217.

2 *Boimatov K.Kh.* Coercive estimates and separability for second-order elliptic differential operators // Dokl. AN USSR. — 1988. — 301. — P. 1033–1036.

3 *Nagumo M.* Lectures on Modern Theory of Partial Differential Equations. — Moscow: Mir, 1967.

4 *Muratbekov M.* Separability of an operator of mixed type and the completeness of its root vectors // Diff. Equations. — 1991. — 27. — P. 1517–1526.

5 *Muratbekov M.* Two-sides estimates of the distribution function of s-values of a class of mixed type differential operators // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2007. — 52. — P. 1121–1144.

6 *Muratbekov M., Ospanov K., Igisinov S.* Solvability of a class of mixed type second order equations and nonlocal estimates // Applied Mathematics Letters. — 2012. — 25. — P. 1661–1665.

С.Ж.Игісінов

Аралас типті дифференциалдық оператордың шенелмеген облыста тұйықталуы мен шенелген қайтарымдылығы туралы

Мақалада шенелмеген облыста аралас типті сингулярлы дифференциалдық оператордың бір класы қарастырылған. Алдымен берілген оператордың тұйықталуы көрсетілді. Себебі қарастырылып отырған оператор үшін $u_x(x,y)$ және $u(x,y)$ қосылғыштарының алдындағы коэффициенттер y айнымалысына тәуелді болған жағдайдағыдай априорлы баға орындалмайды. Берілген оператордың шенелмеген облыста резольвентасының бар болатындығы дәлелденген. Жұмыста локализациялау әдісі мен сызықты операторлар теориясының әдістері қолданылды.

S.Zh.Igisinov

On closability and bounded invertibility of mixed type differential operator in an unbounded domain

In this paper we consider a class of mixed type singular differential operator in an unbounded domain. Initially closability of the operator is proved. Because there is no a priori estimate, which exists in the case of an operator which coefficients depend on only on the variable y in front of terms $u_x(x,y)$ and $u(x,y)$. The existence of the resolvent of the operator in an unbounded domain is proved. The method of localization and methods of the theory of linear operators are used.