МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

Об одной лемме в теории уравнений Навье-Стокса

About lemm of theory of the Navier-Stokes equations

Акыш А.Ш.

Институт математики МОН РК, Алматы (E-mail: akysh41@gmail.com)

Мақалада Навье-Стокс теңдеулерінен (НСТ) кинетикалық энергияның тығыздығы үшін алынған бейсызықты параболалық теңдеу шешімінің экстремалдық қасиеттерін айқындайтын лемма дәлелденген. Бұл мақала — автордың бұрынғы жұмыстарын, яғни, НСТ теңдеулеріне максимум принципі мәселелерінің математикалық теориясын зерттеуді толықтыратын шағын қосымша.

In the work for the nonlinear equation of parabolic type for density of kinetic energy deduced from the Navier-Stokes Equations (NSE) one lemma is proved for revealing of extreme properties of the solution. The note is some addition of the previous works of the author on research of the mathematical theory in problems of a principle maximum for NSE.

Постановка задачи. Современное состояние математической теории уравнений Навье-Стокса содержится, например, в [1] и др.

В настоящей работе для нелинейного уравнения параболического типа для плотности кинетической энергии, выведенного из уравнений Навье-Стокса (УНС), доказана одна лемма, для выявления экстремальных свойств решений. Эта заметка является некоторым дополнением к предыдущим работам автора [2–4] и др. по исследованию математической теории в проблемах принципа максимума для УНС.

Рассмотрим начально-краевую задачу для УНС [1] относительно вектора скорости $U=(U_1,U_2,U_3)$ и давления P в области $Q=(0,T]\times\Omega$:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\mu\Delta U+(U,\nabla)U+\nabla P=f(t,x); \tag{1 a}$$

$$divU=0; \tag{1 b}$$

$$U(0,x)=\Phi(x); \tag{1 c}$$

$$U(t,x)\big|_{\partial\Omega}=0;\quad x\in\partial\Omega, \tag{1 d}$$

где $x\in\Omega\subset R_3$; Ω — выпуклая область, заполненная однородной жидкостью, а $\partial\Omega$ — граница области Ω; $t\in[0,T]$; $T<\infty$; $0<\mu$ — динамический коэффициент вязкости; Δ, ∇ — операторы Лапласа и Гамильтона соответственно. $\overset{0}{J}(\Omega)$ — пространство соленоидальных векторов; $W^1_{2,0}(\Omega)$ — соболевское пространство функций, равное нулю на $\partial\Omega$; f и Φ — векторы функций, соответственно внешних сил и начальных данных, удовлетворяющие следующим требованиям:

$$\textbf{i)}\ f(t,x)\in C(\bar{Q})\cap\overset{0}{J}(Q);\ \textbf{ii)}\ \Phi(x)\in C(\bar{\Omega})\cap W^1_{2,0}(\Omega)\cap\overset{0}{J}(\Omega). \tag{2}$$

О леммах для принципа максимума. Приведем необходимые сведения из работы [2]. В векторном уравнении (1а) положим $f=0$ и умножим на вектор скорости U, а затем, воспользовавшись формулой $\Delta E=\left(\Delta U,U\right)+\sum_{\alpha=1}^{3}|\nabla U_\alpha|^2$, получаем нелинейное уравнение параболического типа для плотности кинетической энергии (к.э.) $E=\frac{1}{2}(U_1^2+U_2^2+U_3^2)$:

$$NE \equiv \frac{\partial E}{\partial t} - \mu\Delta E + (\nabla E, U) + \mu\sum_{\alpha=1}^{3} |\nabla U_\alpha|^2 + (\nabla P, U) = 0, \qquad (3)$$

где $|U|$ есть модуль вектора скорости; $(\cdot\,,\cdot)$ — скалярное произведение векторов.

Теорема 1 [2]. Пусть $\bar{Q} = [0,T] \times \bar{\Omega}$ — цилиндрическая область с границей $[0,T] \times \partial\Omega$ в пространстве переменных t, x и функции $(U, E) \in C(\bar{Q}) \cap C^2(Q) \wedge P \in C^1(Q)$ удовлетворяют уравнениям (1 а), (3). Тогда функция $E(t,x)$ принимает свой максимум в цилиндре $\bar{Q}$ на нижнем основании $\{0\} \times \bar{\Omega}$ или на его боковой поверхности $[0,T] \times \partial\Omega$, т.е.

$$E(t,x) \le \max\{ \sup_{t=0 \wedge x \in \bar{\Omega}} E(t,x), \sup_{t \in [0,T] \wedge x \in \partial\Omega} E(t,x) \} = C - const. \qquad (4)$$

Определение 1. Будем говорить, что вектор скорости $U(t,x)$ имеет в точке $M_1(t,x)$ области Q экстремум, если каждая компонента вектора скорости $U_\alpha(t,x)$, $\alpha = 1,2,3,$ в этой же точке M_1 достигает локального экстремума (либо локального максимума, либо локального минимума).

Для доказательства теоремы 1 нам нужны некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Скалярное произведение вектора скорости U и его производной $\dfrac{\partial U}{\partial x_\beta}$, направленной по вектору U, порождает производную от плотности кинетической энергии, т.е.

$$\frac{\partial E}{\partial x_\beta} = \left(U, \frac{\partial U}{\partial x_\beta}\right); \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial x_\beta} = |U| \left|\frac{\partial U}{\partial x_\beta}\right| \cos\gamma, \text{ причем } \cos\gamma \ne 0, \ \forall x \in \Omega, \ \beta = \overline{1,3}. \qquad (5)$$

Доказательство. Вектор U, следуя [5], представим в виде $U = |U| e$, где $e(x)$ — единичный вектор. Отсюда, дифференцируя по x_β, найдем:

$$\frac{\partial U}{\partial x_\beta} = \frac{\partial |U|}{\partial x_\beta} e + |U| \frac{\partial e}{\partial x_\beta}. \qquad (6)$$

В результате получили разложение производной вектора U на две составляющие, из которых первая направлена по вектору U, а вторая — по перпендикуляру к U.

Разложение (6), умножив скалярно на U, запишем:

$$\left(U, \frac{\partial U}{\partial x_\beta}\right) = \left(|U| e, \frac{\partial |U|}{\partial x_\beta} e\right) + \left(|U| e, |U| \frac{\partial e}{\partial x_\beta}\right), \qquad \forall x \in \Omega,$$

или

$$\left(U, \frac{\partial U}{\partial x_\beta}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial |U|^2}{\partial x_\beta} (e, e) + |U|^2 \left(e, \frac{\partial e}{\partial x_\beta}\right), \qquad \forall x \in \Omega,$$

из которого выпадает перпендикулярная часть вектора $\dfrac{\partial U}{\partial x_\beta}$ к U (второе слагаемое в правой части), вследствие чего имеем цепочку равенств

$$\left(U, \frac{\partial U}{\partial x_\beta}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial |U|^2}{\partial x_\beta} = \frac{\partial E}{\partial x_\beta}, \qquad \beta = \overline{1,3}; \quad \forall x \in \Omega.$$

Приходим к выводу, что, когда вектор меняется как по длине, так и по направлению, из скалярного произведения выпадает перпендикулярное дополнение к производной $\dfrac{\partial U}{\partial x_\beta}$, тем самым $\cos\left(U, \dfrac{\partial U}{\partial x_\beta}\right) \ne 0$, $\forall x \in \Omega$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2 [2]. Пусть плотность к. э. $E(t,x)$ в некоторой точке $M_1(t,x)$ области $Q=[0,T]\times\overline{\Omega}$ достигает своего максимума, тогда точка M_1 является стационарной точкой вектора скорости U и функции давления P, т.е.

$$\nabla U_\alpha(M_1)=0,\quad \alpha=\overline{1,3};\quad \nabla P\left(M_1\right)=0, \tag{7}$$

и U в точке M_1 достигает локального экстремума. Причем, по крайней мере, в этой же точке M_1 одна из компонент вектора скорости U достигает либо положительного максимума, либо отрицательного минимума, а остальные — отрицательного максимума (положительного минимума).

Доказательство. Разложим сложную функцию $E(U_1,U_2,U_3)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{\alpha=1}^{3}U_\alpha^2(t,x)$ в окрестности точки $M_1(t,x)$ по формуле Тейлора и в записях временно опускаем t. Мы получим при этом, что

$$\Delta E\equiv E(t,x+dx)-E(M_1)=dE\Big|_{M_1}+\frac{1}{2!}d^2E\Big|_{M_1}+o(|dx|^2),$$

где символ $o(|dx|^2)$ означает бесконечно малую функцию более высокого порядка малости, чем $|dx|^2$. В предыдущую формулу подставим выражения $dE,\, d^2E$ вычисленных дифференциалов. Следуя [6] и отбрасывая малую величину, получаем:

$$\Delta E=\sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}dx_\beta\Bigg|_{M_1}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\left[\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3}\frac{\partial^2U_\alpha}{\partial x_\beta\partial x_\gamma}dx_\beta dx_\gamma+\left(\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}dx_\beta\right)^2\right]\Bigg|_{M_1}. \tag{8}$$

По условию леммы в точке M_1 функция E имеет локальный максимум. Тогда выполняются необходимое и достаточное условия локального экстремума $dE\big|_{M_1}=0$ и $d^2E\big|_{M_1}<0$, т.е. в точке M_1 первый дифференциал функции E равен нулю, а второй является отрицательным.

Рассмотрим слагаемые из (8):

$$dE=\sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}dx_\beta\Bigg|_{M_1}=0,\quad S=\left(\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}dx_\beta\right)^2. \tag{9}$$

Меняя местами суммы в первом дифференциале из (9), перепишем:

$$\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}dx_\beta\Bigg|_{M_1}=0.$$

Откуда, в силу произвольности дифференциалов независимых переменных dx_β, получим

$$\sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}\Bigg|_{M_1}=0,\quad \beta=\overline{1,3}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial E}{\partial x_\beta}\Bigg|_{M_1}=\left(U,\frac{\partial U}{\partial x_\beta}\right)\Bigg|_{M_1}=0,\ \ \beta=\overline{1,3}. \tag{10}$$

Далее, замечая, что соотношение (5) в точке M_1 совпадает с условиями (10), запишем:

$$\frac{\partial E}{\partial x_\beta}\left(M_1\right)=\left|U\left(M_1\right)\right|\left|\frac{\partial U}{\partial x_\beta}\left(M_1\right)\right|\cos\gamma=0,\ \beta=\overline{1,3}, \tag{11}$$

где γ — угол между векторами $U\left(M_1\right)$ и $\dfrac{\partial U}{\partial x_\beta}\left(M_1\right)$. Из (11) заключаем, что $\left|U\left(M_1\right)\right|\neq 0$, так как E имеет в точке M_1 локальный максимум, и $\cos\gamma\neq 0$ на основании леммы 1.

Отсюда следует, что $\frac{\partial E}{\partial x_\beta}(M_1)=0$ тогда и только тогда, когда $\left|\frac{\partial U}{\partial x_\beta}(M_1)\right|=0.$ В результате из (11) получим цепочку

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}(M_1)\right)^2=0;\ \ \beta=\overline{1,3};\qquad \Rightarrow\ \nabla U_\alpha(M_1)=0,\ \alpha=\overline{1,3}. \tag{12}$$

Первая часть леммы доказана. Тем самым показали, что стационарные точки функции $E(U)$ совпадают со стационарными точками компонентов скорости U. Однако этого результата недостаточно для утверждения того, что, по крайней мере, одна компонента скорости в этой точке должна достигать локального экстремума. В связи с этим ранее в работе [2] доказана вторая часть леммы.

Замечание 1. Нетрудно заметить, что из (12) следует $S\big|_{M_1}=0$ (9). И справедливо обратное утверждение, что из $S(M_1)=0\ \Rightarrow dE\big|_{M_1}=0.$ Откуда вытекает их эквивалентность.

В самом деле, для выполнения достаточного условия локального экстремума $d^2E(M_1)<0$ необходимым является

$$S=\left.\left(\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}dx_\beta\right)^2\right|_{M_1}=0,\quad \alpha=\overline{1,3}. \tag{13}$$

Отсюда следует:

$$\left.\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_3}dx_3\right|_{M_1}=0.$$

Из него, в силу произвольности дифференциалов независимых переменных dx_β, получаем $\nabla U_\alpha(M_1)=0,\ \ \alpha=\overline{1,3},$ что подтверждает правильность доказательства леммы, приведенной в [4].

Доказательство теоремы 1. Для этого воспользуемся известным приемом [7; 511]. Будем исходить от противного, т.е. функция $E(t,x)$ достигает своего максимального значения в некоторой точке $M_0(t^0,x^0)$ внутри области $\overline{Q}=[0,T]\times\overline{\Omega}$

$$E(M_0)>\max\{\sup_{t=0\wedge x\in\overline{\Omega}}E(t,x);\ \sup_{t\in[0,T]\wedge x\in\partial\Omega}E(t,x)\}=C\geq 0. \tag{14}$$

Обозначим $m=E(t^0,x^0)-C>0$ и введем функцию $H(t,x)=E(t,x)+\frac{m}{2}\left(1-\frac{t}{T}\right)$. Функция $H(t,x)$ также принимает свое максимальное значение в некоторой точке $M_1\in Q,$ причем

$$H(M_1)\geq H(M_0)\geq m.$$

Теперь, используя результаты леммы 1 и леммы 2 [2], выпишем все необходимые условия максимума функции H в точке M_1:

$$\frac{\partial H}{\partial t}\geq 0;\ \ \Delta H\leq 0:\ \Rightarrow\left\{\nabla H=0;\ \ \nabla U_\alpha=0,\ \alpha=\overline{1,3};\ \nabla P=0\right\}. \tag{15}$$

Из уравнения (3), с учетом условий (15), найдем для точки M_1 цепь неравенств

$$NH\equiv\frac{\partial H}{\partial t}-\mu\Delta H+(\nabla H,U)+\mu\sum_{\alpha=1}^{3}|\nabla U_\alpha|^2+(\nabla P,U)+\frac{m}{2T}\geq\frac{m}{2T}>0.$$

Это означает, что неравенство (14) неверно. Следовательно, справедливо (4). Теорема 1 доказана.

Теорема 1 и лемма 2 из [2] позволяют сформулировать следующий принцип максимума для уравнений (1а):

Следствие 1. Пусть $\overline{Q}=[0,T]\times\overline{\Omega}$ — цилиндрическая область в пространстве переменных t, x с границей $[0,T]\times\partial\Omega$ и функции $U\in C(\overline{Q})\cap C^2(Q)\wedge P\in C^1(Q)$ удовлетворяют уравнениям (1а). Тогда вектор-функция U достигает локального экстремума в цилиндре $\overline{Q}$ на нижнем основании

$\{0\}\times\bar{Q}$ или на его боковой поверхности $[0,T]\times\partial\Omega$ и, по крайней мере, одна из функций U_α достигает либо положительного максимума, либо отрицательного минимума, т.е.

$$U_\alpha(t,x)\le\max\{\sup_{t=0\wedge x\in\bar{\Omega}}U_\alpha(t,x);\ \sup_{t\in[0,T]\wedge x\in\partial\Omega}U_\alpha(t,x)\};\quad (t,x)\in\bar{Q}; \tag{16 a}$$

$$\Big(U_\alpha(t,x)\ge\min\{\inf_{t=0\wedge x\in\bar{\Omega}}U_\alpha(t,x);\ \inf_{t\in[0,T]\wedge x\in\partial\Omega}U_\alpha(t,x)\};\quad (t,x)\in\bar{Q}\Big);\quad \alpha=\overline{1,3}. \tag{16 b}$$

Доказательство следует из теоремы 1 и леммы 2, так как лемму 2 доказали, исходя из выполнения необходимого и достаточного условий локального максимума функции E, а потому верно и обратное. Откуда имеем (16а, в). Отсюда, следуя [7; 513], нетрудно получить доказательство следующего утверждения:

Следствие 2. Если векторы функций f,Φ удовлетворяют условиям **i**) и **ii**), то для решений $U(t,x)$ задачи (1) справедлива оценка

$$\|U\|_{C(\bar{Q})}\le\|\Phi\|_{C(\bar{\Omega})}+T\|f\|_{C(\bar{Q})}\equiv A_1,\forall T<\infty,\ \text{где}\ \|U\|_{C(\bar{Q})}=\max_{1\le\alpha\le3}\sup_{\bar{Q}}|U_\alpha(t,x)|.$$

References

1. *Ladyzenskaja O.A.* Mathematical problems of dynamics viscous incompressible fluids. — M.: Science, 1970. — 288 p.
2. *Akysh A.Sh.* New the properties of Navier-Stokes equations // Vestnik of KarSU. — 2010. — № 4 (60). — P. 16–24.
3. *Akysh A.Sh.* About problem of theory of Navier-Stokes equations // Works of 6th conference of Russian-Kazakh working group of computing and informational technologies (16–18 Marth 2009). — Almaty: Kasakh University, 2009. — P. 54–61.
4. *Akysh A.Sh.* About lemm of mathematical theory of the Navier-Stokes equations // Materials III of International scientific conference «Actual problems of mechanics and buildingmashine». — Vol. 3. — Almaty, 2009. — P. 209–213.
5. *Kochin N.E.* Vector Calculus and the beginning of the tensor calculus. — M.: Science, 1965. — 426 p.
6. *Ilyin V.A., Sadovnichii V.A., Sendov Bl.H.* Mathematical analysis. — M.: Science, 1979. — 719 p.
7. *Vladimirov V.S.* The equations of mathematical physics. — M.: Science, 1981. — 612 p.

УДК 517.9

Критерии абсолютной неосцилляторности полулинейного разностного уравнения второго порядка

Absolute nonoscillation criterion of half-linear second order difference equation

Алимагамбетова А.З.

Казахский университет экономики, финансов и международной торговли, Астана (E-mail: ainash_777@mail.ru)

Кейбір шарттарды қанағаттандыратын оң коэффициенттері бар жартылай сызықты екінші ретті айырымдық теңдеу үшін тербелімсіздік шарт негізінде теңдеудің абсолютті тербелімсіздік критерийі орнатылды. Ол нэтижелер екінші ретті сызықты айырымдық теңдеулер үшін де жаңа болып табылады.

Criterions of absolute nonoscillation based on the conditions of Nonoscillation are established for a semilinear difference equation of second order with positive coefficients, which satisfy certain conditions. The results of the theorem about the absolute nonoscillation are new results for linear difference equation of the second order.

Рассмотрим полулинейное разностное уравнение второго порядка

$$\Delta(a_k|\Delta x_k|^{p-2}\Delta x_k)+\lambda b_{k+1}|x_{k+1}|^{p-2}x_{k+1}=0,\qquad k=0,1,..., \tag{1}$$

где $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k, 1<p<\infty$. Относительно коэффициентов уравнения (1) предполагаем, что $a=\{a_k\}_{k=0}^\infty$ и $b=\{b_k\}_{k=0}^\infty$ — последовательности действительных чисел.