

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОГО РАСПЛАВА

Кажикенова С.Ш.

Карагандинский государственный университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

E-mail: sauleshka555@mail.ru

В ограниченной области $\Omega \subset R^3$ с гладкой границей S рассмотрим следующую систему нелинейных стационарных уравнений, представляющих математическую модель движения несжимаемого металлического расплава:

$$(\rho v \cdot \nabla)v = \mu \Delta v - \nabla p + \lambda(\nabla \rho \cdot \nabla)v + \lambda(v \cdot \nabla)\nabla \rho - \lambda^2 \operatorname{div} \left(\left(\frac{1}{\rho} \cdot \nabla \rho \cdot \nabla \right) \rho \right) + \rho f, \quad (1)$$

$$(v \cdot \nabla)\rho = \lambda \Delta \rho, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (3)$$

с граничными условиями:

$$v|_S = 0, \rho|_S = \rho_S(x), \quad (4)$$

где $v(x) = v(x_1, x_2, x_3)$ – вектор-функция скоростей, $\rho(x) = \rho(x_1, x_2, x_3)$ – поле плотностей, $p(x) = p(x_1, x_2, x_3)$ – поле давления расплава, $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$ – вектор массовых сил, λ, μ – коэффициенты диффузии и вязкости, $\lambda > 0, \mu > 0, S = \partial\Omega$ – достаточно гладкая граница области Ω .

Известно, что система уравнений (1) – (3) неэволюционная и поэтому прямое применение численных методов затруднительно. Для разрешения этой трудности мы будем рассматривать другую модель неоднородного расплава, являющуюся аппроксимацией исходной модели (1) – (3) с малым параметром ε ($\varepsilon > 0$). Итак, рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} (\rho^\varepsilon v^\varepsilon \cdot \nabla)v^\varepsilon &= \mu \Delta v^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon + \lambda(\nabla \rho^\varepsilon \cdot \nabla)v^\varepsilon + \lambda(v^\varepsilon \cdot \nabla)\nabla \rho^\varepsilon - \\ &- \lambda^2 \operatorname{div} \left(\left(\frac{1}{\rho^\varepsilon} \cdot \nabla \rho^\varepsilon \cdot \nabla \right) \rho^\varepsilon \right) + \rho^\varepsilon f - \frac{1}{2} \rho^\varepsilon v^\varepsilon \operatorname{div} v^\varepsilon, \end{aligned} \quad (5)$$

$$(v^\varepsilon \cdot \nabla)\rho^\varepsilon = \lambda \Delta \rho^\varepsilon, \quad (6)$$

$$\varepsilon p^\varepsilon + \operatorname{div} v^\varepsilon = 0, \quad (7)$$

с граничными условиями:

$$v^\varepsilon|_S = 0, \rho^\varepsilon|_S = \rho_S(x), \quad (8)$$

Теорема 1. Если $f \in L_{\frac{6}{5}}(\Omega), \rho_S \in W_2^{\frac{3}{2}}(S)$, то при $\lambda \leq \alpha = \min \left\{ \frac{M}{16 C_1 m^2 + C_2 M^2}, \frac{\mu}{M - m} \right\}$,

достаточно малом λ , существует хотя бы одно сильно-обобщенное решение задачи (5) – (7), где C_1, C_2 – константы, зависящие только от данных задачи и не зависящие от функций $v^\varepsilon, \rho^\varepsilon, p^\varepsilon$.

Доказательство теоремы строится из трех этапов: получение априорных оценок, использование метода Галеркина и предельный переход.

Сформулируем основной результат.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1, тогда сильно-обобщенное решение задачи (1) – (4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к сильно-обобщенному решению задачи (5) – (8).

Список использованных источников

1. Смагулов Ш.С., Байтуленов Ж.Б. Корректность одной диффузионной стационарной модели неоднородной несжимаемой жидкости // Труды международной конференции «Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы: Казахстан в третьем тысячелетии». – Алматы, 2000. – С. 185-189.

2. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 318 с.

3. Кажикенова С.Ш. Аппроксимация стационарной модели неоднородной несжимаемой жидкости // Вестник Кузбасского государственного технического университета. – Кемерово, 2010. -№ 6. – С.113-116.