УДК 519.683.85

М.М.Букенов, А.Н.Москаленко

*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: crasy_bee89@mail.ru)*

# Задача «в скоростях-напряжениях»

В статье рассмотрена постановка трёхмерной динамической задачи теории упругости «в скоростях-напряжениях». Даны основные соотношения динамической задачи теории упругости, рассмотрены теоремы о тензоре несовместности и решении задачи теории упругости «в напряжениях». Исходя из теорем, авторами выведено следствие об эквивалентности задач «в перемещениях», «в напряжениях» и «в скоростях-напряжениях». Цель авторов статьи — описать постановку трёхмерной динамической задачи теории упругости «в скоростях-напряжениях» и доказать её эквивалентность задачам «в перемещениях» и «в напряжениях». Цель была полностью достигнута.

*Ключевые слова:* трёхмерная динамическая задача, задача теории упругости, постановка трёхмерной динамической задачи, задача «в скоростях-напряжениях», задача «в перемещениях», задача «в напряжениях», тензор несовместности, задача теории упругости, упругая среда, константы Ламе.

## *1 Основные соотношения динамической задачи*

Пусть $y_1$, $y_2$, $y_3$ — криволинейная система координат с локальным естественным базисом $e_i$ (кобазисом $e^i$) и фундаментальным тензором $G$, компоненты которого $g^{im}$ (или $g_{im}$) определяют евклидову метрику. Пусть $D(y_1, y_2, y_3) = D(M)$ — ограниченная односвязная область с достаточно гладкой границей $y$, а $n = (n_1, n_2, n_3)^T$ — вектор нормали к $y$. Символ «$T$» означает транспонирование, так что $n$ — вектор-столбец, заданный ковариантными компонентами $n_i$. Изучаемая упругая деформируемая сплошная среда связана с $D$, а нестационарный процесс упругого деформирования — с цилиндром $Q = \{D \times [0 \le t \le t_1]\}$.

Вектор-столбец упругих перемещений $u = (u_1, u_2, u_3)^T,\ u_i = u_i(y_1, y_2, y_3; t) = u_i(M, t),\ M \in D,$ будем задавать ковариантными компонентами. Для тензора упругих деформаций будем также использовать ковариантные компоненты $\varepsilon_{ik}(M, t)$. Для геометрически линейной упругой среды определяющее соотношение «перемещение-деформация» имеет вид

$$2\varepsilon_{im} = 2\varepsilon_{mi} = \nabla_m u_i + \nabla_i u_m, i, m = 1,2,3. \tag{1.1}$$

Здесь и далее через $\nabla_\alpha$ обозначена ковариантная производная по $y_\alpha$.

Тензор упругих напряжений будем задавать контравариантными компонентами $\sigma^{im}(M, t)$. Для физически линейной упругой среды уравнение состояния «напряжение-деформация» определяет закон Гука

$$\sigma^{im} = \lambda(\varepsilon_{\alpha\beta} g^{\beta\alpha}) g^{im} + 2\mu g^{gi} g^{im} \varepsilon_{gj}, \tag{1.2}$$

здесь $\lambda > 0, \mu > 0$ — константы Ламе, характеризующие свойства упругой среды; $g^{\alpha\beta}$ — контравариантные компоненты метрического тензора $G$.

Введём в рассмотрение векторы-столбцы $\xi = (\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}, 2\xi_{12}, 2\xi_{13}, 2\xi_{23})^T$ и $\eta = (\eta^{11}, \eta^{22}, \eta^{33}, \eta^{12}, \eta^{13}, \eta^{23})^T$. Связь между $\xi$ и $\eta$ определим с помощью закона Гука (1.2), который перепишем так: $\eta = K\xi, \xi = K^{-1}\eta.$ Здесь и далее $K = K(\lambda, \mu, g^{\alpha\beta}) = K(y_1, y_2, y_3) = K(M)$ — симметричная $K = K^T$, положительно определённая $K > 0$ матрица размера $6 \times 6$.

Для $t \in [0, t_1]$ определим $H(\eta)$ как линейное гильбертово пространство векторов $\eta$ с достаточно гладкими компонентами $\eta^{im} (m \ge i;\ i, m = 1,2,3)$ и скалярным произведением

$$[\eta^{(1)}, \eta^{(2)}]_H \equiv (\eta^{(1)}, K^{-1}\eta^{(2)})_D = (\eta^{(1)}, \xi^{(2)})_D = \sum_{i,m=1}^{3} \left( (\eta^{(1)})^{im}, (\xi^{(2)})_{im} \right)_D =$$

$$= \int_D \sum_{i,m=1}^{3} (\eta^{(1)})^{im} (\xi^{(2)})_{im} \, dM.$$

Если $w = w(M,t) = (w_1, w_2, w_3)^T$, то для $t \in [0, t_1]$ определим $H^*(w)$ как линейное гильбертово пространство векторов $w$ с достаточно гладкими компонентами $w_i$ и скалярным произведением

$$[w^{(1)}, w^{(2)}]_{H^*} = \left(w^{(1)}, w^{(2)}\right)_D = \int_D \sum_{i,m=1}^{3} \left(w^{(1)}\right)^i \left(w^{(2)}\right)_i dM. \tag{1.3}$$

Опорный оператор $R: H^*(w) \to H(\xi) = H(K^{-1}\eta)$ определим как линейный матрично-дифференциальный оператор:

$$R = \begin{pmatrix} \nabla_1 & 0 & 0 & \nabla_2 & \nabla_3 & 0 \\ 0 & \nabla_2 & 0 & \nabla_1 & 0 & \nabla_3 \\ 0 & 0 & \nabla_3 & 0 & \nabla_1 & \nabla_2 \end{pmatrix}^T. \tag{1.4}$$

Пространство $H(\xi)$ является образом $H(\eta)$ при отображении $K^{-1}$. И, наконец, определим оператор $L: H(\eta) \to H^*(w)$ как линейный матрично-дифференциальный оператор

$$L = R^t. \tag{1.5}$$

Если теперь учесть (1.5), то закон сохранения импульса для упругого деформируемого тела с объёмной плотностью $\rho > 0$ в поле массовых сил $f$ запишется следующим образом:

$$\rho \partial \upsilon / \partial t = L\sigma + \rho f, \upsilon = \partial u / \partial t. \tag{1.6}$$

К (1.6) следует добавить определяющее соотношение «перемещение-деформация» (1.1):

$$\varepsilon = Ru,\ u \in H^*(w), \varepsilon \in H(\xi) \tag{1.7}$$

и уравнение состояния (закон Гука) (1.2)

$$\sigma = K\varepsilon, K = K^T > 0. \tag{1.8}$$

Соотношения (1.6)–(1.8) определяют замкнутую линейную математическую модель динамики упругого тела. Говоря о замкнутой математической модели, имеем в виду совпадение числа определяемых параметров модели (компоненты векторов $u, \varepsilon, \sigma$) с числом независимых соотношений (1.6) – (1.8).

Решение системы (1.6) – (1.8) будем искать в цилиндре $Q$. При этом

$$u(M,0) = \varphi(M), \partial u(M,0)/\partial t = \upsilon(M,0) = \psi(M),\ M \in D, \tag{1.9}$$

и соответственно

$$\varepsilon(M,0) = R\varphi(M), \partial\varepsilon(M,0)/\partial t = R\psi(M,0),\ M \in D. \tag{1.10}$$

Предположим, что на боковой поверхности цилиндра $Q$ искомое решение удовлетворяет одному из приведённых ниже однородных краевых условий:

$$\begin{gathered} u(N,t) = 0, N \in \gamma, \sigma^{im} n_m(N,t) = 0, N \in \gamma; \\ \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2, u(N,t) = 0, N \in \gamma_1, \sigma^{im} n_m(N,t) = 0, N \in \gamma_2. \end{gathered} \tag{1.11}$$

Начальные данные (1.9), (1.10) и краевые условия (1.11) будем считать согласованными. Тем самым для системы (1.6)–(1.8) определена смешанная задача Коши (начально-краевая задача).

Будем считать, что смешанная задача Коши (1.6)–(1.11) поставлена корректно: решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных. Строгие формулировки связаны с определением решения: классическое, обобщённое и т.д. В каждом таком конкретном случае требования к входным данным могут сильно различаться. Для определённости можно считать, что входные данные рассматриваемой динамической задачи обеспечивают справедливость результатов «$C^\infty$ -теории».

Краевые условия (1.11) динамической задачи учитываются при описании областей определения $U(R), U(L)$ операторов $R$ и $L$. В случае первого краевого условия (1.11) в качестве области определения $U(R)$ опорного оператора $R$ следует принять множество векторов $w \in H^*(w)$, удовлетворяющих этому краевому условию. При этом никакие дополнительные краевые условия на $\eta \in U(L)$ не накладываются. В случае второго краевого условия (1.11) в качестве области определения $U(L)$ оператора $L$ следует взять множество векторов $\eta \in H(\eta)$, компоненты которых удовлетворяют этому краевому условию. Дополнительные условия на $w \in U(R)$ не накладываются. В случае третьего краевого условия (1.11) векторы $w \in U(R)$ удовлетворяют первому краевому условию из (1.11), компоненты векторов $\eta \in U(L)$ — второму.

*2 Динамическая задача «в скоростях-напряжениях».*

В дальнейшем весьма существенно, что в случае краевых условий (1.11) оператор $-L$ из (1.5) сопряжён, по Лагранжу, к оператору $R$ из (1.4): $-L = R^*$, т.е.

$$-[L\eta^{(1)}, w^{(2)}]_{H^*} = [\eta^{(1)}, Rw^{(2)}]_{H^*}. \tag{2.1}$$

Дадим и некоторые комментарии к (2.1). На самом деле закон сохранения импульса (1.6) обычно постулируется в виде:

$$\frac{\rho\partial\nu}{\partial t} + div\sum = \rho f,\ \nu = \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{2.2}$$

где $\Sigma$ — тензор истинных напряжений Коши ранга два. Симметричность этого тензора $\Sigma = \Sigma^*$ следует из закона сохранения момента импульса. Пусть $u \in H^*(w)$. Тогда, как известно,

$$div\left(\sum u\right) = \left(div\sum\right)u + \sum E, \tag{2.3}$$

где $E = E^*$ — симметричная часть тензора $\nabla u$, а $\nabla \equiv grad$ — оператор Гамильтона. По теореме Гаусса-Остроградского

$$\int_D div\left(\sum u\right)dM = \oint_\gamma n\sum u d\gamma = \oint_\gamma \sum nu d\gamma. \tag{2.4}$$

Если изучаемые тензорные $\sum(M,\ t)$ и векторные $u\ (M,\ t)$ поля таковы, что поверхностные интегралы в (2.4) обращаются в нуль, то из (2.2), (2.4) имеем

$$-\int_D \left(div\sum\right)udM = \int_D \sum EdM. \tag{2.5}$$

По определению $div \sum$ — вектор, $q = \text{div} \sum$, $q = (q_1, q_2, q_3)^T = (q^1, q^2, q^3)^T$, а если тензор $\sum$ задать контравариантными компонентами $\sigma^{im}$, то

$$q^i = \nabla_m \sigma^{im}, q^k = g^{kl} q_l, q_i = g_{kl} q^k. \tag{2.6}$$

Поэтому левая часть в (2.5) с точностью до знака определяет обычное скалярное произведение (1.3) векторов $u, q \in H^*(w)$:

$$-\int_D \left(div\sum\right)udM = \sum_{i=1}^{3}\int_D q_i u^i dM = [q,u]_{H^*} = (q,u)_D. \tag{2.7}$$

С другой стороны, если формально ввести вектор

$$\begin{gathered}\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^T = (\sigma^{11}, \sigma^{22}, \sigma^{33}, \sigma^{12}, \sigma^{13}, \sigma^{23})^T; \\ \sigma^{kl} = g^{k\alpha} g^{l\beta} \sigma_{\alpha\beta}, \sigma \in H,\end{gathered} \tag{2.8}$$

то (2.6), (2.8) определяют некоторый оператор $L\colon\ H \to H^*$, такой что $q = -L\sigma$. Тогда

$$-\int_D \left(div\sum\right)udM = (L\sigma, u)_D. \tag{2.9}$$

Обратимся теперь к правой части в (2.5). По определению $E = E^* = 0,5[(\nabla u) + (\nabla u)^*], \varepsilon_{ij} = $ $= (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$, поэтому формально определены вектор $\varepsilon \in H : \varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23})^T$ и оператор $R : H^* \to H$, такие что $\varepsilon = Ru$. С другой стороны, $\int_D \sum dM = \sum_{\substack{i,j \\ j>i}} \int_D \sigma^{ij}\varepsilon_{ij} dM = (\sigma, \varepsilon)_D = (\sigma, Ru)_D$. Вместе с (2.5), (2.9) это и приводит к (2.1).

С помощью (2.1) основные соотношения смешанной задачи Коши (1.6) – (1.11) динамики деформируемого упругого тела могут быть записаны только в терминах операторов $R$, $R^*$ и матрицы $K = K^T > 0$. Тем самым определяется и структура уравнений динамической задачи. Итак,

$$\frac{\rho\partial\nu}{\partial t} + R^*\sigma = \rho f, \nu = \frac{\partial u}{\partial t}; \tag{2.10}$$

$$\sigma = K\varepsilon, \sigma \in U(R^*) \subset H, \varepsilon = Ru, u \in U(R) \in H^*; \tag{2.11}$$

$$u(M,0) = \varphi(M), \nu(M,0) = \psi(M), M \in D; \tag{2.12}$$

$$\varepsilon(M,0) = R\varphi(M), \frac{\partial\varepsilon(M,0)}{\partial t} = R\psi(M), M \in D. \tag{2.13}$$

В (2.10) – (2.13) определению подлежат 18 неизвестных скалярных функций: $u_i(M,t), \nu_i(M,t), \varepsilon_{im}(M,t), \sigma^{im}(M,t)$. Различные постановки динамической задачи: «в перемещениях», «в напряжениях», «в скоростях-напряжениях» связаны только с порядком определения неизвестных. Так, для постановки «в перемещениях»: $\nu \leftarrow u \rightarrow \varepsilon \rightarrow \sigma$ из (2.10) – (2.13) имеем

$$\frac{\partial^z u}{\partial t^z} + Au = f, u(M,0) = \varphi(M), \frac{\partial u(M,0)}{\partial t} = \psi(M). \tag{2.14}$$

Здесь и далее ради некоторых упрощений в записи полагаем $\rho = 1$. Кроме того, $A = R^* KR$ и для любого $t \in [0, t_1][w, Aw]_{H^*} = [Rw, KRw]_H \geq 0$. В теории упругости $A$ носит название оператора Ламе. Сопряжённо-факторизованная структура этого оператора (энергетическое расширение оператора [1]) вытекает из (2.1) и при этом $A = A^* \geq 0$.

Для постановки «в напряжениях»: $\sigma \leftrightarrow \varepsilon \rightarrow u \rightarrow \nu$ получим

$$\frac{\partial^z \varepsilon}{\partial t^z} + P\sigma = Rf, \varepsilon(M,0) = R_\varphi(M), \frac{\partial \varepsilon(M,0)}{\partial t} = R\psi(M). \tag{2.15}$$

Здесь $P = RR^*$ и для любого $t \in [0, t_1]$

$$[\eta, P\eta]_H = [R^*\eta, R^*\eta]_{H^*} \geq 0.$$

Оператор напряжений $P$ из (2.15) также имеет сопряженно-факторизованную структуру и $P = P^* \geq 0$.

Запись векторных уравнений в форме (2.14), (2.15) требует некоторых разъяснений. Математические модели механики сплошной среды используют тензоры различного ранга без явного указания на то, компонентами какого типа (ковариантными, контравариантными, смешанными) задаются эти тензоры. Здесь нами в качестве канонических параметров выбраны $u_i(M,t), \varepsilon_{im}(M,t), \sigma^{im}(M,t)$ и в законе сохранения импульса (2.2) сделан формальный переход от векторно-тензорной формы к операторно-векторной форме. Выбор $\sigma^{im}, \varepsilon_{im}$ приводит к векторам $\sigma, \varepsilon$ размерности 6, где под размерностью понимается число компонент. Если же в качестве канонических параметров выбрать $\sigma^i_m, \varepsilon_{im}$, то приходим к вектору $\sigma$ размерности 9. Соответственно этому в законе Гука $\sigma^i_m = \lambda(g^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta})\delta^i_m + 2\mu g^{\beta i}\varepsilon_{m\beta}, \sigma = \tilde{K}\varepsilon,$ матрица $\tilde{K}$ является не квадратной, как в (1.2) и далее, а прямоугольной, размера $9 \times 6$. Сразу же отметим, что рассуждения, приводящие к (2.1), никак не связаны с конкретным выбором канонических параметров. Поэтому возможен и такой их выбор: $u_i(M,t), \varepsilon_{im}(M,t), \sigma^i_m(M,t)$. Применительно к статической задаче теории упругости этот путь реализован в [2].

Следует также иметь в виду, что оператор ковариантного дифференцирования $\nabla_\alpha$ в $R$ и $R^*$ имеет разный смысл. В операторе $R$ $\nabla_\alpha$ применяется к компонентам вектора, а в $R^*$ — к компонентам тензора. Формальный переход от тензора $\sum$ к вектору $\sigma$ порождает вектор с тензорными компонентами. Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial y_\alpha} = (\nabla_\alpha u_m)e^m, \nabla_\alpha u_m = (\frac{\partial u}{\partial y_\alpha}, e_m),$$

в то время как

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial y_\alpha} = (\nabla_\alpha \sigma^{im})(e_i \otimes e_m), \nabla_\alpha \sigma^{im} = (\frac{\partial \Sigma}{\partial y_\alpha} \cdot\cdot e_i \otimes e_m).$$

Символ $\otimes$, как обычно, определяет диадное умножение, так что $(e_i \otimes e_m), (e^i \otimes e^m)$ — тензоры ранга два. Символ $\cdot\cdot$ определяет двойное скалярное произведение, которое называют также свёрткой двух тензоров. Именно с помощью этой операции вводится формально векторное скалярное произведение в $H(\eta)$.

Обратимся к (2.10). Вектор $r = (f - R^*\sigma) \in H^*(w)$ обычно называют вектором равновесия. Поскольку $\nabla_\alpha \sigma^{im}$ определяет контравариантную компоненту некоторого вектора $\nabla_\alpha \sigma^{im} = (R^*\sigma)^i$, то и вектор массовых сил $f$ естественно также задавать контравариантными компонентами $f^i$. Тогда в (2.10) следует иметь в виду, что векторы $\frac{\partial^z u}{\partial t^z}$ и $r$ задаются компонентами разных типов: ковариантными и контравариантными. Такого формального «несогласования» можно избежать, если $r^i$ обычным образом преобразовать в $r_i$. Возможен также переход от $u_i$ к $u^i$. Такие преобразования соответствуют переходу от инвариантного представления вектора $w \in H^*(w)$ в виде $w = w_i e^i$ к инвариантному представлению $w = w^i e_i$. Тогда вместо (2.14) получим

$$\frac{\partial^z u}{\partial t^z} + GR^*\sigma = Gf \leftrightarrow G^{-1}\frac{\partial^z u}{\partial t^z} + R^*\sigma = f, \tag{2.16}$$

где $G = \{g_{mi}\}$ — матрица размера $3 \times 3$, элементами которой являются ковариантные компоненты метрического тензора. При этом $G = G^T > 0$. Использование (2.16) вместо (2.14) приводит к уравнению $\frac{\partial^z \varepsilon}{\partial t^z} + RGR^*\sigma = RGf$ вместо (2.15). Поскольку $Gw = w, G^{-1}w = w,$ где один и тот же вектор $w \in H^*(w)$ в правых и левых частях этих соотношений задан соответственными разноимёнными компонентами, то на структуру уравнений (2.14), (2.15) выбор конкретного канонического параметра $w_i(M,t)$ или $w^i(M,t)$ не влияет. Поэтому в дальнейшем речь будет идти только о (2.14), (2.15).

В постановке «скорости-напряжения» используются такие следствия из (2.10) – (2.13):

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + R^*\sigma = f, \nu(M,0) = \psi(M); \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - R\nu = 0, \varepsilon(M,0) = R\varphi(M). \tag{2.17}$$

Как и (2.15), система уравнений из (2.17) является продолженной по отношению к (2.10), (2.11). Для получения (2.15) следует соответствующим образом продифференцировать по пространственным переменным первое уравнение из (2.10), что соответствует применению оператора $R$ к этому уравнению. Для получения (2.17) следует продифференцировать второе соотношение из (2.11) по $t$ и воспользоваться определением вектора скорости из (2.10). При этом следует иметь в виду, что для геометрически линейной упругой среды (1.1) эйлерово и лагранжево описания совпадают.

Один из основных вопросов, который сразу же возникает, связан с эквивалентностью исходных (2.10) – (2.13) и продолженных (2.15) и (2.17) задач. Для постановки (2.15) «в напряжениях» этот вопрос сводится к разрешимости операторного уравнения

$$\varepsilon = Ru, u \in U(R) \subset H^*(w) \tag{2.18}$$

при заданном $\varepsilon(M,t), t \in [0,t_1],$ и таком, что $\sigma = K\varepsilon \in U(R^*) \subset H(\eta)$. Для (2.18) условие разрешимости можно записать в виде:

$$(\varepsilon, p^{'})_D = 0 \forall p^{'} : R^* p^{'} = 0. \tag{2.19}$$

Здесь и далее точка вверху или внизу указывает на тип используемых компонент. Условие (2.19) эквивалентно (см., например, [3, 4; 20–22]) хорошо известным условиям совместности Сен-Венана. Речь идёт только о другой форме их записи: условие (2.19) выделяет из $H(\eta)$ подпространство $H_1(\varepsilon) \subset H(\xi) = H(K^{-1}\eta),$ в котором оператор $R$ является обратимым, т.е. $R^{-1}\varepsilon = u + z, Rz = 0$ [5]. Именно в этом подпространстве и следует искать решение задачи (2.15).

**Теорема 2.1.** На решении задачи (2.15) тензор несовместности равен нулю.

Иными словами, если $\varepsilon, \sigma = K\varepsilon$ — решение задачи (2.15), то для любого $t \ge 0$ $\varepsilon \in H_1(\xi), \sigma \in H_1(\eta)$. Неоднозначность в определении вектора упругих перемещений из (2.18) устраняется с помощью начальных данных (2.12). Более того, справедлива [6].

**Теорема 2.2.** Пусть $\varepsilon, \sigma = K\varepsilon$ — решение задачи (2.15), а $r = (f - R^*\sigma)$ — вектор равновесия. Пусть также

$$u(M,t) = \varphi(M) + t\psi(M) + \int_0^t (t-s) r(M,s) ds. \tag{2.20}$$

Тогда $\frac{\partial^z u}{\partial t^z} + R^*\sigma = f, \varepsilon = Ru.$

В качестве следствия из приведённых теорем заключаем, что задача «в перемещениях»:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^z u}{\partial t^z} + Au = f, u(M,0) = \varphi(M), \frac{\partial u(M,0)}{\partial t} = \psi(M); \\ A = R^*KR \ge 0, \varepsilon = Ru, \sigma = K\varepsilon, \nu = \frac{\partial u}{\partial t} \end{gathered} \tag{2.21}$$

и задача «в напряжениях»:

$$\frac{\partial^z \varepsilon}{\partial t^z} + P\sigma = Rf, \varepsilon(M,0) = R\varphi(M), \frac{\partial \varepsilon(M,0)}{\partial t} = R\psi(M);$$
$$p = RR^* > 0, \sigma = K\varepsilon, u(M,t) = \varphi(M) + t\psi(M) + \int_0^t (t-s) r(M,s) ds \tag{2.22}$$

эквивалентны. Очевидно, что утверждение об эквивалентности справедливо также для задачи (2.21) и задачи «в скоростях-напряжениях»

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + R^*\sigma = f, \frac{\partial u}{\partial t} = \nu, u(M,0) = \varphi(M), \nu(M,0) = \psi(M);$$
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - R\nu = 0, \sigma = K\varepsilon, \varepsilon(M,0) = R\varphi(M). \tag{2.23}$$

**Следствие 2.1.** Задачи (2.21)–(2.23) эквивалентны.

Переход от (2.21) к (2.22) требует от векторного поля $u(M,t)$ формально большей гладкости, чем та, которая предполагается при определении классического решения исходной задачи «в перемещениях» (2.21). Однако в (2.21) уже предписан порядок определения искомых параметров, поэтому на самом деле исходной задачей следует считать (2.10)–(2.13). Тогда требование «дополнительной» гладкости становится совершенно естественным. Оно вытекает из условия разрешимости (2.19) операторного уравнения (2.18). Действительно, только при выполнении условия (2.19) тензорному полю деформаций $\varepsilon_{im}$ динамической задачи (2.10)–(2.13) можно поставить в соответствие векторное поле упругих перемещений $u_i$ этой же задачи. Что касается (2.18), то можно отметить следующее: формула (2.20) даёт решение задачи (2.18) о восстановлении векторного поля перемещений по заданному тензорному полю деформаций с учётом того, что эти поля, помимо (2.18), связаны между собой законом сохранения импульса (2.10). Поэтому (2.20) можно считать аналогом формул Чезаро [7] в динамической задаче теории упругости.

## Список литературы

1 *Букенов М.М.* Метод фиктивных областей для среды Максвелла // Сб. «Численные методы и пакеты программ для решения уравнений математической физики / Букенов М.М.; НГУ. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1985. — С. 117–125.

2 *Цуриков Н.В.* Численное решение задач теории упругости в произвольной криволинейной системе координат: Дис. ... канд. ф.-м. наук / Цуриков Н. В.; НГУ. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1992. — 362 с.

3 *Коновалов А.Н.* Решение задач теории упругости в напряжениях: Учеб. пособие / Коновалов А.Н. — Новосибирск: Наука, 1979. — 345 с.

4 *Коновалов А.Н.* Численные методы в динамических задачах теории упругости // Сиб. мат. журн. / Коновалов А.Н.; НГУ. — 1997. — Т. 38. — № 3. — С. 551–569.

5 *Коновалов А.Н.* Задачи теории упругости в напряжениях // Сб. «Вычислительные методы в математической физике, геофизике и оптимальном управлении» / Коновалов А.Н.; НГУ. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1978. — С. 121–124.

6 *Букенов М.М.* Малые параметры в алгоритмах задач теории упругости: Дис. ... канд. ф.-м. наук / Букенов М.М. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1986. — 360 с.

7 *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твёрдого тела: Учеб. пособие / Работнов Ю.Н.; МГУ. — М.: Наука, 1979. — С. 230.

М.М.Букенов, А.Н.Москаленко

## «Жылдамдық-кернеуі» есебі

Мақалада үш өлшемді динамикалық серпімділік теориясының «жылдамдық-кернеуі» есебінің қойылымы қарастырылды. Динамикалық серпімділік теориясы есебінің негізгі қатынасы беріліп, үйлесімсіздік және динамикалық серпімділік теориясының «кернеудегі» есебінің шешемі туралы теоремалар дәлелденді. Осы теоремалар негізінде «орын ауыстырулардағы», «кернеудегі», «жылдамдық-кернеуі» есептерінің тепе-теңдегінің салдары есептеп шығарылды. Беру және «орын ауыстырулардағы», «кернеудегі» есептерімен тепе-теңдегін дәлелдеу болып табылды. Қойылған мақсат толығымен орындалды.

M.M.Bukenov, A.N.Moskalenko

## The problem «in speeds-voltage»

In this article, the authors consider the three-dimensional formulation of the dynamic problem of the theory of elasticity in the «speeds-pressures». Basic relations of dynamic elasticity problem are given; the tensor inconsistency theorem and the theorem of the solution of the problem of elasticity «in pressures» are considered. Based on the theory, the authors derived a consequence of the equivalence of the problem «in the movements,» «in the pressures» and «in the speeds-pressures». The authors' objective was to describe the formulation of the three-dimensional dynamic problem of elasticity «in the speeds-pressures» and prove its equivalence to the problem «in the movements» and «in pressures». The purpose been achieved entirely.

### References

1 Bukenov M.M. *Fictitious domain method for Maxwell medium*. — Novosibirsk: Publ. NGU, 1985, p. 117–125.
2 Tsurikov N.V. *Numerical solution of elasticity in arbitrary curvilinear coordinates*, Novosibirsk: Nauka, 1992, p. 121–130.
3 Konovalov A.N. *Solution of elasticity in pressures*. — Novosibirsk: Nauka, 1979, p. 233–240.
4 Konovalov A.N. *Siberian Mathematical Journal*, 1997, № 38 (3), p. 551–569.
5 Konovalov A.N. *Elasticity problem in pressures*. — Novosibirsk: Publ. NGU, 1978, p. 121–124.
6 Bukenov M.M. *Small parameters in the algorithms of elasticity*. — Novosibirsk: Publ. NGU, 1986, p. 113–121.
7 Rabotnov Iu.N. *Fracture mechanics*. — Moscow: Nauka, 1979, p. 230.

УДК 004.42:004.738.5

М.М.Букенов, Л.В.Устинова, А.С.Дошаков

*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail l29chn@mail.ru)*

## Корпоративная информационная система университета на базе Интернет- / Интранет-портала

Рассмотрены подходы, применяемые при создании корпоративной информационной системы университета. Отражены особенности и трудности при создании корпоративной информационной системы университета на основе готовых ERP-решений. Представлено понятие создания корпоративной информационной системы на основе Интернет- / Интранет-порталов, посредством которых объединены существующие информационные системы. Описан опыт внедрения технологии в Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова.

*Ключевые слова:* корпоративные информационные порталы, корпоративные порталы, интранет, интернет, портал, ERP, Enterprise Resource Planning, MRPII, Manufacturing Resource Planning, CRM, Customer Relationship Management.

Создание вузовской корпоративной информационной системы (КИС) должно основываться на некотором исходном аспекте, принципе, определяющем назначение, место и роль системы в деятельности вуза. Преобладающим на сегодня является управленческий аспект, что связано с опытом создания КИС промышленных, коммерческих предприятий и организаций. Сегодня КИС крупных предприятий обеспечивают комплексную автоматизацию управления финансово-хозяйственной, производственной деятельностью. При этом в той или иной степени автоматизируются все фазы управления предприятием, включая планирование, учет, анализ и регулирование.

Успешность проектов КИС в различных отраслях и эффективность их внедрения обусловлены, прежде всего, достаточно строгим определением объектов управления (точнее, компонентов сложного объекта управления) и оптимизируемых бизнес-процессов. Не случайно создание корпоративной