

## БІР ПАРАМЕТРДЕН ТӘУЕЛДІ ТҮРДЕ АНЫҚТАЛҒАН ЖАЛПЫЛАНҒАН ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР ТУРАЛЫ

Бұл мақалада біз жалпыланған функцияларды  $m > 0$  үшін  $|x|^m + |y|^m = 0$  теңдеуін қолдану арқылы анықтаған [1], [2], [3] жұмыстарындағы анықтамаларды пайдаланып, жалпыланған тригонометриялық функциялардың кейбір қасиеттерін дәлелдейміз. Біз жалпыланған тригонометриялық функциялардың графигін, тригонометриялық тепе-теңдіктерді және осы функциялардың бірнеше жалпы қасиеттерін зерттейміз.

Қарапайым тригонометрия  $R^2$  Евклид кеңістігінде үшбұрыштарды қарастырады. Қарапайым тригонометриялық функцияларды нақты сандарда анықтаудың бірнеше жолдары бар. Олар: тік бұрышты үшбұрыш анықтамасы, бірлік шеңбер анықтамасы, қатарлар анықтамасы, дифференциалдық теңдеулер арқылы анықтамалары және функционалдық теңдеулерді қолдану арқылы анықтамасы. Олардың қолдану арқылы біз геометриялық мәселелерді, комплексті аналитикалық мәселелерді және күрделі Фурье қатарының мәселелерін шеше аламыз. Сонымен қатар, олардың периодтылығы маңызды. Барлық алты тригонометриялық функциялар синус және косинус функциялары арқылы өрнектелінеді.

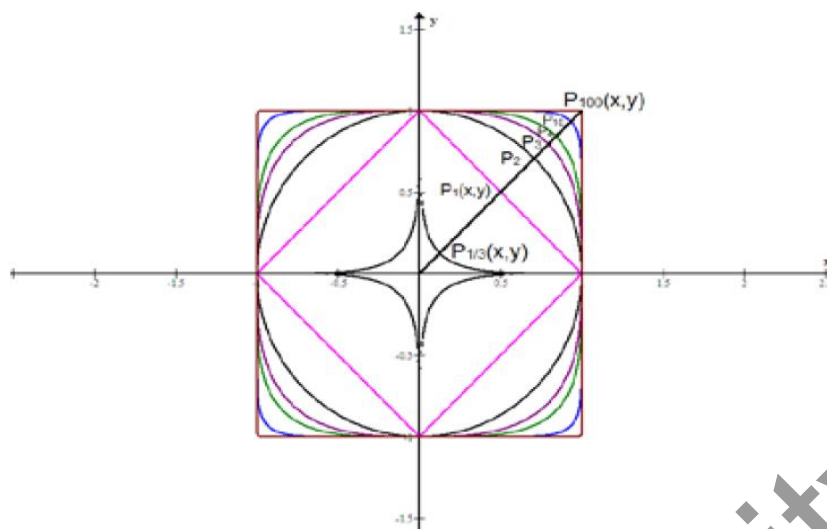
Көптеген әдебиеттерде жаңа тригонометриялық функциялар бастапқы шарттылы сызықтық емес қарапайым дифференциалдық теңдеулердің бірінші ретті жүйесі арқылы анықталады. Бұл жүйе Hamilton жүйесімен [1] байланысты. Жаңа тригонометриялық функциялар жалпыланған тригонометриялық функциялар деп аталады және  $m > 0$  үшін  $\sin_m x, \cos_m x, tg_m x, ctg_m x$  деп белгіленеді. Егер  $x = \cos_m x$  және  $y = \sin_m x$  деп алатын болсақ,  $|x|^m + |y|^m = 1$  теңдігі орындалады.

Біз  $|x|^m + |y|^m = 1, m > 1$  теңдігін пайдалана отырып, осы функциялардың графиктерін және қасиеттерін зерттейміз. Сосын  $m$  натурал сан болғанда жалпыланған тригонометриялық функциялар үшін әртүрлі формулалар, әртүрлі бұрыштар үшін осы функциялардың мәндерін аламыз.

Енді  $|x|^m + |y|^m = 1$  теңдеуін қарастырамыз. Бұл теңдеудің графигі Картезиан жоспары бойынша  $x$  осіне қарағанда симметриялы. Егер  $m = 1$  болса,  $|x| + |y| = 1$  функциясының графигі центрі бас нүктеден, төбелері  $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$  өтетін бірлік квадрат. Барлық  $m > 0$  болғанда,  $S_m - |x|^m + |y|^m = 1$  теңдеуінің графигі болсын.  $m = 2$  үшін графигі бірлік шеңбер.  $S_m$  кез келген  $m > 0$  үшін  $|x|^m + |y|^m = 1$  теңдеуінің графигі болсын. Біз оны бірлік жартылай квадрат деп атайық. Бастапқы сәулесі оң  $x$  осімен ақырғы сәулесі  $S_m$  графигін қиятын  $P_m(x,y)$  нүктесі арқылы өтетін  $S_m$  бірлік жартылай квадратының центрінде орналасқан  $\theta$  бұрышын стандарт позицияда орналасқан дейміз.  $\theta = \frac{\pi}{4}$  бұрышын стандарт позицияда орналасқан делік және  $P_m(x,y)$  нүктесі  $S_m$  және ақырғы сәуленің қиылысуы. Одан кейін ақырлы сәулемен бірге келесілерді аламыз [3]:

1.  $m \rightarrow 0$  ұмтылғанда  $P_m \rightarrow (0,0)$  және
2.  $m \rightarrow \infty$  ұмтылғанда  $P_m \rightarrow (1,1)$ .

1-суретте  $m > 0$  болғандағы кейбір мәндерін және  $P_m$  нүктесін көрсете отырып  $|x|^m + |y|^m = 1$  теңдеуінің графигін бейнеледік.



Сурет 1.  $m = \frac{1}{3}, 1, 2, 3, 4, 10, 100$  тең болғанда  $|x|^m + |y|^m = 1$  теңдеуінің графигі

Осы тәсілмен анықталған жалпыланған тригонометриялық функциялар үшін келесі теңдіктердің орындалатыны дәлелденген [1], [2]:

Теорема А. Барлық  $\theta \in R$  үшін келесі қасиеттер орындалады

1.  $|\cos_m \theta|^m + |\sin_m \theta|^m = 1$ .
2.  $1 + |\operatorname{tg}_m \theta|^m = |\sec_m \theta|^m$ .
3.  $1 + |\operatorname{ctg}_m \theta|^m = |\operatorname{csc}_m \theta|^m$ .

$S_m$  бірлік жартылай квадраттың полярлық теңдеуі келесі түрде анықталады:

$$r = \frac{1}{\sqrt[m]{|\cos \theta|^m + |\sin \theta|^m}}.$$

Осы теңдеуді пайдалану арқылы қарапайым тригонометриялық функция мен жалпыланған тригонометриялық функциялар арасындағы байланысты көрсететін теңдеуді алуға болады, ол теңдіктер теоремада көрсетілген [3]:

Теорема В. Барлық  $\theta \in R$  үшін мына теңдіктер орындалады:

1.  $\sin_m \theta = \frac{\sin \theta}{\sqrt[m]{|\cos \theta|^m + |\sin \theta|^m}}$ .
2.  $\cos_m \theta = \frac{\cos \theta}{\sqrt[m]{|\cos \theta|^m + |\sin \theta|^m}}$ .
3.  $\operatorname{tg}_m \theta = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt[m]{|\cos \theta|^m + |\sin \theta|^m}}$ . Егер  $\cos \theta \neq 0$  болса,  $\operatorname{tg}_m \theta = \operatorname{tg} \theta$ .
4.  $\operatorname{ctg}_m \theta = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sqrt[m]{|\cos \theta|^m + |\sin \theta|^m}}$ . Егер  $\sin \theta \neq 0$  болса, онда  $\operatorname{ctg}_m \theta = \operatorname{ctg} \theta$ .

Енді біз дәлелдеген тұжырымдар мен формулаларға тоқталайық. А және В теоремаларын және тригонометриялық функциялардың қасиеттерін пайдаланып төмендегі тұжырым дәлелденді:

Тұжырым.  $m = 4$  болғанда

1.  $\sin_4^2 \theta + \cos_4^2 \theta > 1$  егер  $\theta \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$  болса.

2.  $\sin_4^2 \theta + \cos_4^2 \theta = 1$  теңдігі тек қана  $\theta = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$  болғанда орындалады.

$m = 4$  болғанда жалпыланған тригонометриялық функциялардың кейбір бұрыштардағы мәндері мынадай болады:

$\alpha$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
$\sin_4 \alpha$	0	$\sqrt[4]{\frac{1}{10}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$	$\sqrt[4]{\frac{9}{10}}$	1	0	-1	0
$\cos_4 \alpha$	1	$\sqrt[4]{\frac{9}{10}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$	$\sqrt[4]{\frac{1}{10}}$	0	-1	0	1
$tg_4 \alpha$	0	$\sqrt[4]{\frac{8}{45}}$	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[4]{\frac{72}{5}}$	-	0	-	0
$ctg_4 \alpha$	-	$\sqrt[4]{\frac{72}{5}}$	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[4]{\frac{8}{45}}$	0	-	0	-

#### Әдебиеттер

1. Bushell P.J., Edmunds D.E. Remarks on generalized trigonometric functions// -Rocky Mountain J. Math., 2012.

2. Lang J., Edmunds D.E. Eigenvalues, embeddings and generalized functions// -Lecture notes in Mathematics, 2016.

3. Edmunds D.E., Gurka P., Lang J. Properties of generalized trigonometric functions// -Journal of Approximation Theory 164 (2012), 47-56.

**Тлеубергенова А.Ж.**, академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, физика-техникалық факультеті, тобы ДТТТ-71, докторант

**Қасиев С.Б.**, академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, физика-техникалық факультеті, тобы ТЭК-410, студент

(Ғылыми жетекші- доктор PhD, қауымдастырылған профессор Танашева Н.К.)

### ЖЕЛКЕН ТҮРІНДЕГІ ҚАЛАҚШАЛАРЫ БАР ЖЕЛҚОНДЫРҒЫСЫНЫҢ ТАРТУ КҮШІН ЗЕРТТЕУ

Аз жылдамдықтарға арналған жел қондырғысының өлшемі жел қондырғысының қуатын әрі қарай қосу және дайындау технологиясының шығындарын ескере отырып анықталады [1]. Белгіленген қуаттың 1кВт құнына әсер ететін анықтаушы индикатор тек желдің ағымының энергиясын пайдалану коэффициенті ғана емес, сонымен қатар жел қозғалтқышының жел энергиясын төмен жылдамдықпен жүзеге асыра алатындығына байланысты уақыт өте келе жел энергиясын пайдалану пайызы болады.

Жел қондырғысының қуат элементтері ретінде динамикалық өзгеретін беті бар қалақшалар қолданылады. Жел доңғалағының құрамында қозғалмалы ұшы бар үшбұрышты икемді «желкен» түрінде қалақшалар бекітілген қатты өзек бар. Әрбір желкенді қалақшаның бір негізі рамалық өзекке қосылған, ал қарама-қарсы шыңы икемді бекіту арқылы қосылған. Сыртқы ұштары, тірек шыбықтары өзектермен өзара байланысқан, әр желкенді қалақша үшін үшбұрышты пішінді құрылым, тірек шыбықтарының ішкі ұштары білік хабына бекітілген, осылайша қатты жел доңғалағының қаңқасы пайда болады.