арқылы x операторының жалпыланған сингуляр мәнді функциясы анықталады [3, 4].

Бұл келесі теорема Назаров-Подкорытов леммасының [1, 5] коммутативті емес $\mathcal{L}_p$ кеңістігіндегі аналогы болып табылады.

Теорема 1. $x, y \in \mathcal{L}_0(\mathcal{M})$ операторлары

$$d(s;x)\begin{cases}\leq d(s;y), & егер\ s < s_0;\\ \geq d(s;y), & егер\ s > s_0\end{cases}$$

шартын қанағаттандыратындай етіп таңдалсын. Егер

$$\tau(|x|^{p_0} - |y|^{p_0}) \geq 0$$

орындалатындай $p_0 \geq 1$ бар болып және $|x|^p$ және $|y|^p$ операторларының ең болмағанда біреуінің $p > p_0$ және $|x|^p - |y|^p \in \mathcal{L}_1(\mathcal{M})$ қамтамасыз етілгенде ақырлы ізі бар болсын деп ұйғарайық. Онда

$$\tau(|x|^p - |y|^p) \geq 0$$

Дербес жағдайда,

$$\|y\|_p \leq \|x\|_p.$$

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Astashkin S. V., Lykov K. V., Milman M. Majorization revisited: Comparison of norms in interpolation scales // arXiv preprint arXiv:2107.11854, 2021.
2. Bekjan T.N., Hardy-Littlewood maximal function of τ −measurable operators // J. Math. Anal. Appl. – 2006. – Vol. 322, №1. – P. 87-96.
3. Fack T, Kosaki H., Generalized s-numbers of τ -measurable operators // Pacific J. Math. – 1986. – Vol. 123, №2. – P. 269-300.
4. Lord S., Sukochev F., Zanin D. Singular traces. Theory and applications // De Gruyter Studies in Mathematics, №46. - Berlin: De Gruyter, 2013. - 469 p.
5. Nazarov F.L., Podkorytov A.N. Ball, Haagerup, and distribution functions // Compl. Anal. Operators and Rel. Topics. Oper. Theory: Adv. and Appl. – 2000. – Vol. 113. – P. 247-267.

ч

ОБ ОПЕРАТОРЕ СВЕРТКИ В ЛОКАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ МОРРИ

Канкенова А.М. [1], Нурсултанов Е.Д.[2]

[1]*Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан,*

[2]*Казахстанский филиал МГУ им. М.В.Ломоносова, Нур-Султан, Казахстан*

E-mail:ayagoz.zhantakbayeva@yandex.ru, er-nurs@yandex.ru

Пусть $k \in \mathbb{Z}$. Обозначим через G_k множество всех кубов в $\mathbb{R}^n$ вида

$$[0, 2^k)^n + 2^k m, \quad m \in \mathbb{Z}^n.$$

Очевидно, что $\mathbb{R}^n = \coprod_{Q \in G_k} Q$, здесь $\coprod Q$означает объединение непересекающихся множеств.

Множество $\mathbb{G} = \coprod_{k \in Z} G_k$ называется семейством диадических кубов в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что каждый куб $Q \in G_k$ разбит на 2^n кубов из G_{k-1}.

Семейство взаимно непересекающихся кубов $\mathcal{T} = \{Q\} \subset \mathbb{G}$ называется локальным разбиением пространства $\mathbb{R}^n$ если:

1) $\mathbb{R}^n = \overline{\coprod_{Q \in \mathcal{T}} Q}$, где черта обозначает замыкание;
2) $|T \cap G_k| < \infty$.Здесь и далее |A| — количество элементов в множестве A.

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$ и $T = \{Q\}$ — локальное разбиение $\mathbb{R}^n$. Определим локальное пространство Морри $LM^{\lambda}_{p,q}(\mathcal{T})$как множество измеримых функций f для которых

$$\|f\|_{LM^{\lambda}_{p,q}(\mathcal{T})} = \left(\sum_{k \in Z}\left(2^{-k\lambda}\sum_{Q \in T_k = T \cap G_k}\|f\|_{L_p(Q)}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty .$$

Здесь и далее выражения $\left(\int_{\Omega} |\phi(t)|^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$и $(\sum_{k \epsilon \Omega}|a_k|^q)^{\frac{1}{q}}$ при $q = \infty$ понимаются как $\sup_{x \epsilon \Omega} |\phi(x)|$, $\sup_{k \epsilon \Omega} |a_k|$, соответственно.

Данная шкала пространств при λ>0 охватывает пространства

$$LM_{p,q,x}^{\lambda} = \left\{ f: \ \left(\int_0^{\infty} \left(t^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B_t(x))} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\}, \tag{1}$$

где $B_t(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| \le t\}$ -- шар с центром в точке x и радиусом t>0.

Эти пространства были введены Буренковым и Гулиевым в [1] . Отметим, что (1) охватывает λ<0.

Пусть A и B множества в $\mathbb{R}^n$. Расстояние между множествамиA и B определяется следующим образом

$$\rho(A,B) = \ inf_{x \in A, y \in B}\, \rho(x,y).$$

Под разностью множеств A и B понимаем $A - B = \{x - y: x \in \ A, \ y \in \ B\}$.

Нам понадобится разбиение порождение соответствующее точке $u \in \mathbb{R}^n$. Данное разбиение с локализацией точки u.

Пусть $u \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим локальное разбиение $T(u)$. Определим семейства кубов

$$Y_k(u) = \{ \ Q \ \in \ G_{k+1} : \rho(Q,u) < 2^k; \ \ k \in \mathbb{Z} \}.$$

Заметим, что множество Y_k содержит не более 2^n кубов.

Определим

$$T_k(u) = \ \{ \ Q \ \in G_k : Q \ \notin Y_{k-1} \,; Q \ \subset \ \bigcup_{I \in Y_k(u)} I \ \};$$

$$T(u) = \cup_{k \in \mathbb{Z}} T_k(u).$$

Заметим, $|T_k(u)| \le 2^n(2^n - 1) < 4^n$.

Теорема 1. Пусть $1 \le p \le \infty, 1 \le q \le \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \ \ \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1. \ \ \lambda \in \mathbb{R}, \ u \in \mathbb{R}^n . T(u)$-локальное разбиение пространства$\mathbb{R}^n$. Тогда верно

$$\|f\|_{\left(LM_{p,q}^{\lambda}(T(u))\right)'} \approx \|f\|_{LM_{p',q'}^{-\lambda}(T(u))} \ . \tag{2}$$

Замечание. В случае оценки сверху в формуле (2) верно утверждение теоремы для любого разбиения.

Лемма 1. Пусть $1 \le p \le \infty, \ 0 \le \alpha, \lambda \le \frac{n}{p}$- и $\alpha + \lambda \ge \frac{n}{p}$, $\gamma = \alpha + \lambda - \frac{n}{p}, \ \ u, v \in \mathbb{R}^n, \ T(u), T(v)$- соответствующие разбиения, тогда имеет место неравенство

$$\|f * g\|_{LM_{p,\infty}^{\lambda}(T(u))} \le c\|g\|_{LM_{p',1}^{-\alpha}(T(v))} \|f\|_{LM_{p,\infty}^{\gamma}(T(u-v))},$$

где константа c зависит только от параметров λ, n и p.

Теорема 2. Пусть T(u), T(v) локальные разбиения пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $1 \le p \le \infty$, $0 < \ \lambda < \frac{n}{p}, \ 0 \le \gamma \le \frac{n}{p}$ и $0 < \alpha = \gamma - \lambda + \frac{n}{p}, 0 < \tau \le \infty$. Если $f \in LM_{p,\infty}^{\gamma}\big(T(u-v)\big)$и $g \in LM_{p',\tau}^{-\alpha}\big(T(v)\big)$, то $f * g \in LM_{p,\tau}^{\lambda}\big(T(u)\big)$ и выполняется неравенство

$$\|f * g\|_{LM_{p,\tau}^{\lambda}(T(u))} < c \ \|f\|_{LM_{p,\infty}^{\gamma}(T(u-v))} \|f\|_{LM_{p',\tau}^{-\alpha}(T(v))},$$

где константа c зависит только от параметров n, λ, α,p.

Следствие. Пусть $T(u)$, $T(v)$ локальные разбиения пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $0 < max(q,1) \le p \le \infty, 0 < \ \lambda \ < \frac{n}{q}$ и $0 \le \gamma \le \frac{n}{p}$ и $0 < \alpha = \gamma - \lambda + \frac{n}{p}, 0 < \tau \le \infty$.

Если $f \in LM_{p,\tau}^{\gamma}\big(T(u-v)\big)$и $g \in LM_{p',\infty}^{-\alpha}\big(T(v)\big)$, то $f * g \in LM_{q,\tau}^{\lambda}\big(T(u)\big)$ и выполняется неравенство

$$\|f * g\|_{LM_{q,\tau}^{\lambda}(T(u))} < c \ \|f\|_{LM_{p,\tau}^{\gamma}(T(u-v))} \|g\|_{LM_{p',\infty}^{-\alpha}(T(v))},$$

где константа c зависит только от параметров n, λ, α,p, q.

Лемма 2. Пусть T(u), T(v) локальные разбиения пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $1 \le p < q < \infty, 0 \le \ \lambda \ \le \frac{n}{q}$ и $0 \le \gamma \le \frac{\lambda\, q}{p}$ и $\alpha = \gamma - \lambda + \frac{n}{q}, p' = \frac{p}{p-1}$.

Если $f \in LM_{p,\infty}^{\gamma}\big(T(u-v)\big)$и $g \in LM_{p',1}^{-\alpha}\big(T(v)\big)$, то $f * g \in LM_{q,\infty}^{\lambda}\big(T(u)\big)$ и выполняется неравенство

$$\|f * g\|_{LM_{q,\infty}^{\lambda}(T(u))} < c \ \|f\|_{LM_{p,\infty}^{\gamma}(T(u-v))} \|g\|_{LM_{p',1}^{-\alpha}(T(v))},$$

где константа c зависит только от параметров n, λ, q.

Лемма 3. Пусть $u \in \mathbb{R}^n, T(u)$ локальное разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ по точкеu. Пусть $1 \le p < q < \infty, 0 \le \lambda \le \frac{n}{q}$ и $0 < \gamma \le \frac{\lambda q}{p}$ и $\alpha = \gamma - \lambda + \frac{n}{q}, p' = \frac{p}{p-1}$.

Если $f \in LM^{\gamma}_{p,\frac{p}{q}}\big(T(u-v)\big)$и $g \in LM^{-\alpha}_{p',1}\big(T(v)\big)$, то $f * g \in LM^{\lambda}_{q,\infty}\big(T(u)\big)$ и выполняется неравенство

$$\|f * g\|_{LM^{\lambda}_{q,\infty}(T(u))} < c\,\|f\|_{LM^{\gamma}_{p,\frac{p}{q}}(T(u-v))}\|g\|_{LM^{-\alpha}_{p',\infty}(T(v))},$$

где константа c зависит только от параметров n, λ, q.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан. (Грант №AP14870361).

Список использованной литературы

1. Burenkov V.I., Guliyev H.V., GuliyevV.S.: Nessesary and sufficient conditions forboundedness of the fractional maximal operator in the local Morrey-type spaces, DokladyRoss. Akad. Nauk. Matematika 409 (2006) 443-447.

ОБ ОДНОЙ СЕКТОРИАЛЬНОЙ ФОРМЕ В L_2

Кошкарова Б.С.[1], Мурат Г.[2], КусаиноваЛ.К.[1]

[1]*Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*

[2]*НАО «Торайгыров университет», Павлодар, Казахстан*

E-mail: b-koshkarova@yandex.kz

В теории сингулярных дифференциальных операторов одним из методов задания и исследования является метод построения операторов, ассоциированных с полуторалинейными и квадратичными формами.

В работе рассмотрена форма вида

$$q[u,f] = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^{n} \rho_j^2(x) D_j^2 u\, D_j^2 f + \mathrm{w}(\mathrm{x}) u f \right) dx, \qquad \mathrm{u,f} \in \mathrm{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n). \tag{1}$$

В (1) $i = \sqrt{-1}$, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ $(1 \le j \le n)$, $\rho_j > 0$ $(1 \le j \le n)$, $w_0 = Rew > 0, w_1 = Imw$ локально суммируемы в $\mathbb{R}^n$ ($\in L_{2,loc}$), и $\left|\rho_j(x) - \rho_k(x)\right| > 0$ в $\mathbb{R}^n$ хотя бы для одной пары $j \ne k$, L_2 – пространство вещественных функций в $\mathbb{R}^n$ с конечной нормой.

Обозначим через $W = W_2^2(\bar{\rho}, w_0)$ пополнение класса финитных функций $\mathfrak{D} = \mathrm{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ по норме $\|u\|_W = \sqrt{q_0[u,u]}$. Пусть $P(x;\bar{a},h) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \left|y_j - x_j\right| < \frac{a_j h^{\frac{1}{2}}}{2},\ 1 \le j \le n \right\}, \bar{a} = (a_1, \dots, a_n), \big(a_j > 0, 1 \le j \le n\big)$, $h > 0$. Через $\overline{\mathrm{E}}$, $|\mathrm{E}|$, $|E|_v$ будут обозначаться соответственно замыкание, мера Лебега.

Положим $(0 < \delta < 1)$ $S_{(\delta)}(x,h;\ \bar{a}, w_0) = \inf\limits_{\{\mathrm{e}\}_\delta} |P(x;\bar{a},h) \backslash e|_{w_0}$,где inf берется по всем компактам $e \subset \bar{P}(x;\bar{a},h)$ меры $|e| \le \delta\, |P(x;\bar{a},h)|$.

Потребуем, чтобы $w_0 = Rew$было невырожденно в следующем смысле:

$$S_{(\delta)}(x,h;\ \bar{a}, w_0) > 0 \tag{2}$$

и не убывает по $h > 0$, δ –некоторая постоянная из (0,1).

Введем функцию

$$h(x) = h(x;\bar{\rho},w_0) = \sup\{h > 0 : M_{(\delta)}(x,h;\bar{\rho},w_0) \le 1\},$$

где

$$M_{(\delta)}(x,h;\bar{\rho},w_0) = h\big(\dot{S}_{(\delta)}(x,h;\ \bar{\rho},w_0)|P(x;\bar{\rho}(x),h)|^{-1}\big)^{1/2}.$$

Положим $\Pi\bar{\rho}(x) = \prod_{j=1}^{n} \rho_j(x)$. Поскольку

$$\lim_{h\to 0+} M_{(\delta)}(x,h;\bar{\rho},w_0) = \big(\Pi\bar{\rho}(x)\big)^{-1/2} \lim_{h\to 0+} h^{1-n/4}\big[S_{(\delta)}(x,h;\ \bar{\rho},w_0)\big]^{1/2} = 0,$$

то $h(x) > 0$ в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что $0 < h(x) = h_{(\delta)}(x;\bar{\rho},w_0) < \infty$, если $n < 4 (n > 1)$либо