Далее,

$$\sum_{l=0}^{\infty} m_{l+1}^{r\theta} E_{m_l}^{\theta}\left(f_0\right)_p \geq C\sum_{l=0}^{\infty} m_{l+1}^{r\theta}\left\|S_{m_{l+1}}\left(f_0\right)-S_{m_l}\left(f_0\right)\right\|_p^{\theta} = C\sum_{l=0}^{\infty} m_{l+1}^{r\theta}\left\|\sum_{k=m_l}^{m_{l+1}-1} c_k\left(f_0\right)\psi_k\left(x\right)\right\|_p^{\theta} =$$

$$= C\sum_{i=1}^{\infty} m_{\nu_i+1}^{r\theta}\left\|m_{\nu_i+1}^{-r+1/p-1}\sum_{k=m_{\nu_i}}^{m_{\nu_i+1}-1}\psi_k\left(x\right)\right\|_p^{\theta} = C\sum_{i=1}^{\infty} m_{\nu_i+1}^{r\theta} m_{\nu_i+1}^{-r\theta+\theta/p-\theta}\left\|\sum_{k=m_{\nu_i}}^{m_{\nu_i+1}-1}\psi_k\left(x\right)\right\|_p^{\theta} \geq$$

$$\geq C\sum_{i=1}^{\infty} m_{\nu_i+1}^{r\theta} m_{\nu_i+1}^{-r\theta+\theta/p-\theta} m_{\nu_i+1}^{\theta-\theta/p} = C\sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty .$$

Теорема 3 доказана.

Отметим, что пространства Бесова по мультипликативным базисам Прайса и другие эквивалентные нормы в одномерном случае рассмотрены в работе [3], в кратном случае по системе Уолша — в [4].

Список литературы

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. — М.: Наука, 1987.
2. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975. — 480 с.
3. *Смаилов Е.С., Сулейменова З.Р.* Теоремы вложения для пространства Бесова по мультипликативным базисам Прайса // Тр. мат. ин-та им. В.А.Стеклова. — М., 2003. — Т. 243. — С. 313–319.
4. *Игенберлина А.Е.* Функциональные пространства на двоичной группе и сильная суммируемость рядов Фурье–Уолша: Дис. … канд. физ.-мат. наук. — Астана, 2008.

УДК 519.677:517.518

Р.Ж.Толеуханова

Карагандинский государственный университет им. академика Е.А.Букетова

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ В БАЗИСЕ УОЛША

Мақалада ақпаратты цифрлік түрде өңдеу кезіндегі Уолш функцияларын қолданудың кейбір талдау әдістері қарастырылды. Жазықтықтағы бейнеленетін сигналдарды қалпына келтіргенде Уолш коэффициенттерінің ерекшеліктері көрсетілді.

In this article were showed some analytic methods of applications Walsh's functions to digital machining including during the restoration initial fragments of the picture signals on the plane. The coefficients of Walsh's transformations were also displayed.

В базисе систем Уолша в 80–90-х годах XX в. рассматривались передача сигналов по каналам радиосвязи, работа радарных установок, передача телефонных сигналов по общему кабелю, кодирование сигналов. Современные возможности цифровых технологий позволяют решать эти задачи особенно эффективно. При решении вместе с математическим аппаратом используются методы синтеза, преобразования и кодирования сигналов.

По аналитической форме описания сигнала составляется математическая модель процесса, который с физической точки зрения может быть охарактеризован законами изменения напряженности электромагнитного поля, звукового давления, напряжения или тока в цепи, отклонения светового луча на экране и т.п. Чаще всего сигналы рассматривают как функции, заданные в определённых физических координатах. В этом смысле различают одномерные (например, зависящие от времени), двумерные, заданные на плоскости (примером могут служить различного рода изображения), трёхмерные (характеризующие, например, пространственные объекты) сигналы. Математически такие сигналы описываются соответственно функциями одной, двух и трёх переменных. При этом могут использоваться скалярные, комплексные и векторные функции. Реальные сигналы всегда являются функциями с ограниченным интервалом определения, поскольку их наблюдение, регистрация и обработка не могут выполняться бесконечно долго (см. [1, 2]). В данной работе рассматриваются плоские сигналы, т.е. задаваемые на плоскости, — сигналы изображений, в частности, полученные сканированием. При восстановлении исходного фрагмента сигнала изображения выявлены некоторые особенности коэффициентов преобразований Уолша.

Введём необходимые определения. Пусть $F(x, y)$ — непрерывный сигнал, x, y — некоторые аргументы. При этом сигнал на заданных интервалах его определения рассматривается как совокупность элементарных сигналов $\Phi_{n,m}(x, y)$, умноженных на коэффициенты $c_{n,m}$:

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m}\ \Phi_{n,m}(x, y)\,. \tag{1}$$

Будем говорить, что система функций $\left\{\Phi_{n,m}(x, y)\right\}$ является базисной, а представление сигнала в виде (1) — его разложение по системе базисных функций. Если система функций выбрана, то сигнал полностью характеризуется матрицей спектральных коэффициентов $\left\{c_{n,m}\right\}$ — его спектром.

При практических расчётах ряд (1) обычно ограничивают (усекают). В этом случае представление сигнала будет приближенным

$$F(x, y) \approx F^*(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_{n,m}\ \Phi_{n,m}(x, y) \tag{2}$$

и имеет место аппроксимация сигнала конечным рядом (2).

Для того чтобы разложение сигнала в форме (1) было возможным, система базисных функций (СБФ) должна удовлетворять ряду требований:

- быть упорядоченной системой линейно независимых функций;
- быть полной, для того чтобы по выбранной системе функций можно было разложить любой сигнал из заданного множества;
- число линейно независимых функций в полной системе должно быть равным размерности рассматриваемого множества сигналов, т.е. количеству чисел, с помощью которых можно выбрать любой сигнал из этого множества.

Система Уолша является ортогональной на интервалах определения сигналов и удобна для их разложения, поэтому двумерную систему $\left\{W_{n,m}(x, y)\right\}$ можно рассматривать в роли базисной системы $\left\{\Phi_{n,m}(x, y)\right\}$.

К двоично-ортогональным СБФ относятся функции Радемахера, Уолша и Хаара. Интервалы ортогональности их при построении представляются совокупностью двоично-рационального числа равных подынтервалов. Эти системы имеют важное значение для практики спектральной обработки, поскольку принимают только значения ± 1 (функции Радемахера и Уолша) либо ± 1 и 0 (функция Хаара) и легко могут быть получены с помощью цифровых устройств.

Сигнал, представляющий собой функцию двух переменных $F(x, y)$ с ограниченной областью определения $(x, y) \in [0,1)^2$, можно представить рядом Фурье по системе двумерных функций Уолша $\left\{W_{n,m}(x, y)\right\}$:

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m}\ W_{n,m}(x, y)\,. \tag{3}$$

При этом спектр и равенство Парсеваля запишутся следующим образом:

$$c_{n,m} = \int_0^1 \int_0^1 F(x, y)\, W_{n,m}(x, y)\, dxdy\,; \tag{4}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 F^2(x, y)\, dxdy = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m}^2\,.$$

Усечённые двумерные ряды Уолша

$$F^*(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_{n,m}\ W_{n,m}(x, y) \tag{5}$$

обладают теми же видами сходимости, что и усечённые одномерные ряды Уолша, и могут быть использованы для аппроксимации двумерных непрерывных сигналов.

Так как каждая двумерная функция Уолша представляет собой произведение одномерных функций, то спектральные коэффициенты в двумерном базисе Уолша определяются из формулы

$$c_{n,m} = \int_0^1 W_n(x)\left[\int_0^1 F(x,y)\,W_m(y)\,dy\right]dx\,. \tag{6}$$

Таким образом, двумерный спектр Уолша можно получить следующим образом: сначала вычислить одномерные спектры сигнала по одной переменной для каждого фиксированного значения второй, а затем выполнить одномерное преобразование Уолша полученных спектров по второй переменной. Этот приём применяется при цифровой обработке двумерных сигналов.

Непрерывные функции Уолша являются кусочно-постоянными огибающими соответствующих дискретных функций. Дискретные функции получим дискретизацией их непрерывных аналогов. Пусть $\left\{W_{n,m}\left(\frac{i}{N},\frac{j}{M}\right)\right\}$ множество дискретных функций Уолша, определённых на прямоугольнике со сторонами N и M. Для двумерных сигналов с известным аналитическим описанием используем формулу расчёта спектральных коэффициентов вида

$$c_{n,m} = \frac{1}{NM}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} F(i,j)\,W_n\left(\frac{i}{N}\right)W_m\left(\frac{j}{M}\right),$$

где $W_n\left(\frac{i}{N}\right)$ и $W_m\left(\frac{j}{M}\right)$ — дискретные функции Уолша.

Здесь выражение

$$F(i,j) = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} c_{n,m}\,W_n\left(\frac{i}{N}\right)W_m\left(\frac{j}{M}\right) \tag{7}$$

определяет двумерный дискретный ряд Фурье-Уолша или двумерное дискретное преобразование Уолша. Коэффициенты этого ряда $c_{n,m}$ суть двумерный дискретный спектр.

Они, так же как и коэффициенты двумерного непрерывного ряда Уолша, могут быть получены двукратным применением одномерного дискретного преобразования Уолша соответственно по координатам i и j:

$$c_{n,m} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left[\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} F(i,j)W_m\left(\frac{j}{M}\right)\right]W_n\left(\frac{i}{N}\right) = \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} F(i,j)\,W_n\left(\frac{i}{N}\right)\right]W_m\left(\frac{j}{M}\right). \tag{8}$$

Равенство Парсеваля для двумерных преобразований Уолша имеет вид

$$\frac{1}{NM}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} F^2(i,j) = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} c_{n,m}^2$$

и, в свою очередь, может быть использовано для контроля перехода от представления сигнала в области аргументов к спектральной области. Следует отметить, что физический смысл равенства Парсеваля состоит в том, что мощность сигнала равна сумме мощностей всех составляющих спектра; а ведь мощность, энергия являются одними из основных характеристик сигнала. Эффективные значения составляющих спектра (обобщённых гармоник) есть коэффициенты Фурье-Уолша.

В случае использования при обработке сигналов спектральной формы представления сигналов возникает необходимость в операции анализа спектра. В общем случае при анализе спектра непрерывных сигналов в математическом отношении вычисляется зависимость и выполняются операции умножения сигнала на значения базисных функций. Полученные произведения интегрируются на заданном интервале определения.

Особенности системы Уолша позволяют упростить структуру анализаторов. Так, при анализе спектра в базисе Уолша исключаются операции умножения сигнала на базисную функцию. Анализатор параллельного типа содержит генератор функций Уолша (ГФУ), в котором воспроизводятся значения базисных функций Уолша для каждого значения аргументов x и y, $N \times M$ формирователей двумерных функций с ключевыми схемами, управляемых соответствующими выходами ГФУ, блоки инвертирования сигнала и блоки интегрирования или суммирования. Сигнал, поступающий на информационные входы ключевых схем формирователей, в зависимости от значения функции

$W_{n,m}(x,y)$, поступает либо без изменения на вход соответствующего блока интегрирования (при $W_{n,m}(x,y) \equiv 1$), либо предварительно изменив свой знак на противоположный на соответствующем блоке инвертирования (если $W_{n,m}(x,y) \equiv -1$).

Анализатор последовательного типа содержит одну ключевую схему, где формируются функции $W_{n,m}(x,y)$ и по одному блоку инвертирования или суммирования. Здесь используется ГФУ последовательного типа, где последовательно воспроизводятся все значения каждой функции, начиная с нулевой.

Следует отметить, что в общем случае при анализе спектра непрерывных сигналов на ЭВМ лучше программировать формулу (4). Операции интегрирования как обычно выполняются с использованием известных численных методов и стандартных подпрограмм. Из соображений экономии машинного времени целесообразно при составлении программы воспользоваться представлением спектра Уолша в виде

$$c_{n,m} = \sum_{i=0}^{N-1} W_n\left(\frac{i}{N}\right) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\sum_{j=0}^{M-1} W_m\left(\frac{j}{M}\right) \int_{y_j}^{y_{j+1}} F(x,y)\,dy \right] dx . \tag{9}$$

Достаточно будет вычислить значения интегралов сигнала только на подынтервалах постоянства функции Уолша и спектральные коэффициенты получить путём суммирования этих значений в соответствии с законом изменения знака функции.

Во многих задачах распознавания образов применяются оценки спектральных характеристик. В случае плоского (двумерного) или многомерного сигнала для распознавания используются двумерные или соответственно многомерные спектры [3]. Многомерный сигнал можно преобразовать в одномерный за счёт увеличения объёма этого числового массива. Тогда встаёт задача установления соотношений между спектром многомерного массива и спектром преобразованного из него одномерного сигнала. Покажем возможность преобразования двумерного спектра Уолша $\{c_{n,m}\}$ в одномерный путём построчного сканирования с сохранением номера в каждой строке.

Спектр $\{c_{n,m}\}$, $n = 0,1,\dots,N-1,\quad m = 0,1,\dots,M-1$ ($N = 2^{\alpha}$, $M = 2^{\beta}$, $\alpha,\beta = \overline{1,\infty}$) двумерного сигнала $F(i,j),\quad i = 0,1,\dots,N-1,\quad j = 0,1,\dots,M-1$ определим соотношением

$$c_{n,m} = \frac{1}{NM} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} F(i,j) W_m\left(\frac{j}{M}\right) W_n\left(\frac{i}{N}\right) = \frac{1}{NM} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} F(i,j) W_n\left(\frac{i}{N}\right) W_m\left(\frac{j}{M}\right). \tag{10}$$

Существование зависимости между ортогональным спектром двумерного сигнала и ортогональным спектром для одномерного массива, полученным из двумерного путём построчного сканирования в одномерный, обнаружено Д.М.Жуковым [4]. Покажем существование этой зависимости для базиса из кусочно-непрерывных функций Уолша. Также, учитывая, что при обработке двумерных числовых массивов дискретными преобразованиями Уолша необходимо выбирать сканирование, при котором в какой-то мере сохраняется «непрерывность» при переходе от точки к точке, имеем следующее утверждение.

Лемма [3]. Для любых $k = 0,1,\dots,NM-1,\quad l = 0,1,\dots,NM-1$ справедливы равенства

$$W\left(\frac{k}{N}, \frac{l}{M}\right) = W_k\left(\frac{l}{NM}\right) = W_l\left(\frac{k}{NM}\right). \tag{11}$$

Теорема. Пусть $\{c_{n,m}\}$ — спектр двумерного сигнала $F(i,j)$ и $\{R_p\}$, $p = 0,1,\dots,NM-1,$ — спектр, полученный для одномерного сигнала $G(k),\quad k = 0,1,\dots,NM-1,$ в котором при $k = iM + j,$ $0 \le i \le N-1,\quad 0 \le j \le M-1$ положено $G(k) = G(iM+j) = F(i,j)$.

Тогда при $l = mN + n,\quad 0 \le n \le N-1,\quad 0 \le m \le M-1$ справедливы соотношения

$$R_p = R_{mN+n} = R_{m,n} = c_{n,m} .$$

Доказательство. Имеем выражение

$$R_p = \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{NM-1} G(k) W_p\left(\frac{k}{NM}\right), \quad p = 0,1,\dots,NM-1 . \tag{12}$$

По определению и свойствам функций Уолша

$$R_p = \frac{1}{NM}\sum_{k=0}^{NM-1} G(k)\,W_p\left(\frac{k}{NM}\right) = \frac{1}{NM}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} G(iM+j)\,W_\gamma\left(\frac{iM+j}{NM}\right) =$$

$$= \frac{1}{NM}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} F(i,j)\,W_p\left(\frac{i}{N}\right)\,W_p\left(\frac{j}{M}\right).$$

Полагая $p = mN + n,\quad 0 \le m \le M-1,\ 0 \le n \le N-1,$ находим:

$$R_p = R_{mN+n} = R_{m,n} = \frac{1}{NM}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} F(i,j)\,W_{mN+n}\left(\frac{i}{N}\right)W_{mN+n}\left(\frac{j}{NM}\right) =$$

$$= \frac{1}{NM}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} F(i,j)\,W_{mN}\left(\frac{i}{N}\right)W_n\left(\frac{i}{N}\right)W_{mN}\left(\frac{j}{NM}\right)W_n\left(\frac{j}{NM}\right).$$

Так как при $0 \le j \le M-1$ имеем $\frac{j}{NM} < \frac{1}{N}$, т.е.

$$\frac{j}{NM} = \frac{j}{2^{\alpha+\beta}} = \frac{j_1^*}{2^{\alpha+1}} + \frac{j_2^*}{2^{\alpha+2}} + \quad \ldots \quad ,$$

где $0 \le j_t^* \le 1$ для всех t, то при $0 \le n \le 2^\alpha - 1$, получаем $W_n\left(\frac{j}{NM}\right) = 1$.

Также имеем из равенства (11) леммы

$$W_{mN}\left(\frac{j}{NM}\right) = W_j\left(\frac{mN}{NM}\right) = W_j\left(\frac{m}{M}\right) = W_m\left(\frac{j}{M}\right).$$

Кроме того, так как двоичные координаты чисел $m \cdot 2^\alpha$ и $\frac{i}{2^\alpha}$ удовлетворяют соотношениям

$$\left(m\cdot 2^\alpha\right)_{-\gamma} \equiv \left[\frac{m\cdot 2^\alpha}{2^{\gamma-1}}\right](\mathrm{mod}\ 2) = m_{-(\alpha-\gamma)} = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad \gamma \le \alpha, \\ m_{-(\gamma-\alpha)}, & \text{при} \quad \gamma \ge \alpha+1, \end{cases}$$

$$\left(\frac{i}{2^\alpha}\right)_\gamma \equiv \left[\frac{i}{2^\alpha}\cdot 2^\gamma\right](\mathrm{mod}\ 2) \equiv \left[i\cdot 2^{\gamma-\alpha}\right](\mathrm{mod}\ 2) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad \gamma \ge \alpha+1, \\ i_{-(\alpha-\gamma+1)}, & \text{при} \quad \gamma \le \alpha, \end{cases}$$

то $W_{m\cdot 2^\alpha}\left(\frac{i}{2^\alpha}\right) = 1$.

Здесь $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Таким образом,

$$z_{m,n} = \frac{1}{NM}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} F(i,j)\,W_n\left(\frac{i}{N}\right)W_m\left(\frac{j}{M}\right). \tag{13}$$

Сравнивая (13) и (10), получим: $R_{m,n} = c_{n,m}$. Теорема доказана.

В теореме показано то, что при переходе от одномерного спектра к двумерному путём расположения по M элементов в каждой строке можно получить транспонированный исходный спектр. Для сокращения объёма вычислений разработаны специальные алгоритмы, учитывающие те или иные особенности СБФ. Из совокупности специализированных алгоритмов анализа спектра наибольшей вычислительной эффективностью обладают итерационные вычислительные процедуры, называемые быстрыми преобразованиями [5]. Например, наибольшее применение получили быстрые преобразования в экспоненциальном комплексном базисе (называемые обычно БПФ — быстрые преобразования Фурье) и в базисе Уолша (БПУ). Программная реализация переходов от одномерного спектра к двумерному путём расположения по M элементов в каждой строке, а также вычисления коэффициентов Фурье в базисе Уолша нами произведены с помощью интегрированной среды Fortran Power Station 4.0 на платформе MS Windows'XP. В алгоритмах используется граф типа Кули-Тьюки, где процесс итераций осуществляется за N $\log_2$N операций сложения и вычитания. Можно ещё добавить, что алгоритм быстрого преобразования Уолша был разработан Грином [6], а двумерное быстрое преобразование Уолша было использовано Прэтом для сжатия объёма информации об изображениях.

Таким образом, сигналы, используемые в радиотехнике, электронике и автоматике для хранения, обработки или передачи информации, могут быть представлены в виде сумм ортогональных составляющих [7]. Воспроизведение значений сигналов может быть осуществлено специальными генераторами базисных функций, выполняемыми либо в виде специализированных устройств (аппаратная реализация), либо в форме программ на языке используемой ЭВМ (программная реализация). В нашем случае в качестве базиса используются функции Уолша. Анализ точности восстановления отдельных элементов одномерных фрагментов изображений показывает, что если число первой половины коэффициентов трансформанты равно целой степени числа двойки, то в восстановленном фрагменте усреднённым оказывается такое же число элементов. Аналогично, при восстановлении исходного фрагмента сигнала изображения с помощью первой половины коэффициентов преобразований Уолша усреднёнными оказываются по два соседних элемента исходного фрагмента.

Список литературы

1. *Игнатов В.А.* Теория информации и передачи сигналов. — М.: Радио и связь, 1991. — 257 с.
2. *Смирнов Ю.М.* и др. Проектирование специализированных информационно-вычислительных систем. — М.: Высш. шк., 1984. — 359 с.
3. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. — М.: Наука, 1987. — 343 с.
4. *Жуков Д.М.* Эквивалентность одномерного и двумерного преобразования Крестенсона-Леви // Методы цифровой обработки изображений. — М.: МИЭТ, 1982. — С. 65–70.
5. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. — М.: Мир. — 1989. — 341 с.
6. *Ахмед Н., Рао К.Р.* Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. — М.: Связь. — 1980. — 248 с.
7. *Уайндер С.* Справочник по технологиям и средствам связи: Пер. с англ. — М.: Мир, 2000. — 430 с.