УДК 517.956

Н.Т.Орумбаева, Г.Сабитбекова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: Orumbayevan@mail.ru)

О разрешимости периодической краевой задачи для системы квазилинейных гиперболических уравнений со смешанной производной

В статье рассмотрена периодическая краевая задача для системы квазилинейных гиперболических уравнений со смешанной производной. Предложен конструктивный алгоритм нахождения решения периодической краевой задачи для системы квазилинейных гиперболических уравнений. Установлены достаточные условия сходимости алгоритма и однозначной разрешимости исследуемой задачи.

Ключевые слова: гиперболические уравнения, неравенство Беллмана-Гронуолла, метод параметризации, смешанная производная, однопараметрическое семейство, задача Коши.

На $\overline{\Omega}=[0,\omega]\times[0,T]$ рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+f(x,t,u),\quad (x,t)\in\Omega; \tag{1}$$

$$u(0,t)=0,\quad t\in[0,T]; \tag{2}$$

$$u(x,0)=u(x,T),\quad x\in[0,\omega], \tag{3}$$

где ($n\times n$) — матрица $A(x,t)$ непрерывна на $\overline{\Omega}$, $f:\overline{\Omega}\times R^n\to R^n$ непрерывна $\|u(x,t)\|=\max\limits_{i=\overline{1,n}}|u_i(x,t)|$, $\|A(x,t)\|=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}(x,t)|$.

Функция $u(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$, имеющая частные производные $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\in C(\overline{\Omega},R^n)$, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t}\in C(\Omega,R^n)$, называется решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(x,t)\in\overline{\Omega}$ и краевым условиям (2), (3).

Краевые задачи для систем гиперболических уравнений различными методами были исследованы многими авторами [1–5]. В [6] было предложено двухпараметрическое семейство алгоритмов и установлены достаточные условия сходимости данного алгоритма и однозначной разрешимости линейной периодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений со смешанной производной. Введем новую неизвестную функцию $v(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, и задачу (1)–(3) запишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t}=A(x,t)v+f(x,t,u),\quad (x,t)\in\Omega; \tag{4}$$

$$v(x,0)=v(x,T),\quad x\in[0,\omega]; \tag{5}$$

$$u(x,t)=\int\limits_0^x v(\xi,t)d\xi,\quad t\in[0,T]. \tag{6}$$

Здесь задача нахождения решения периодической краевой задачи для системы квазилинейных гиперболических уравнений (1)–(3) сведена к семейству периодических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (4), (5) и функциональному соотношению (6). Задачи (1)–(3) и (4)–(6) эквивалентны в том смысле, что если функция $u^*(x,t)$ является решением задачи (1)–(3), то пара $\left(u^*(x,t),v^*(x,t)=\frac{\partial u^*(x,t)}{\partial x}\right)$ будет решением задачи (4)–(6) и, наоборот, если пара $(\hat{u}(x,t),\hat{v}(x,t),)$ — решение задачи (4)–(6), то $\hat{u}(x,t)$ — решение задачи (1)–(3).

Для решения задачи (4)–(6) применяется метод параметризации.

По шагу $h>0: Nh=T$ произведем разбиение $[0,T)=\bigcup_{r=1}^{N}[(r-1)h,rh), N=1,2,\ldots$. При этом область Ω разбивается на N частей. Через $v_r(x,t),u_r(x,t)$ обозначим соответственно сужение функции $v(x,t),u(x,t)$ на $\Omega_r=[0,\omega]\times[(r-1)h,rh), r=\overline{1,N}.$ Тогда задача (4)–(6) будет эквивалентна краевой задаче

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}=A(x,t)v_r+f(x,t,u_r), \quad (x,t)\in\Omega_r; \tag{7}$$

$$v_1(x,0)-\lim_{t\to T-0}v_N(x,t)=0,\ x\in[0,\omega]; \tag{8}$$

$$\lim_{t\to sh-0}v_s(x,t)=v_{s+1}(x,sh),\ s=\overline{1,N-1}; \tag{9}$$

$$u_r(x,t)=\int_0^x v_r(\xi,t)d\xi,\ (x,t)\in\Omega_r,\ r=\overline{1,N}, \tag{10}$$

где (9) — условие склеивания функций $v(x,t)$ во внутренних линиях разбиения. Через $\lambda_r(x)$ обозначим значение функции $v_r(x,t)$ при $t=(r-1)h$, т.е. $\lambda_r(x)=v_r(x,(r-1)h)$, и сделаем замену $\tilde{v}_r(x,t)=v_r(x,t)-\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,N}$. Получим эквивалентную краевую задачу с неизвестными функциями $\lambda_r(x)$:

$$\frac{\partial\tilde{v}_r}{\partial t}=A(x,t)\tilde{v}_r+f(x,t,u_r), \quad (x,t)\in\Omega_r; \tag{11}$$

$$\tilde{v}_r(x,(r-1)h)=0,\ x\in[0,\omega],\ r=\overline{1,N}; \tag{12}$$

$$\lambda_1(x)-\lambda_N(x)-\lim_{t\to T-0}\tilde{v}_N(x,t)=0,\ x\in[0,\omega]; \tag{13}$$

$$\lambda_s(x)+\lim_{t\to sh-0}\tilde{v}_s(x,t)-\lambda_{s+1}(x)=0,\ x\in[0,\omega],\ s=\overline{1,N-1}; \tag{14}$$

$$u_r(x,t)=\int_0^x\tilde{v}_r(\xi,t)d\xi+\int_0^x\lambda_r(\xi)d\xi,\ (x,t)\in\Omega_r,\ r=\overline{1,N}. \tag{15}$$

Задачи (7)–(10) и (11)–(15) эквивалентны в том смысле, что если система пар $\{v_r(x,t),u_r(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, является решением задачи (7)–(10), то система троек $\{\lambda_r(x)=v_r(x,(r-1)h),\tilde{v}_r(x,t)=v_r(x,t)-v_r(x,(r-1)h),u_r(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, будет решением задачи (11)–(15) и, наоборот, если $\{\lambda_r(x),\tilde{v}_r(x,t),u_r(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, — решение задачи (11)–(15), то система $\{\lambda_r(x)+\tilde{v}_r(x,t),u_r(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, будет решением задачи (7)–(10).

Задачи (11), (12) при фиксированных $\lambda_r(x),u_r(x,t)$ являются однопараметрическими семействами задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, где $x\in[0,\omega]$ и эквивалентна нелинейному интегральному уравнению

$$\tilde{v}_r(x,t)=\int_{(r-1)h}^{t}A(x,\tau)\tilde{v}_r(x,\tau)d\tau+\int_{(r-1)h}^{t}A(x,\tau)d\tau\cdot\lambda_r(x)+\int_{(r-1)h}^{t}f(x,\tau,u_r(x,\tau))d\tau. \tag{16}$$

Вместо $\tilde{v}_r(x,t)$ подставим соответствующую правую часть (16) и, повторив этот процесс $\nu(\nu=1,2,\ldots)$ раз, получим

$$\tilde{v}_r(x,t)=D_{\nu r}(x,t)\lambda_r(x)+F_{\nu r}(x,t,u_r)+G_{\nu r}(x,t,\tilde{v}_r),\ r=\overline{1,N}, \tag{17}$$

где $D_{\nu r}(x,t)=\sum_{j=0}^{\nu-1}\int_{(r-1)h}^{t}A(x,\tau_1)d\tau_1+\ldots+\int_{(r-1)h}^{\tau_j}A(x,\tau_{j+1})d\tau_{j+1}\ldots d\tau_1;$

$$F_{\nu r}(x,t,w_r,u_r)=\int_{(r-1)h}^{t}f(x,\tau_1,u_r(x,\tau_1))d\tau_1+$$

$$+\sum_{j=1}^{\nu-1}\int_{(r-1)h}^{t}A(x,\tau_1)\ldots\int_{(r-1)h}^{\tau_{j-1}}A(x,\tau_j)\int_{(r-1)h}^{\tau_j}f(x,\tau_{j+1},u_r(x,\tau_{j+1}))d\tau_{j+1}d\tau_j\ldots d\tau_1;$$

$$G_{vr}\left(x,t,\tilde{v}_r\right)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}A\left(x,\tau_1\right)...\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{v-2}}A\left(x,\tau_{v-1}\right)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{v-1}}A\left(x,\tau_v\right)\tilde{v}_r\left(x,\tau_v\right)d\tau_v d\tau_{v-1}...d\tau_1,\tau_0=t,r=\overline{1,N}.$$

Переходя к пределу при $t\to rh-0$, в (17) находим $\lim\limits_{t\to rh-0}=\tilde{v}_r(x,t),\ r=\overline{1,N},\ x\in[0,\omega]$, подставляя их в (13), (14), для неизвестных функций $\lambda_r\left(x\right),r=\overline{1,N}$, получим систему функциональных уравнений:

$$Q_\nu(x,h)\lambda(x)=-F_\nu(x,h,u)-G_\nu(x,h,\tilde{v});\tag{18}$$

где $Q_\nu(h,x)=\begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 & -\left[I+D_{\nu N}\left(x,Nh\right)\right] \\ I+D_{\nu 1}\left(x,h\right) & -I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I+D_{\nu 2}\left(x,2h\right) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I+D_{\nu,N-1}\left(x,(N-1)h\right) & -I \end{bmatrix}$;

$$F_\nu\left(x,h,u\right)=\left(-F_{\nu N}\left(x,Nh,u_N\right),F_{\nu 1}\left(x,h,u_1\right),...,F_{\nu,N-1}\left(x,\left(N-1\right)h,u_{N-1}\right)\right);$$

$$G_\nu\left(x,h,\tilde{v}\right)=\left(-G_{\nu N}\left(x,Nh,\tilde{v}_N\right),G_{\nu 1}\left(x,h,\tilde{v}_1\right),...,G_{\nu,N-1}\left(x,\left(N-1\right)h,\tilde{v}_{N-1}\right)\right),$$

I — единичная матрица размерности *n*. Для нахождения системы из трех функций $\left\{\lambda_r\left(x\right),\tilde{v}_r\left(x,t\right),u_r\left(x,t\right)\right\},r=\overline{1,N}$, имеем замкнутую систему, состоящую из уравнений (18), (17) и (15).

Предполагая обратимость матрицы $Q_\nu\left(x,h\right)$ при всех $x\in\left[0,\omega\right]$, из уравнения (18), где $\tilde{v}_r\left(x,t\right)=0,\ u_r\left(x,t\right)=0$, находим $\lambda^{(0)}\left(x\right)=\left(\lambda_1^{(0)}\left(x\right),\lambda_2^{(0)}\left(x\right),...,\lambda_N^{(0)}\left(x\right)\right)'$:

$$\lambda^{(0)}\left(x\right)=-\left[Q_\nu\left(x,h\right)\right]^{-1}\left\{F_\nu\left(x,h,0\right)+G_\nu\left(x,h,0\right)\right\}.$$

Используя уравнение (17), при $\lambda_r\left(x\right)=\lambda_r^{(0)}\left(x\right)$ найдем функции $\left\{\tilde{v}_r^{(0)}\left(x,t\right)\right\},r=\overline{1,N}$, т.е.

$$\tilde{v}_r^{(0)}\left(x,t\right)=D_{\nu r}\left(x,t\right)\lambda_r^{(0)}\left(x\right)+F_{\nu r}\left(x,t,0\right)+G_{\nu r}\left(x,t,0\right).$$

Функции $u_r^{(0)}\left(x,t\right),r=\overline{1,N}$, определяются из соотношений

$$u_r^{(0)}\left(x,t\right)=\int\limits_0^x\tilde{v}_r^{(0)}\left(\xi,t\right)d\xi+\int\limits_0^x\lambda_r^{(0)}\left(\xi\right)d\xi,\qquad \left(x,t\right)\in\Omega_r.$$

За начальное приближение задачи (11)–(15) возьмем систему $\left(\lambda_r^{(0)}\left(x\right),\tilde{v}_r^{(0)}\left(x,t\right),u_r^{(0)}\left(x,t\right)\right)$, $r=\overline{1,N}$, и последовательные приближения строим по следующему алгоритму:

Шаг 1. А) Предполагая, что $u_r(x,t)=u_r^{(0)}(x,t),\ r=\overline{1,N}$, первые приближения по $\lambda_r(x),\tilde{v}_r(x,t)$ находим, решая задачу (11)–(14). Взяв $\lambda^{(1,0)}(x)=\lambda^{(0)}(x)$, $\tilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)=\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)$, систему пар $\left\{\lambda_r^{(1)}(x),\tilde{v}_r^{(1)}(x,t)\right\}$, $r=\overline{1,N}$, найдем как предел последовательности $\lambda_r^{(1,m)}(x),\tilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)$, определяемый следующим способом:

Шаг 1.1. Предполагая обратимость матрицы $Q_\nu\left(x,h\right)$ при всех $x\in\left[0,\omega\right]$, из уравнения (18), где $\tilde{v}_r\left(x,t\right)=\tilde{v}_r^{(1,0)}\left(x,t\right)$, находим $\lambda^{(1,1)}\left(x\right)=\left(\lambda_1^{(1,1)}\left(x\right),\lambda_2^{(1,1)}\left(x\right),...,\lambda_N^{(1,1)}\left(x\right)\right)'$:

$$\lambda^{(1,1)}\left(x\right)=-\left[Q_\nu\left(x,h\right)\right]^{-1}\left\{F_\nu\left(x,h,u^{(0)}\right)+G_\nu\left(x,h,\tilde{v}^{(1,0)}\right)\right\}.$$

Подставив найденные $\lambda_r^{(1,1)}\left(x\right),r=\overline{1,N}$ в (17), находим

$$\tilde{v}_r^{(1,1)}\left(x,t\right)=D_{\nu r}\left(x,t\right)\lambda_r^{(1,1)}\left(x\right)+F_{\nu r}\left(x,t,u^{(0)}\right)+G_{\nu r}\left(x,t,\tilde{v}^{(1,0)}\right).$$

Шаг 1.2. Из уравнения (18), где $\tilde{v}_r\left(x,t\right)=\tilde{v}_r^{(1,1)}\left(x,t\right)$, определяем

$$\lambda^{(1,2)}\left(x\right)=-\left[Q_\nu\left(x,h\right)\right]^{-1}\left\{F_\nu\left(x,h,u^{(0)}\right)+G_\nu\left(x,h,\tilde{v}^{(1,1)}\right)\right\}.$$

Вновь, используя выражение (17), найдем функции $\left\{\tilde{v}_r^{(1,2)}(x,t)\right\}, r=\overline{1,N}$:

$$\tilde{v}_r^{(1,2)}(x,t)=D_{vr}(x,t)\lambda_r^{(1,2)}(x)+F_{vr}\left(x,t,u^{(0)}\right)+G_{vr}\left(x,t,\tilde{v}^{(1,1)}\right).$$

На $(1,m)$-ом шаге получаем систему пар $\left\{\lambda_r^{(1,m)}(x),\tilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)\right\}, r=\overline{1,N}$. Предположим, что решение задачи (11)–(14) — последовательность систем пар $\left\{\lambda_r^{(1,m)}(x),\tilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)\right\}$, определена при $m\to\infty$, сходится к непрерывным, соответственно, на $x\in[0,\omega],(x,t)\in\Omega_r$ функциям $\lambda_r^{(1)}(x),\tilde{v}_r^{(1)}(x,t), r=\overline{1,N}$.

В) Функции $u_r^{(1)}(x,t), r=\overline{1,N}$, определяются из соотношений:

$$u_r^{(1)}(x,t)=\int_0^x\tilde{v}_r^{(1)}(\xi,t)d\xi+\int_0^x\lambda_r^{(1)}(\xi)d\xi,\ (x,t)\in\Omega_r.$$

Шаг 2. А) Предполагая, что $u_r(x,t)=u_r^{(1)}(x,t), r=\overline{1,N}$, вторые приближения по $\lambda_r(x),\tilde{v}_r(x,t)$ находим, решая задачу (11)–(14). Взяв $\lambda^{(2,0)}(x)=\lambda_r^{(1)}(x),\tilde{v}_r^{(2,0)}(x,t)=\tilde{v}_r^{(1)}(x,t)$ систему пар $\left\{\lambda_r^{(2)}(x),\tilde{v}_r^{(2)}(x,t)\right\}, r=\overline{1,N}$, найдем как предел последовательности $\lambda_r^{(2,m)}(x),\tilde{v}_r^{(2,m)}(x,t)$, определяемый следующим способом:

Шаг 2.1. Предполагая обратимость матрицы $Q_v(x,h)$ при всех $x\in[0,\omega]$, из уравнения (18), где $\tilde{v}_r(x,t)=\tilde{v}_r^{(2,0)}(x,t)$, находим $\lambda^{(2,1)}(x)=\left(\lambda_1^{(2,1)}(x),\lambda_2^{(2,1)}(x),...,\lambda_N^{(2,1)}(x)\right)'$:

$$\lambda^{(2,1)}(x)=-\left[Q_v(x,h)\right]^{-1}\left\{F_v\left(x,h,u^{(1)}\right)+G_v\left(x,h,\tilde{v}^{(2,0)}\right)\right\}.$$

Подставив найденные $\lambda_r^{(2,1)}(x), r=\overline{1,N}$, в (17), находим

$$\tilde{v}_r^{(2,1)}(x,t)=D_{vr}(x,t)\lambda_r^{(2,1)}(x)+F_{vr}\left(x,t,u^{(1)}\right)+G_{vr}\left(x,t,\tilde{v}^{(2,0)}\right).$$

Шаг 2.2. Из уравнения (18), где $\tilde{v}_r(x,t)=\tilde{v}_r^{(2,1)}(x,t)$, определяем

$$\lambda^{(2,2)}(x)=-\left[Q_v(x,h)\right]^{-1}\left\{F_v\left(x,h,u^{(1)}\right)+G_v\left(x,h,\tilde{v}^{(2,1)}\right)\right\}.$$

Вновь, используя выражение (17), найдем функции $\left\{\tilde{v}_r^{(2,2)}(x,t)\right\}, r=\overline{1,N}$:

$$\tilde{v}_r^{(2,2)}(x,t)=D_{vr}(x,t)\lambda_r^{(2,2)}(x)+F_{vr}\left(x,t,u^{(1)}\right)+G_{vr}\left(x,t,\tilde{v}^{(2,1)}\right).$$

На $(2,m)$-ом шаге получаем систему пар $\left\{\lambda_r^{(2,m)}(x),\tilde{v}_r^{(2,m)}(x,t)\right\}, r=\overline{1,N}$. Предположим, что решение задачи (11)–(14) — последовательность систем пар $\left\{\lambda_r^{(1,m)}(x),\tilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)\right\}$, определена при $m\to\infty$, сходится к непрерывным, соответственно, на $x\in[0,\omega],(x,t)\in\Omega_r$ функциям $\lambda_r^{(2)}(x),\tilde{v}_r^{(2)}(x,t), r=\overline{1,N}$.

В) Функции $u_r^{(2)}(x,t), r=\overline{1,N}$, определяются из соотношений:

$$u_r^{(2)}(x,t)=\int_0^x\tilde{v}_r^{(2)}(\xi,t)d\xi+\int_0^x\lambda_r^{(2)}(\xi)d\xi,\ (x,t)\in\Omega_r.$$

Через $\tilde{C}(\Omega_r,R^n)$ обозначим множество непрерывных и ограниченных на $\Omega_r=[0,\omega]\times\left[(r-1)h,rh\right)$ функций $u_r:\Omega_r\to R^n$ с нормой $\|u_r\|_1=\max\limits_{r=\overline{1,N}}\sup\limits_{t\in\left[(r-1)h,rh\right)}\|u_r(x,t)\|$.

Введем множества $G_1(0,\rho(x))=\left\{(x,t,u):(x,t)\in\overline{\Omega},\max\limits_{t\in[0,T]}\|u(x,t)\|<\rho(x)\right\}$;

$$S_1(0,\rho(x))=\left\{\left(u_1(x,t),u_2(x,t),...,u_{N1}(x,t)\right)',u_r(x,t)\in\tilde{C}(\Omega_r,R^n),\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[0,T)}\|u_r(x,t)\|<\rho(x),\ r=\overline{1,N}\right\}.$$

Условие А. Функция $f(x,t,u)$ имеет непрерывную частную производную $f'_u(x,t,u)$ в $G_1(0,\rho(x))$ и $\|f'_u(x,t,u)\| \le L(x)$, где $L(x)$ — непрерывная на $[0,\omega]$ функция.

Условия следующего утверждения обеспечивают равномерную относительно $(x,t)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,N}$, сходимость предложенного алгоритма к решению краевой задачи с неизвестными функциями (11)–(15).

Теорема. Пусть имеет место условие А и при некоторых $h>0: Nh=T, N=1,2,\ldots$, $\nu, \nu=1,2,\ldots$, $(nN\times nN)$ — матрица $Q_\nu(h,x)$ обратима при всех $x\in[0,\omega]$. Тогда при выполнении неравенств:

1) $\left\|\left[Q_\nu(h,x)\right]^{-1}\right\| \le \gamma_\nu(h,x)$;

2) $q_\nu(h,x)=\dfrac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\left[1+\gamma_\nu(x,h)\sum\limits_{j=1}^{\nu}\dfrac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\right]\le\mu<1$;

3) $\int\limits_0^x\left[a(\xi)\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{1}{j!}\left(\int\limits_0^\xi a(\xi_1)d\xi_1\right)^j\int\limits_0^\xi m(\xi_1)\max\limits_{t\in[0,T]}\|f(\xi_1,t,0)\|d\xi_1+\left(m(\xi)+b(\xi)+c(\xi)\right)\max\limits_{t\in[0,T]}\|f(\xi,t,0)\|\right]d\xi<\rho(x)$,

где $\alpha(x)=\max\limits_{t\in[0,T]}\|A(x,t)\|$; μ — $const$; $a(x)=\left(1+\gamma_\nu(x,h)\dfrac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\right)\dfrac{b(x)}{1-q_\nu(x,h)}+c(x)$;

$$b(x)=\left[1+\gamma_\nu(x,h)\sum_{j=1}^{\nu}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\right]h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!},\ c(x)=\gamma_\nu(x,h)h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!};$$

$$m(x)=\max\left\{1,\frac{1+\gamma_\nu(x,h)\dfrac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}}{1-q_\nu(x,h)}\right\}\left[b(x)\gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}+b(x)q_\nu(x,h)+[b(x)+c(x)]L\int_0^x[b(\xi)+c(\xi)]d\xi\right],$$

задача (1)–(3) в $S_1(0,\rho(x))$ имеет единственное решение.

Доказательство. При предположениях относительно данных задачи имеют место неравенства

$$\|F_\nu(x,h,u)\|\le h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|f(x,t,u_r(x,t))\|;$$

$$\|G_\nu(x,h,\tilde v)\|\le\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\tilde v_r(x,t)\|;\ \max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|D_{\nu r}(x,t)\|\le\sum_{j=1}^{\nu}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}.$$

Из нулевого шага алгоритма вытекают следующие оценки:

$$\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r^{(0)}(x)\|\le\gamma_\nu(x,h)h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{t\in[0,T]}\|f(x,t,0)\|\le c(x)\max_{t\in[0,T]}\|f(x,t,0)\|;$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\tilde v_r^{(0)}(x,t)\|\le\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|D_{\nu r}(x,t)\|\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r^{(0)}(x)\|+$$

$$+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|F_{\nu r}(x,t,0)\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|G_{\nu r}(x,t,0)\|\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{\nu}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r^{(0)}(x)\|+h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{t\in[0,T]}\|f(x,t,0)\|\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{\nu}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\gamma_\nu(x,h)h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{t\in[0,T]}\|f(x,t,0)\|+h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{t\in[0,T]}\|f(x,t,0)\|\le$$

$$\leq\left[1+\gamma_{\nu}(x,h)\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\left(\alpha(x)h\right)^{j}}{j!}\right]h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{\left(\alpha(x)h\right)^{j}}{j!}\max_{t\in[0,T]}\left\|f\left(x,t,0\right)\right\|\leq b(x)\max_{t\in[0,T]}\left\|f\left(x,t,0\right)\right\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_{r}^{(0)}\left(x,t\right)\right\|\leq\int_{0}^{x}\gamma_{\nu}\left(\xi,h\right)h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{\left(\alpha(\xi)h\right)^{j}}{j!}\max_{t\in[0,T]}\left\|f\left(\xi,t,0\right)\right\|d\xi+$$

$$+\int_{0}^{x}\left[1+\gamma_{\nu}(\xi,h)\sum_{j=0}^{\nu}\frac{\left(\alpha(\xi)h\right)^{j}}{j!}\right]h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{\left(\alpha(\xi)h\right)^{j}}{j!}\max_{t\in[0,T]}\left\|f\left(\xi,t,0\right)\right\|d\xi\leq$$

$$\leq\int_{0}^{x}\left[c(\xi)+b(\xi)\right]\max_{t\in[0,T]}\left\|f\left(\xi,t,0\right)\right\|d\xi\leq\rho(x).$$

Учитывая условия A, установим неравенства:

$$\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_{r}^{(1,1)}\left(x\right)-\lambda_{r}^{(1,0)}\left(x\right)\right\|\leq$$

$$\leq\gamma_{\nu}\left(x,h\right)h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{\left(\alpha(x)h\right)^{j}}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|f\left(x,t,u_{r}^{(0)}\left(x,t\right)\right)-f\left(x,t,0\right)\right\|+\gamma_{\nu}\left(x,h\right)\frac{\left(\alpha(x)h\right)^{\nu}}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_{r}^{(0)}\left(x,t\right)\right\|\leq$$

$$\leq c(x)L\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_{r}^{(0)}\left(x,t\right)\right\|+\gamma_{\nu}\left(x,h\right)\frac{\left(\alpha(x)h\right)^{\nu}}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_{r}^{(0)}\left(x,t\right)\right\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_{r}^{(1,1)}\left(x,t\right)-\tilde{v}_{r}^{(1,0)}\left(x,t\right)\right\|\leq\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\left(\alpha(x)h\right)^{j}}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_{r}^{(1,1)}\left(x\right)-\lambda_{r}^{(1,0)}\left(x\right)\right\|+$$

$$+h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{\left(\alpha(x)h\right)^{j}}{j!}L\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_{r}^{(0)}\left(x,t\right)\right\|+\frac{\left(\alpha(x)h\right)^{\nu}}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_{r}^{(0)}\left(x,t\right)\right\|\leq$$

$$\leq\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\left(\alpha(x)h\right)^{j}}{j!}\gamma_{\nu}\left(x,h\right)h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{\left(\alpha(x)h\right)^{j}}{j!}L\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_{r}^{(0)}\left(x,t\right)\right\|+$$

$$+\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\left(\alpha(x)h\right)^{j}}{j!}\gamma_{\nu}\left(x,h\right)\frac{\left(\alpha(x)h\right)^{\nu}}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_{r}^{(0)}\left(x,t\right)\right\|+$$

$$+h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{\left(\alpha(x)h\right)^{j}}{j!}L\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_{r}^{(0)}\left(x,t\right)\right\|+\frac{\left(\alpha(x)h\right)^{\nu}}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_{r}^{(0)}\left(x,t\right)\right\|\leq$$

$$\leq\left[1+\gamma_{\nu}\left(x,h\right)\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\left(\alpha(x)h\right)^{j}}{j!}\right]h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{\left(\alpha(x)h\right)^{j}}{j!}L\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_{r}^{(0)}\left(x,t\right)\right\|+$$

$$+\left[1+\gamma_{\nu}\left(x,h\right)\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\left(\alpha(x)h\right)^{j}}{j!}\right]\frac{\left(\alpha(x)h\right)^{\nu}}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_{r}^{(0)}\left(x,t\right)\right\|\leq$$

$$\leq b(x)L\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_{r}^{(0)}\left(x,t\right)\right\|+q_{\nu}\left(x,h\right)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_{r}^{(0)}\left(x,t\right)\right\|.$$

Справедливо неравенство

$$\Delta^{(1,1)}\left(x\right)=\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_{r}^{(1,1)}\left(x,t\right)-\tilde{v}_{r}^{(1,0)}\left(x,t\right)\right\|+\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_{r}^{(1,1)}\left(x\right)-\lambda_{r}^{(1,0)}\left(x\right)\right\|\leq$$

$$\leq b(x)L\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_{r}^{(0)}\left(x,t\right)\right\|+q_{\nu}\left(x,h\right)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_{r}^{(0)}\left(x,t\right)\right\|+$$

$$+c(x)L\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_{r}^{(0)}\left(x,t\right)\right\|+\gamma_{\nu}\left(x,h\right)\frac{\left(\alpha(x)h\right)^{\nu}}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_{r}^{(0)}\left(x,t\right)\right\|\leq$$

$$\le \left[b(x)+c(x)\right] L \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\|u_r^{(0)}(x,t)\right\| +$$

$$+\left[\gamma_\nu(x,h)\frac{\left(\alpha(x)h\right)^\nu}{\nu!}+q_\nu(x,h)\right]\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\|\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\|.$$

Таким образом,

$$\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(1,m+1)}(x)-\lambda_r^{(1,m)}(x)\right\| \le \gamma_\nu(x,h)\frac{\left(\alpha(x)h\right)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(1,m-1)}(x,t)\right\|; \tag{19}$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(1,m+1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)\right\| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\nu}\frac{\left(\alpha(x)h\right)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(1,m+1)}(x)-\lambda_r^{(1,m)}(x)\right\| + \frac{\left(\alpha(x)h\right)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(1,m-1)}(x,t)\right\| \le$$

$$\le q_\nu(x,h)\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(1,m-1)}(x,t)\right\|. \tag{20}$$

В силу неравенства $q_\nu(x,h)<1$ следует равномерная сходимость $v_r^{(1,m+1)}(x,t), (x,t)\in\Omega_r$ к $v_r^{(1)}(x,t)$ и сходимость последовательности систем функций $\lambda_r^{(1,m+1)}(x)$ к непрерывным на $(x)\in[0,\omega]$ функциям $\lambda_r^{(1)}(x)$ при всех $r=\overline{1,N}$:

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(1,m+1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)\right\| \le \sum_{j=0}^{m}\left[q_\nu(x,h)\right]^j \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(1,1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)\right\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(1,m+1)}(x)-\lambda_r^{(1,0)}(x)\right\| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{m}\left[q_\nu(x,h)\right]^j \gamma_\nu(x,h)\frac{\left(\alpha(x)h\right)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(1,1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)\right\| + \max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(1,1)}(x)-\lambda_r^{(1,0)}(x)\right\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(1,m+1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)\right\| + \max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(1,m+1)}(x)-\lambda_r^{(1,0)}(x)\right\| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{m}\left[q_\nu(x,h)\right]^j \left\{1+\gamma_\nu(x,h)\frac{\left(\alpha(x)h\right)^\nu}{\nu!}\right\}\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(1,1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)\right\| + \max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(1,1)}(x)-\lambda_r^{(1,0)}(x)\right\|.$$

Переходя к пределу при $m\to\infty$, получим оценки

$$\Delta^{(1)}(x)=\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\| + \max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(1)}(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\right\| \le$$

$$\le \frac{1+\gamma_\nu(x,h)\frac{\left(\alpha(x)h\right)^\nu}{\nu!}}{1-q_\nu(x,h)}\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(1,1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)\right\| + \max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(1,1)}(x)-\lambda_r^{(1,0)}(x)\right\| \le$$

$$\le \frac{1+\gamma_\nu(x,h)\frac{\left(\alpha(x)h\right)^\nu}{\nu!}}{1-q_\nu(x,h)}\, b(x)L\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^{(0)}(x,t)\right\| +$$

$$+\frac{1+\gamma_\nu(x,h)\frac{\left(\alpha(x)h\right)^\nu}{\nu!}}{1-q_\nu(x,h)}\, q_\nu(x,h)\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\| +$$

$$+c(x)L\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^{(0)}(x,t)\right\| + \gamma_\nu(x,h)\frac{\left(\alpha(x)h\right)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\| \le$$

$$\leq \max\left\{1, \frac{1+\gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}}{1-q_\nu(x,h)}\right\}\left[b(x)+c(x)\right]L\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^{(0)}(x,t)\right\|+$$

$$+\max\left\{1, \frac{1+\gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}}{1-q_\nu(x,h)}\right\}\left[\gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}+q_\nu(x,h)\right]\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\|\leq$$

$$\leq \max\left\{1, \frac{1+\gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}}{1-q_\nu(x,h)}\right\}\left[b(x)+c(x)\right]L\int_0^x\left[b(\xi)+c(\xi)\right]\max_{t\in[0,T]}\left\|f(\xi,t,0)\right\|d\xi+$$

$$+\max\left\{1, \frac{1+\gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}}{1-q_\nu(x,h)}\right\}\left[\gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}+q_\nu(x,h)\right]b(x)\max_{t\in[0,T]}\left\|f(x,t,0)\right\|\leq$$

$$\leq \max\left\{1, \frac{1+\gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}}{1-q_\nu(x,h)}\right\}\left[b(x)\gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}+b(x)q_\nu(x,h)+\left[b(x)+c(x)\right]L\int_0^x\left[b(\xi)+c(\xi)\right]d\xi\right]\times$$

$$\times\max_{t\in[0,T]}\left\|f(x,t,0)\right\|\leq m(x)\max_{t\in[0,T]}\left\|f(x,t,0)\right\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^{(1)}(x,t)-u_r^{(0)}(x,t)\right\|\leq\int_0^x\Delta^{(1)}(\xi)d\xi\leq\int_0^x m(\xi)\max_{t\in[0,T]}\left\|f(\xi,t,0)\right\|d\xi<\rho(x).$$

Для систем разностей $\lambda_r^{(k+1)}(x)-\lambda_r^{(k)}(x)$, $\tilde{v}_r^{(k+1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(k)}(x,t)$, $u_r^{(k+1)}(x,t)-u_r^{(k)}(x,t)$, $r=\overline{1,N}$, $k=1,2,...$ справедливы оценки:

$$\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(k+1,1)}(x)-\lambda_r^{(k+1,0)}(x)\right\|\leq c(x)L\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^{(k)}(x,t)-u_r^{(k-1)}(x,t)\right\|;$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(k+1,1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(k+1,0)}(x,t)\right\|\leq$$

$$\leq b(x)L\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^{(k)}(x,t)-u_r^{(k-1)}(x,t)\right\|;$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(k+1,m+1)}(x)-\lambda_r^{(k+1,m)}(x)\right\|\leq\gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(k+1,m)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(k+1,m-1)}(x,t)\right\|;$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(k+1,m+1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(k+1,m)}(x,t)\right\|\leq q_\nu(x,h)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(k+1,m)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(k+1,m-1)}(x,t)\right\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(k+1,m+1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(k+1,0)}(x,t)\right\|\leq\sum_{j=0}^m\left[q_\nu(x,h)\right]^j\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(k+1,1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(k+1,0)}(x,t)\right\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\lambda_r^{(k+1,m+1)}(x,t)-\lambda_r^{(k+1,0)}(x,t)\right\|\leq$$

$$\leq\sum_{j=0}^{m-1}\left[q_\nu(x,h)\right]^j\gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(k+1,1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(k+1,0)}(x,t)\right\|+\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(k+1,1)}(x)-\lambda_r^{(k+1,0)}(x)\right\|.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим оценки:

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| \tilde{v}_r^{(k+1)}(x,t) - \tilde{v}_r^{(k)}(x,t) \right\| \le$$

$$\le \frac{1}{1-q_\nu(x,h)} b(x) L \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| u_r^{(k)}(x,t) - u_r^{(k-1)}(x,t) \right\|; \tag{21}$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \left\| \lambda_r^{(k+1)}(x) - \lambda_r^{(k)}(x) \right\| \le$$

$$\le \frac{\gamma_\nu(x,h)}{1-q_\nu(x,h)} \frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!} \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| \tilde{v}_r^{(k+1,1)}(x,t) - \tilde{v}_r^{(k+1,0)}(x,t) \right\| + \max_{r=\overline{1,N}} \left\| \lambda_r^{(k+1,1)}(x) - \lambda_r^{(k+1,0)}(x) \right\| \le$$

$$\le \frac{\gamma_\nu(x,h)}{1-q_\nu(x,h)} \frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!} b(x) L \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| u_r^{(k)}(x,t) - u_r^{(k-1)}(x,t) \right\| +$$

$$+ c(x) L \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| u_r^{(k)}(x,t) - u_r^{(k-1)}(x,t) \right\| \le$$

$$\le \left[\frac{\gamma_\nu(x,h)}{1-q_\nu(x,h)} \frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!} b(x) + c(x) \right] L \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| u_r^{(k)}(x,t) - u_r^{(k-1)}(x,t) \right\|; \tag{22}$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| u_r^{(k+1)}(x,t) - u_r^{(k)}(x,t) \right\| \le \int_0^x \max_{r=\overline{1,N}} \left\| \lambda_r^{(k+1)}(\xi) - \lambda_r^{(k)}(\xi) \right\| d\xi + \int_0^x \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| \tilde{v}_r^{(k+1)}(\xi,t) - \tilde{v}_r^{(k)}(\xi,t) \right\| d\xi.$$

Суммируя, соответственно, левые и правые части неравенств (21), (22), имеем

$$\Delta^{(k+1)}(x) = \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| \tilde{v}_r^{(k+1)}(x,t) - \tilde{v}_r^{(k)}(x,t) \right\| + \max_{r=\overline{1,N}} \left\| \lambda_r^{(k+1)}(x) - \lambda_r^{(k)}(x) \right\| \le$$

$$\le \left[\frac{1}{1-q_\nu(x,h)} b(x) + \frac{\gamma_\nu(x,h)}{1-q_\nu(x,h)} \frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!} b(x) + c(x) \right] L \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| u_r^{(k)}(x,t) - u_r^{(k-1)}(x,t) \right\| \le$$

$$\le \left[\left(1 + \gamma_\nu(x,h) \frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!} \right) \frac{b(x)}{1-q_\nu(x,h)} + c(x) \right] L \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| u_r^{(k)}(x,t) - u_r^{(k-1)}(x,t) \right\| \le$$

$$\le a(x) L \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| u_r^{(k)}(x,t) - u_r^{(k-1)}(x,t) \right\|; \tag{23}$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| u_r^{(k+1)}(x,t) - u_r^{(k)}(x,t) \right\| \le \int_0^x \Delta^{(k+1)}(\xi) d\xi. \tag{24}$$

Для функции $\Delta^{(k+1)}(x)$ на основе (23), (24) установим неравенства

$$\Delta^{(k+1)}(x) \le a(x) \int_0^x \Delta^{(k)}(\xi) d\xi. \tag{25}$$

$$\Delta^{(k)}(x) \le \frac{a(x)}{(k-1)!} \left(\int_0^x a(\xi) d\xi \right)^{k-1} \int_0^x \Delta^{(1)}(\xi) d\xi.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \left\| \lambda_r^{(k+1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\| + \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| \tilde{v}_r^{(k+1)}(x,t) - v_r^{(0)}(x,t) \right\| \le$$

$$\le \max_{r=\overline{1,N}} \left\| \lambda_r^{(k+1)}(x) - \lambda_r^{(k)}(x) \right\| + \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| \tilde{v}_r^{(k+1)}(x,t) - v_r^{(k)}(x,t) \right\| +$$

$$+ \max_{r=\overline{1,N}} \left\| \lambda_r^{(k)}(x) - \lambda_r^{(k-1)}(x) \right\| + \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| \tilde{v}_r^{(k)}(x,t) - v_r^{(k-1)}(x,t) \right\| +$$

$$+ \ldots + \max_{r=\overline{1,N}} \left\| \lambda_r^{(1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\| + \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| \tilde{v}_r^{(1)}(x,t) - v_r^{(0)}(x,t) \right\| \le$$

$$\leq \Delta^{(k+1)}(x)+\Delta^{(k)}(x)+\ldots+\Delta^{(1)}(x)\leq a(x)\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}\left(\int_0^x a(\xi)d\xi\right)^j\int_0^x\Delta^{(1)}(\xi)d\xi+\Delta^{(1)}(x)\leq$$

$$\leq a(x)\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}\left(\int_0^x a(\xi)d\xi\right)^j\int_0^x\Delta^{(1)}(\xi)d\xi+\Delta^{(1)}(x);$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(k+1)}(x)\right\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(k+1)}(x,t)\right\|\leq$$

$$\leq\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(k+1)}(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\right\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^{(k+1)}(x,t)-v_r^{(0)}(x,t)\right\|+\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(0)}(x)\right\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|v_r^{(0)}(x,t)\right\|\leq$$

$$\leq a(x)\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}\left(\int_0^x a(\xi)d\xi\right)^j\int_0^x m(\xi)\max_{t\in[0,T]}\left\|f(\xi,t,0)\right\|d\xi+m(x)\max_{t\in[0,T]}\left\|f(x,t,0)\right\|+$$

$$+c(x)\max_{t\in[0,T]}\left\|f(x,t,0)\right\|+b(x)\max_{t\in[0,T]}\left\|f(x,t,0)\right\|\leq$$

$$\leq a(x)\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}\left(\int_0^x a(\xi)d\xi\right)^j\int_0^x m(\xi)\max_{t\in[0,T]}\left\|f(\xi,t,0)\right\|d\xi+\left(m(x)+b(x)+c(x)\right)\max_{t\in[0,T]}\left\|f(x,t,0)\right\|;$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^{(k+1)}(x,t)\right\|\leq$$

$$\leq\int_0^x\left[a(\xi)\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}\left(\int_0^\xi a(\xi_1)d\xi_1\right)^j\int_0^\xi m(\xi_1)\max_{t\in[0,T]}\left\|f(\xi_1,t,0)\right\|d\xi_1+\left(m(\xi)+b(\xi)+c(\xi)\right)\max_{t\in[0,T]}\left\|f(\xi,t,0)\right\|\right]d\xi<\rho(x).$$

При $k\to\infty$ имеет место оценка

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|u^*(x,t)\right\|\leq$$

$$\leq\int_0^x\left[a(\xi)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\int_0^\xi a(\xi_1)d\xi_1\right)^j\int_0^\xi m(\xi_1)\max_{t\in[0,T]}\left\|f(\xi_1,t,0)\right\|d\xi_1+\left(m(\xi)+b(\xi)+c(\xi)\right)\max_{t\in[0,T]}\left\|f(\xi,t,0)\right\|\right]d\xi<\rho(x).$$

Таким образом, функция $u^*(x,t)$ является решением задачи (1)–(3).

Докажем единственность. Пусть существует два решения $u^{**}(x,t)$, $u^*(x,t)$ в $S_1(0,\rho)$. В силу эквивалентности задач (1)–(3) и (4)–(6) существуют пары $\left(v^{**}(x,t),u^{**}(x,t)\right),\left(v^*(x,t),u^*(x,t)\right)$, которые являются решениями задачи (4)–(6). Тогда соответствующие им системы $\left(\lambda_r^{**}(x)+\tilde{v}_r^{**}(x,t),u_r^{**}(x,t)\right),\left(\lambda_r^*(x)+\tilde{v}_r^*(x,t),u_r^*(x,t)\right), r=\overline{1,N}$, будут решениями краевой задачи (11)–(15). Аналогично соотношению (25) для разностей $\lambda_r^*(x)-\lambda_r^{**}(x)$, $\tilde{v}_r^*(x,t)-\tilde{v}_r^{**}(x,t)$ при всех $(x,t)\in\Omega_r, r=\overline{1,N}$, получим

$$\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^*(x)-\lambda_r^{**}(x)\right\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^*(x,t)-v_r^{**}(x,t)\right\|\leq$$

$$\leq a(x)\int_0^x\left[\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^*(\xi)-\lambda_r^{**}(\xi)\right\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^*(\xi,t)-v_r^{**}(\xi,t)\right\|\right]d\xi.$$

С помощью неравенства Беллмана-Гроноулла [7] имеем

$$\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^*(x)-\lambda_r^{**}(x)\right\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^*(x,t)-v_r^{**}(x,t)\right\|=0.$$

Откуда вытекает, что $\tilde{v}_r^*(x,t)=\tilde{v}_r^{**}(x,t),\lambda_r^*(x)=\lambda_r^{**}(x), r=\overline{1,N}.$ Из неравенства

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^*(x,t)-u_r^{**}(x,t)\right\|\leq\int_0^x\left(\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\tilde{v}_r^*(\xi,t)-\tilde{v}_r^{**}(\xi,t)\right\|+\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^*(\xi)-\lambda_r^{**}(\xi)\right\|\right)d\xi$$

имеем $u_r^*(x,t)=u_r^{**}(x,t), r=\overline{1,N}$, при всех $(x,t)\in\Omega_r$. Теорема доказана.

References

1 *Cesari L.Tr.* International symposium on nonlinear fluctuations. — T. 1. — Kiev, 1963. — P. 440–457.

2 *Veivoda O. et al.* Partial differential equations: Time-periodic solutions. Alphen aan den Rijn. Sijthoff: Noordhoff. — 1981. — 358 p.

3 *Ptashnik B.I.* The incorrect boundary problems for differential equations with quotient derivatives. — Kiev, 1984.

4 *Kiguradze T.I.* On periodic boundary problems for linear hyperbolic equations // Differential equations. — 1993. — T. 29, 2. — P. 281–297.

5 *Mitropoliskiy Yu.A., Homa G.P., Gromyak M.I.* The asymptotic methods of the study quasiwave equations of the hyperbolic type. — Kiev: Scientific idea, 1991. — 232 p.

6 *Orumbayeva N.T., Sabitbekova G.* On one-valued solvability of the periodic boundary problem for system of the hyperbolic equations // Bulletin of KarSU. Ser. Mathematic. — 2011. — № 4 (64). — P. 67–75.

7 *Trenogin V.A.* The functional analysis. — M., 1980.

Н.Т.Орумбаева, Г.Сабитбекова

Аралас туындылы квазисызықты гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есептің шешімділігі туралы

Мақалада аралас туындылы квазисызықты гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есеп қарастырылады. Квазисызықты гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есептің шешімін табудың конструктивті алгоритмі ұсынылады. Алгоритмнің жинақтылығының және зерттеліп отырған есептің шешімділігінің жеткілікті шарттары тағайындалды.

N.T.Orumbaeva, G.Sabitbekova

On solvability periodical boundary value problem for system of the quasi-linear of hyperbolic equations

The constructional algorithm of finding periodical boundary value problem's solution for system of the quasi-linear of hyperbolic equations is offered. The necessary and sufficient conditions of algorithm's unique solvability of investigating problem are established. The necessary and sufficient conditions of algorithm and one-valued solvability of investigating problem are established.