МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

С.Битимхан[1], М.Битимхан[2]

[1]Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;
[2]Карагандинский государственный технический университет

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Мақалада $f \in L_q(I_s)$ функциясының коэффициенттері монотонды еселі тригонометриялық Фурье қатарының абсолютті қосындылануының ең жақсы «бұрышпен» жуықтаулар терминіндегі қажетті және жеткілікті шарты алынған. Сонымен бірге монотонды функцияның Фурье қатарының абсолютті қосындылануының қажетті және жеткілікті шарты функцияның үзіліссіздік модулі терминінде дәлелденген.

In this work the necessary and sufficient condition of absolute summability multiple trigonometric series of Fourier of function $f \in L_q(I_s)$ with monotonous coefficients in terms of the best approximation by «corner» is received. Also the necessary and sufficient condition absolute summability of Fourier series of monotonous function in terms of the module of a continuity of this function is proved.

Пусть R^s — s-мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, ..., x_s)$ с вещественными координатами; $I_s = \left\{\bar{x} \in R^s : 0 \le x_j \le 2\pi,\ \ j = 1, 2, ..., s\right\}$ — s-мерный куб.

Положим $\gamma_i(nx) = \begin{cases} \cos nx, & i = 1, \\ \sin nx, & i = 2. \end{cases}$.

Рассмотрим кратный тригонометрический ряд

$$\sum_{\bar{n} \ge \bar{1}} B_{\bar{n}}(\bar{x}) = \sum_{n_1=1}^{\infty} ... \sum_{n_s=1}^{\infty} B_{n_1,...,n_s}(x_1, ..., x_s)\,, \tag{1}$$

где $\bar{n} \ge \bar{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_s)$ означает $n_j \ge \alpha_j$ для всех $j = 1, 2, ..., s$;

$$B_{\bar{n}}(\bar{x}) = \sum_{\bar{1} \le \bar{i} \le \bar{2}} a_{\bar{n}}^{(\bar{i})} \cdot \prod_{\nu=1}^{s} \gamma_{i_\nu}(n_\nu x_\nu)\,.$$

Положим $A_n^{(\beta)} = \dfrac{(\beta+1)(\beta+2)...(\beta+n)}{n!}$, $\beta \in R$, n — натуральное число.

Сумма $\sigma_{\bar{n}}^{(\bar{\beta})}(\bar{x}) = \sum_{\bar{1} \le \bar{k} \le \bar{n}} \prod_{j=1}^{s} A_{n_j-k_j}^{(\beta_j)} \left(A_{n_j}^{(\beta_j)}\right)^{-1} B_{\bar{k}}(\bar{x})$ называется $(C;\bar{\beta}) \equiv (C;\beta_1, ..., \beta_s)$ средним ряда (1).

Для заданного числа $b_{\bar{n}}$ смешанную разность определим следующим образом: $\Delta b_{\bar{n}} = \sum_{\bar{0} \le \bar{\varepsilon} \le \bar{1}} (-1)^{s - \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i} \cdot b_{\bar{n}-\bar{1}+\bar{\varepsilon}}$, где $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_s)$. Ряд (1) назовем $|C;\bar{\beta}|_{\bar{\lambda}}$ суммируемым, $\bar{\lambda} \ge \bar{1}$, в точке $\bar{x} \in I_s$, если

$$\sum_{n_s=1}^{+\infty} n_s^{\lambda_s-1} \left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty} n_{s-1}^{\lambda_{s-1}-1} \dots \left[\sum_{n_1=1}^{+\infty} n_1^{\lambda_1-1} \left| \Delta\sigma_{\bar{n}}^{(\bar{\beta})}(\bar{x}) \right|^{\lambda_1} \right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \dots \right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} < +\infty\,. \tag{2}$$

В случае $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_s=\lambda$ будем писать $|C;\overline{\beta}|_\lambda$ вместо $|C;\overline{\beta}|_{\overline{\lambda}}$.

Пусть $\tau_{\overline{n}}^{(\overline{\beta})}(\overline{x})$ есть $(C;\overline{\beta})$ — среднее последовательности $\left\{\prod_{j=1}^{s} n_j\cdot B_{\overline{n}}(\overline{x})\right\}$, то есть

$$\tau_{\overline{n}}^{(\overline{\beta})}(\overline{x})=\left(\prod_{j=1}^{s}A_{n_j}^{(\beta_j)}\right)^{-1}\cdot\sum_{\overline{1}\le\overline{k}\le\overline{n}}\prod_{j=1}^{s}k_jA_{n_j-k_j}^{(\beta_j-1)}\cdot B_{\overline{k}}(\overline{x}).$$

Верна следующая лемма [1]:

Лемма 1. Пусть $\beta_j>-1,\ j=1,...,s$. Тогда

$$\tau_{\overline{n}}^{(\overline{\beta})}(\overline{x})=\prod_{j=1}^{s}n_j\cdot\Delta\sigma_{\overline{n}}^{(\overline{\beta})}(\overline{x}).$$

Пользуясь этой леммой, можно убедиться, что условие (2) эквивалентно условию

$$\sum_{n_s=1}^{+\infty}\frac{1}{n_s}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty}\frac{1}{n_{s-1}}\cdots\left[\sum_{n_1=1}^{+\infty}\frac{1}{n_1}\left|\tau_{\overline{n}}^{(\overline{\beta})}(\overline{x})\right|^{\lambda_1}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\cdots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}<+\infty.$$

Через $L_q(I_s)$ обозначим пространство всех измеримых, по Лебегу, 2π-периодических по каждой переменной функций $f(\overline{x})$, для которых

$$\|f\|_q=\left(\int_{I_s}|f(\overline{x})|^q\,d\overline{x}\right)^{\frac{1}{q}}<+\infty,\ 1\le q<+\infty.$$

Пусть $Y_{n_1,...,n_s}(f)_q$ — s-мерное наилучшее приближение «углом» (см. [2]) функции $f\in L_q(I_s)$; $\Omega_r(f;t_1,...,t_s)_q$ — смешанный модуль гладкости порядка r (r — натуральное число) функции $f\in L_q(I_s)$; $\omega(f;\delta)_q$ — модуль непрерывности функции $f\in L_q(I_1)$.

В дальнейшем через C будем обозначать положительные постоянные, вообще говоря, различные в разных формулах. Запись $A(\varphi)\succ\prec B(\varphi)$ означает, что существуют положительные постоянные c_1,c_2 такие, что $c_1A(\varphi)\le B(\varphi)\le c_2A(\varphi)$ для всех φ.

Условия абсолютной суммируемости ряда (1) в случае $\lambda=1$, $s=2$, $0<\beta_j<\frac{1}{2}$, $j=1,2$, исследовали И.Е.Жак и М.Ф.Тиман [3], а вопросы $\left|C;\overline{\beta}\right|_\lambda$-суммируемости ряда Фурье функции $f\in L_2(I_s)$ изучили Ю.А.Пономаренко, М.Ф.Тиман [4], эти вопросы также были исследованы И.Салаи [5].

Определение (см. [6]). Если $a_{\overline{n}}\le a_{\overline{k}}$ при $\overline{n}\ge\overline{k}$, то числовая последовательность $\{a_{\overline{n}}\}$ называется монотонно убывающей. Класс таких последовательностей будем обозначать через M.

Теперь приведем полученные нами результаты. Нам понадобится следующий результат М.И.Дьяченко.

Теорема А (см. [7]). Если коэффициенты ряда

$$\sum_{\overline{n}\ge\overline{1}}a_{\overline{n}}e^{i\overline{n}\overline{x}}\tag{3}$$

удовлетворяют условию $\{a_{\overline{n}}\}\in M$ и при некотором $q\in(\frac{2s}{s+1},+\infty)$ выполняется условие

$$J_q=\sum_{\overline{n}\ge\overline{1}}\prod_{j=1}^{s}n_j^{q-2}\cdot a_{\overline{n}}^q<+\infty,$$

то ряд (3) является рядом Фурье некоторой функции $f\in L_q(I_s)$ и $\|f\|_q\le C\cdot J_q^{\frac{1}{q}}$.

Используя эту теорему, докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Пусть функция $f\in L_q(I_s)$, $q\in(\frac{2s}{s+1},+\infty)$;

$$f(\overline{x})\sim\sum_{\overline{n}\ge\overline{1}}a_{\overline{n}}(f)\prod_{j=1}^{s}\cos n_jx_j$$

и $\{a_{\bar n}(f)\}\in M$, тогда имеет место неравенство

$$Y_{n_1,\dots,n_s}(f)_q \le C\cdot\left(\sum_{k_1=n_1+1}^{+\infty}\dots\sum_{k_s=n_s+1}^{+\infty} a_{\bar k}^q(f)\prod_{j=1}^{s}(k_j-n_j)^{q-2}\right)^{\frac{1}{q}},\quad n_j=0,1,\dots$$

Доказательство. Известно следующее равенство:

$$\prod_{j=1}^{s}\cos n_j x_j=\prod_{j=1}^{s}\frac{e^{in_jx_j}+e^{-in_jx_j}}{2}=\frac{1}{2^s}[e^{i(n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_sx_s)}+e^{i(-n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_sx_s)}+$$
$$+e^{i(n_1x_1-n_2x_2+\ldots+n_sx_s)}+\ldots+e^{i(n_1x_1+n_2x_2+\ldots-n_sx_s)}+e^{i(-n_1x_1-n_2x_2+n_3x_3+\ldots+n_sx_s)}+\ldots+$$
$$+e^{i(n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_{s-2}x_{s-2}-n_{s-1}x_{s-1}-n_sx_s)}+\ldots+e^{i(-n_1x_1-n_2x_2-\ldots-n_sx_s)}].$$

Пользуясь этим равенством, теоремой об ограниченности оператора сопряжения в пространстве $L_q(I_s)$, $1<q<+\infty$ (см. [8]) и теоремой А, можно убедиться, что

$$\|f\|_q \le C\cdot\left(\sum_{n_1=1}^{+\infty}\dots\sum_{n_s=1}^{+\infty} a_{\bar n}^q(f)\cdot\prod_{j=1}^{s}n_j^{q-2}\right)^{\frac{1}{q}},\quad q\in\left(\frac{2s}{s+1},+\infty\right). \tag{4}$$

Положим

$$U_{\bar n}(f,\bar x)=\sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{+\infty}\dots\sum_{k_s=1}^{+\infty}a_{\bar k}(f)\prod_{j=1}^{s}\cos k_jx_j+\sum_{k_1=1}^{+\infty}\sum_{k_2=1}^{n_2}\dots\sum_{k_s=1}^{+\infty}a_{\bar k}(f)\prod_{j=1}^{s}\cos k_jx_j+\ldots+$$
$$+\sum_{k_1=1}^{+\infty}\sum_{k_2=1}^{+\infty}\dots\sum_{k_s=1}^{n_s}a_{\bar k}(f)\prod_{j=1}^{s}\cos k_jx_j-(s-1)\sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2}\dots\sum_{k_s=1}^{n_s}a_{\bar k}(f)\prod_{j=1}^{s}\cos k_jx_j\,.$$

Тогда

$$f(\bar x)-U_{\bar n}(f,\bar x)\sim\sum_{k_1=n_1+1}^{+\infty}\sum_{k_2=n_2+1}^{+\infty}\dots\sum_{k_s=n_s+1}^{+\infty}a_{k_1,k_2,\dots,k_s}(f)\prod_{j=1}^{s}\cos k_jx_j=$$
$$=\sum_{m_1=1}^{+\infty}\sum_{m_2=1}^{+\infty}\dots\sum_{m_s=1}^{+\infty}a_{m_1+n_1,m_2+n_2,\dots,m_s+n_s}(f)\prod_{j=1}^{s}\cos(m_j+n_j)x_j=$$
$$=\sum_{m_1=1}^{+\infty}\sum_{m_2=1}^{+\infty}\dots\sum_{m_s=1}^{+\infty}a_{m_1+n_1,m_2+n_2,\dots,m_s+n_s}(f)\prod_{j=1}^{s}[\cos m_jx_j\cdot\cos n_jx_j-\sin m_jx_j\cdot\sin n_jx_j].$$

Учитывая неравенство $|\sin y|\le 1$, $|\cos y|\le 1$ по определению наилучшего приближения «углом» и свойства нормы и пользуясь теоремой об ограниченности оператора сопряжения функции, получим

$$Y_{\bar n}(f)_q\le\|f-U_{\bar n}(f)\|_q\le C\cdot\left\|\sum_{m_1=1}^{+\infty}\dots\sum_{m_s=1}^{+\infty}a_{m_1+n_1,\dots,m_s+n_s}(f)\cdot\prod_{j=1}^{s}\cos m_jx_j\right\|_q.$$

Теперь, пользуясь неравенством (4) из последнего неравенства, получим

$$Y_{n_1,\dots,n_s}(f)_q\le C\cdot\left(\sum_{m_1=1}^{+\infty}\dots\sum_{m_s=1}^{+\infty}a^q_{m_1+n_1,\dots,m_s+n_s}(f)\prod_{j=1}^{s}m_j^{q-2}\right)^{\frac{1}{q}}=$$
$$=C\cdot\left(\sum_{k_1=n_1+1}^{+\infty}\dots\sum_{k_s=n_s+1}^{+\infty}a^q_{k_1,\dots,k_s}(f)\prod_{j=1}^{s}(k_j-n_j)^{q-2}\right)^{\frac{1}{q}},q\in(\frac{2s}{s+1},+\infty).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $\frac{2s}{s+1}<q\le 2$, $1\le\lambda\le q$, $0\le\beta_j<\frac{1}{q'}$, $j=1,\dots,s,$ и функция $f\in L_q(I_s)$ имеет ряд Фурье вида

$$\sum_{\bar n\ge\bar 1}a_{\bar n}(f)\cdot\prod_{j=1}^{s}\cos n_jx_j\,.$$

Если $\{a_{\bar n}(f)\}\in M$, то для того, чтобы ряд Фурье функции $f\in L_q(I_s)$ был $|C;\bar\beta|_\lambda$ -суммируем почти всюду на I_s, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n_1=2}^{+\infty}\dots\sum_{n_s=2}^{+\infty}\prod_{j=1}^{s}n_j^{\left(\frac{1}{q}-\beta_j\right)\lambda-1}\cdot Y^{\lambda}_{n_1,\dots,n_s}(f)_q<+\infty\,. \tag{5}$$

Доказательство. Достаточность условия (5) для $|C;\overline{\beta}|_{\lambda}$ -суммируемости ряда Фурье функции $f \in L_q(I_s)$ следует из пункта с) теоремы 4 работы [1] (без предположения $\{a_{\bar{n}}(f)\} \in M$).

Докажем необходимость. Пусть ряд Фурье функции $f \in L_q(I_s)$ $|C;\overline{\beta}|_{\lambda}$ -суммируем на I_s. Тогда по теореме 2 работы [1]

$$\sum_{\bar{n}\geq \bar{1}} \left|a_{\bar{n}}(f)\right|^{\lambda} \cdot \prod_{j=1}^{s} n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1} < +\infty . \tag{6}$$

В силу монотонности наилучшего приближения «углом» и доказанной выше леммы 2 получим

$$\sum_{n_1=2}^{+\infty} \cdots \sum_{n_s=2}^{+\infty} \prod_{j=1}^{s} n_j^{(\frac{1}{q}-\beta_j)\lambda-1} \cdot Y^{\lambda}_{n_1,\ldots,n_s}(f)_q \succ\prec \sum_{\nu_1=1}^{+\infty} \cdots \sum_{\nu_s=1}^{+\infty} \prod_{j=1}^{s} 2^{\nu_j(\frac{1}{q}-\beta_j)\lambda} Y^{\lambda}_{2^{\nu_1},\ldots,2^{\nu_s}}(f)_q \leq$$

$$\leq C \cdot \sum_{\bar{\nu}\geq \bar{1}} \prod_{j=1}^{s} 2^{\nu_j(\frac{1}{q}-\beta_j)\lambda} \left[\sum_{\bar{k}\geq 2^{\bar{\nu}}+\bar{1}} \prod_{j=1}^{s} (k_j - 2^{\nu_j})^{q-2} a^q_{\bar{k}}(f) \right]^{\frac{\lambda}{q}} . \tag{7}$$

Учитывая, что по условию теоремы $\{a_{\bar{n}}(f)\} \in M$ и неравенство

$$\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} (k-2^{\nu})^{q-2} \leq C \cdot 2^{m(q-1)} ,$$

будем иметь

$$\sum_{\nu_1=1}^{+\infty} \cdots \sum_{\nu_s=1}^{+\infty} \prod_{j=1}^{s} 2^{\nu_j(\frac{1}{q}-\beta_j)\lambda} \left[\sum_{k_1=2^{\nu_1}+1}^{+\infty} \cdots \sum_{k_s=2^{\nu_s}+1}^{+\infty} \prod_{j=1}^{s} (k_j - 2^{\nu_j})^{q-2} a^q_{\bar{k}}(f) \right]^{\frac{\lambda}{q}} \leq$$

$$\leq C \cdot \sum_{\bar{\nu}\geq \bar{1}} \prod_{j=1}^{s} 2^{\nu_j\left(\frac{1}{q}-\beta_j\right)\lambda} \left[\sum_{\bar{m}\geq \bar{\nu}} \prod_{j=1}^{s} 2^{m_j(q-1)} a^q_{2^{m_1},\ldots,2^{m_s}}(f) \right]^{\frac{\lambda}{q}} . \tag{8}$$

По условию теоремы $0 \leq \beta_j < \frac{1}{q'}$, $j=1,\ldots,s.$ Следовательно

$$\sum_{m=0}^{\nu} 2^{m(\frac{1}{q}-\beta_j)\lambda} \leq C \cdot 2^{\nu(\frac{1}{q}-\beta_j)\lambda}, \quad \nu = 0,1,\ldots$$

Известно следующее неравенство Йоханссона [9]: если $\alpha_n \geq 0$ и $\sum_{m=0}^{n} \alpha_m \leq C \cdot \alpha_n$, то $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \left(\sum_{k=n}^{+\infty} b_k \right)^{\theta} \leq C \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cdot b_n^{\theta}$, $\theta > 0$. Теперь, пользуясь этим неравенством, получим

$$\sum_{\nu_1=1}^{+\infty} \cdots \sum_{\nu_s=1}^{+\infty} \prod_{j=1}^{s} 2^{\nu_j(\frac{1}{q}-\beta_j)\lambda} \left[\sum_{m_1=\nu_1}^{+\infty} \cdots \sum_{m_s=\nu_s}^{+\infty} \prod_{j=1}^{s} 2^{m_j(q-1)} a^q_{2^{m_1},\ldots,2^{m_s}}(f) \right]^{\frac{\lambda}{q}} \leq$$

$$\leq C \cdot \sum_{n_1=1}^{+\infty} \cdots \sum_{n_s=1}^{+\infty} a^{\lambda}_{\bar{n}}(f) \cdot \prod_{j=1}^{s} n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1} . \tag{9}$$

В силу (6) из неравенств (7)–(9) следует, что

$$\sum_{n_1=2}^{+\infty} \cdots \sum_{n_s=2}^{+\infty} \prod_{j=1}^{s} n_j^{(\frac{1}{q}-\beta_j)\lambda-1} \cdot Y^{\lambda}_{n_1,\ldots,n_s}(f)_q < +\infty .$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 1 анонсирована в [10].

Теорема 2. Пусть $1 < q \leq 2$, $1 \leq \lambda_s \leq \lambda_{s-1} \leq \ldots \leq \lambda_1 \leq q$, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$. Тогда для $|C;\overline{\beta}|_{\bar{\lambda}}$ -суммируемости п.в. на I_s ряда (1) достаточно, чтобы

1) в случае $\dfrac{1}{q'} < \beta_j < +\infty$, $j=1,\ldots,s$ выполнялось условие

$$\sum_{n_s=0}^{+\infty}\left[\sum_{n_{s-1}=0}^{+\infty}\dots\left[\sum_{n_1=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1}\dots\sum_{k_s=2^{n_s}}^{2^{n_s+1}-1}\rho_{k_1,\dots,k_s}^{q}\right)^{\frac{\lambda_1}{q}}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\dots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}<+\infty\ ;$$

2) в случае $\beta_1=\dots=\beta_s=\dfrac{1}{q'}$ выполнялось условие

$$\sum_{n_s=0}^{+\infty}\left[\sum_{n_{s-1}=0}^{+\infty}\dots\left[\sum_{n_1=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1}\dots\sum_{k_s=2^{n_s}}^{2^{n_s+1}-1}\rho_{k_1,\dots,k_s}^{q}\prod_{j=1}^{s}\ln k_j\right)^{\frac{\lambda_1}{q}}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\dots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}<+\infty\ ;$$

3) в случае $-1<\beta_j<\dfrac{1}{q'},\ j=1,\dots,s$ выполнялось условие

$$\sum_{n_s=0}^{+\infty}\left[\sum_{n_{s-1}=0}^{+\infty}\dots\left[\sum_{n_1=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1}\dots\sum_{k_s=2^{n_s}}^{2^{n_s+1}-1}\rho_{k_1,\dots,k_s}^{q}\prod_{j=1}^{s}k_j^{q(1-\beta_j)-1}\right)^{\frac{\lambda_1}{q}}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\dots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}<+\infty\ .$$

Доказательство. Докажем пункт 3. Рассмотрим следующий ряд:

$$J=\sum_{n_s=1}^{+\infty}\frac{1}{n_s}\int_{I_s}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty}\frac{1}{n_{s-1}}\dots\left[\sum_{n_1=1}^{+\infty}\frac{1}{n_1}\left|\tau_{\bar n}^{\bar\beta}(\bar x)\right|^{\lambda_1}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\dots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}d\bar x\ .$$

Последовательно применяя неравенство Гельдера для интеграла с показателями $\theta_s=\dfrac{\lambda_{s-1}}{\lambda_s},\dots,$ $\theta_2=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, теорему Хаусдорфа-Юнга [11] и соотношение $A_n^{(\beta)}\succ\prec n^{\beta}$, получим

$$J\le C\sum_{n_s=1}^{+\infty}n_s^{-1-\lambda_s\beta_s}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty}n_{s-1}^{-1-\lambda_{s-1}\beta_{s-1}}\dots\left[\sum_{n_1=1}^{+\infty}n_1^{-1-\lambda_1\beta_1}\left(\sum_{k_1=1}^{n_1}\dots\sum_{k_s=1}^{n_s}\rho_{k_1,\dots,k_s}^{q}\cdot\prod_{j=1}^{s}(n_j-k_j+1)^{q(\beta_j-1)}k_j^{q}\right)^{\frac{\lambda_1}{q}}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\dots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}.$$

Теперь по n_1, рассуждая как в одномерном случае [5], так как $-1<\beta_1<\dfrac{1}{q'}$, отсюда получим

$$J\le C\sum_{n_s=1}^{+\infty}n_s^{-1-\lambda_s\beta_s}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty}n_{s-1}^{-1-\lambda_{s-1}\beta_{s-1}}\dots\left[\sum_{i_1=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_2=1}^{n_2}\dots\sum_{k_s=1}^{n_s}\prod_{j=2}^{s}(n_j-k_j+1)^{q(\beta_j-1)}k_j^{q}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\sum_{k_1=2^{i_1}}^{2^{i_1+1}-1}k_1^{q(1-\beta_1)-1}\cdot\rho_{\bar k}^{q}\right)^{\frac{\lambda_1}{q}}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\dots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}=$$

$$=C\sum_{n_s=1}^{+\infty}n_s^{-1-\lambda_s\beta_s}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty}n_{s-1}^{-1-\lambda_{s-1}\beta_{s-1}}\dots\left[\sum_{n_2=0}^{+\infty}\sum_{\mu_2=2^{n_2}}^{2^{n_2+1}-1}\mu_2^{-1-\lambda_2\beta_2}\left[\sum_{i_1=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_3=1}^{n_3}\dots\sum_{k_s=1}^{n_s}\prod_{j=3}^{s}k_j^{q}\times\right.\right.\right.\right.$$

$$\times\prod_{j=3}^{s}(n_j-k_j+1)^{q(\beta_j-1)}\cdot\sum_{k_2=1}^{\mu_2}(\mu_2-k_2+1)^{q(\beta_2-1)}k_2^q\sum_{k_1=2^{i_1}}^{2^{i_1+1}-1}k_1^{q(1-\beta_1)-1}\cdot\rho_{\bar{k}}^q\Bigg)^{\frac{\lambda_1}{q}}\Bigg]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\Bigg]^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}\ldots\Bigg]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}. \qquad (10)$$

Далее, применяя неравенство Гельдера для суммы по μ_2 сначала с показателем $\theta=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, потом с показателем $\theta=\frac{q}{\lambda_1}$, из (10) получим

$$J\le C\sum_{n_s=1}^{+\infty}n_s^{-1-\lambda_s\beta_s}\Bigg[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty}n_{s-1}^{-1-\lambda_{s-1}\beta_{s-1}}\ldots\Bigg[\sum_{n_2=0}^{+\infty}2^{-n_2\lambda_2(\beta_2+\frac{1}{q})}\Bigg[\sum_{i_1=0}^{+\infty}\Bigg(\sum_{k_3=1}^{n_3}\ldots\sum_{k_s=1}^{n_s}\prod_{j=3}^{s}k_j^q\times$$

$$\times\prod_{j=3}^{s}(n_j-k_j+1)^{q(\beta_j-1)}\cdot\sum_{\mu_2=2^{n_2}}^{2^{n_2+1}-1}\sum_{k_2=1}^{\mu_2}(\mu_2-k_2+1)^{q(\beta_2-1)}k_2^q\cdot\sum_{k_1=2^{i_1}}^{2^{i_1+1}-1}k_1^{q(1-\beta_1)-1}\cdot\rho_{\bar{k}}^q\Bigg)^{\frac{\lambda_1}{q}}\Bigg]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\Bigg]^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}\ldots\Bigg]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}. \qquad (11)$$

Теперь, если $-1<\beta_2<\frac{1}{q'}$, то по n_2, сначала рассуждая как в одномерном случае [5], потом так как по условию теоремы $\frac{\lambda_1}{q}\le 1$ и $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\le 1$, то, дважды применяя неравенство Иенсена и меняя порядок суммирования из (11), имеем

$$J\le C\sum_{n_s=1}^{+\infty}n_s^{-1-\lambda_s\beta_s}\Bigg[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty}n_{s-1}^{-1-\lambda_{s-1}\beta_{s-1}}\ldots\Bigg[\sum_{i_2=0}^{+\infty}\Bigg[\sum_{i_1=0}^{+\infty}\Bigg(\sum_{k_3=1}^{n_3}\ldots\sum_{k_s=1}^{n_s}k_3^q\cdots k_s^q\times$$

$$\times\prod_{j=3}^{s}(n_j-k_j+1)^{q(\beta_j-1)}\cdot\sum_{k_2=2^{i_2}}^{2^{i_2+1}-1}k_2^{q(1-\beta_2)-1}\sum_{k_1=2^{i_1}}^{2^{i_1+1}-1}k_1^{q(1-\beta_1)-1}\cdot\rho_{\bar{k}}^q\Bigg)^{\frac{\lambda_1}{q}}\Bigg]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\Bigg]^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}\ldots\Bigg]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}.$$

Далее, последовательно применяя вышеприведенный метод по n_3, n_4, …, n_s, получим

$$J\le C\sum_{n_s=0}^{+\infty}\Bigg[\sum_{n_{s-1}=0}^{+\infty}\ldots\Bigg[\sum_{n_1=0}^{+\infty}\Bigg(\sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1}\ldots\sum_{k_s=2^{n_s}}^{2^{n_s+1}-1}\rho_{k_1,\ldots,k_s}^q\prod_{j=1}^{s}k_j^{q(1-\beta_j)-1}\Bigg)^{\frac{\lambda_1}{q}}\Bigg]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\ldots\Bigg]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}.$$

Наконец, применяя теорему Леви, получим $|C;\bar{\beta}|_{\bar{\lambda}}$-суммируемость ряда (1) п.в. на I_s, в случае $-1<\beta_j<\frac{1}{q'}$, $j=1,\ldots,s$.

Остальные пункты теоремы доказываются аналогично.

Замечание 2. В случае $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_s=\lambda$ из теоремы 2 следует теорема 1 работы [1].

Теорема 3. Пусть $1<q\le 2$, $1\le\lambda_s\le\lambda_{s-1}\le\ldots\le\lambda_1\le q$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$. Тогда для $|C;\bar{\beta}|_{\bar{\lambda}}$-суммируемости п.в. на I_s ряда Фурье функции $f\in L_q(I_s)$ достаточно, чтобы

1) в случае $\frac{1}{q'} < \beta_j < +\infty,\ j = 1,\dots,s$ выполнялось условие

$$\sum_{n_s=1}^{+\infty} n_s^{\lambda_s(\frac{2}{q}-1)-1}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty} n_{s-1}^{\lambda_{s-1}(\frac{2}{q}-1)-1}\dots\left[\sum_{n_1=1}^{+\infty} n_1^{\lambda_1(\frac{2}{q}-1)-1}\cdot Y_{\overline{n}}^{\lambda_1}(f)_q\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\dots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} < +\infty;$$

2) в случае $\beta_1 = \dots = \beta_s = \frac{1}{q'}$ выполнялось условие

$$\sum_{n_s=2}^{+\infty} (\ln n_s)^{\frac{\lambda_s}{q}}\cdot n_s^{\lambda_s(\frac{2}{q}-1)-1}\left[\sum_{n_{s-1}=2}^{+\infty} (\ln n_{s-1})^{\frac{\lambda_{s-1}}{q}}\cdot n_{s-1}^{\lambda_{s-1}(\frac{2}{q}-1)-1}\dots\left[\sum_{n_1=2}^{+\infty} (\ln n_1)^{\frac{\lambda_1}{q}}\cdot n_1^{\lambda_1(\frac{2}{q}-1)-1}\cdot Y_{\overline{n}}^{\lambda_1}(f)_q\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\dots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} < +\infty;$$

3) в случае $-1 < \beta_j < \frac{1}{q'},\ j = 1,\dots,s$ выполнялось условие

$$\sum_{n_s=1}^{+\infty} n_s^{\lambda_s(\frac{1}{q}-\beta_s)-1}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty} n_{s-1}^{\lambda_{s-1}(\frac{1}{q}-\beta_{s-1})-1}\dots\left[\sum_{n_1=1}^{+\infty} n_1^{\lambda_1(\frac{1}{q}-\beta_1)-1}\cdot Y_{\overline{n}}^{\lambda_1}(f)_q\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\dots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} < +\infty.$$

Доказательство. Докажем пункт 2. Пусть $\beta_1 = \dots = \beta_s = \frac{1}{q'}$. Тогда из теоремы 2 (пункт 2), пользуясь теоремой Харди-Литтлвуда [11], получим

$$P = \sum_{n_s=0}^{+\infty}\left[\sum_{n_{s-1}=0}^{+\infty}\dots\left[\sum_{n_1=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1}\dots\sum_{k_s=2^{n_s}}^{2^{n_s+1}-1}\rho_{k_1,\dots,k_s}^{q}\prod_{j=1}^{s}\ln k_j\right)^{\frac{\lambda_1}{q}}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\dots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} \le$$

$$\le C\sum_{n_s=1}^{+\infty}(\ln 2^{n_s})^{\frac{\lambda_s}{q}}\cdot 2^{n_s(2-q)\frac{\lambda_s}{q}}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty}(\ln 2^{n_{s-1}})^{\frac{\lambda_{s-1}}{q}}\cdot 2^{n_{s-1}(2-q)\frac{\lambda_{s-1}}{q}}\dots\right.$$

$$\left.\dots\left[\sum_{n_1=2}^{+\infty}(\ln 2^{n_1})^{\frac{\lambda_1}{q}} 2^{n_1(2-q)\frac{\lambda_1}{q}}\cdot\left(\sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1}\dots\sum_{k_s=2^{n_s}}^{2^{n_s+1}-1}\rho_{\overline{k}}^{q}\cdot\prod_{j=1}^{s}k_j^{q-2}\right)^{\frac{\lambda_1}{q}}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\dots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} \le$$

$$\le C\sum_{n_s=1}^{+\infty}(\ln 2^{n_s})^{\frac{\lambda_s}{q}}\cdot 2^{n_s(2-q)\frac{\lambda_s}{q}}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty}(\ln 2^{n_{s-1}})^{\frac{\lambda_{s-1}}{q}}\cdot 2^{n_{s-1}(2-q)\frac{\lambda_{s-1}}{q}}\dots\right.$$

$$\left.\dots\left[\sum_{n_1=2}^{+\infty}(\ln 2^{n_1})^{\frac{\lambda_1}{q}} 2^{n_1(2-q)\frac{\lambda_1}{q}}\cdot\left\|\sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1}\dots\sum_{k_s=2^{n_s}}^{2^{n_s+1}-1}B_{\overline{k}}(\cdot)\right\|_q^{\lambda_1}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\dots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}. \qquad (12)$$

Теперь, пользуясь неравенством [2]

$$\left\|\sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1}\dots\sum_{k_s=2^{n_s}}^{2^{n_s+1}-1}B_{\overline{k}}(\cdot)\right\|_q \le C\cdot Y_{2^{n_1}-1,\dots,2^{n_s}-1}(f)_q,$$

в силу монотонности наилучшего приближения «углом» из (12), имеем

$$P \le C \cdot \sum_{n_s=2}^{+\infty} (\ln n_s)^{\frac{\lambda_s}{q}} \cdot n_s^{\lambda_s(\frac{2}{q}-1)-1} \left[\sum_{n_{s-1}=2}^{+\infty} (\ln n_{s-1})^{\frac{\lambda_{s-1}}{q}} \cdot n_{s-1}^{\lambda_{s-1}(\frac{2}{q}-1)-1} \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \left[\sum_{n_1=2}^{+\infty} (\ln n_1)^{\frac{\lambda_1}{q}} \cdot n_1^{\lambda_1(\frac{2}{q}-1)-1} \cdot Y_{\bar{n}}^{\lambda_1}(f)_q \right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \ldots \right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} < +\infty .$$

Остальные пункты теоремы доказываются аналогично.

Замечание 3. В случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s = \lambda$ из теоремы 3 следует теорема 4 работы [1].

Теорема 4. Пусть $1 < q \le 2$, $1 \le \lambda_s \le \lambda_{s-1} \le \ldots \le \lambda_1 \le q$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ и r — натуральное число. Тогда для $|C;\bar{\beta}|_{\bar{\lambda}}$-суммируемости п.в. на I_s ряда Фурье функции $f \in L_q(I_s)$ достаточно, чтобы

1) в случае $\frac{1}{q'} < \beta_j < +\infty$, $j = 1,\ldots,s$ выполнялось условие

$$\sum_{n_s=1}^{+\infty} n_s^{\lambda_s(\frac{2}{q}-1)-1} \left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty} n_{s-1}^{\lambda_{s-1}(\frac{2}{q}-1)-1} \ldots \left[\sum_{n_1=1}^{+\infty} n_1^{\lambda_1(\frac{2}{q}-1)-1} \cdot \Omega_r^{\lambda_1}(f;\frac{1}{n_1},\ldots,\frac{1}{n_s})_q \right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \ldots \right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} < +\infty ;$$

2) в случае $\beta_1 = \ldots = \beta_s = \frac{1}{q'}$ выполнялось условие

$$\sum_{n_s=2}^{+\infty} (\ln n_s)^{\frac{\lambda_s}{q}} \cdot n_s^{\lambda_s(\frac{2}{q}-1)-1} \left[\sum_{n_{s-1}=2}^{+\infty} (\ln n_{s-1})^{\frac{\lambda_{s-1}}{q}} \cdot n_{s-1}^{\lambda_{s-1}(\frac{2}{q}-1)-1} \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \left[\sum_{n_1=2}^{+\infty} (\ln n_1)^{\frac{\lambda_1}{q}} \cdot n_1^{\lambda_1(\frac{2}{q}-1)-1} \cdot \Omega_r^{\lambda_1}(f;\frac{1}{n_1},\ldots,\frac{1}{n_s})_q \right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \ldots \right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} < +\infty ;$$

3) в случае $-1 < \beta_j < \frac{1}{q'}$, $j = 1,\ldots,s$ и $r > \frac{1}{q} - \beta_j$, $j = 1,\ldots,s$ выполнялось условие

$$\sum_{n_s=1}^{+\infty} n_s^{\lambda_s(\frac{1}{q}-\beta_s)-1} \left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty} n_{s-1}^{\lambda_{s-1}(\frac{1}{q}-\beta_{s-1})-1} \ldots \left[\sum_{n_1=1}^{+\infty} n_1^{\lambda_1(\frac{1}{q}-\beta_1)-1} \Omega_r^{\lambda_1}(f;\frac{1}{n_1},\ldots,\frac{1}{n_s})_q \right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \ldots \right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}} < +\infty .$$

Доказательство. Справедливость теоремы следует из теоремы 3 и следующего неравенства [2]:

$$Y_{n_1,\ldots,n_s}(f)_q \le C \cdot \Omega_r(f;\frac{1}{n_1+1},\ldots,\frac{1}{n_s+1})_q .$$

Если функция одной переменной f монотонно убывает, то справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $1 < q \le 2$, $1 \le \lambda \le q$, $0 \le \beta < \frac{1}{q'}$ и пусть функция $f \in L_q(I_1)$ монотонно убывает и неотрицательна. Тогда, для того чтобы ряд Фурье этой функции был $|C;\beta|_\lambda$-суммируем почти всюду на I_1, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\lambda(\frac{1}{q}-\beta)-1} \cdot \omega^\lambda(f;\frac{1}{n})_q < +\infty .$$

Доказательство. Необходимость. Применяя неравенство Харди [12], получим

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\lambda(\frac{1}{q}-\beta)-1} \cdot \omega^\lambda(f;\frac{1}{n})_q \le \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\lambda(\frac{1}{q}-\beta)-1} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} f^q(x)dx \right)^{\frac{\lambda}{q}} \le$$

$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n\lambda(\frac{1}{q}-\beta)} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} f^q(x)dx \right)^{\frac{\lambda}{q}} \leq C \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n\lambda(\frac{1}{q}-\beta)} \left(2^{-n} f^q(2^{-n-1}) \right)^{\frac{\lambda}{q}} =$$

$$= C \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n\lambda\beta} f^{\lambda}(2^{-n-1}) \leq C \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n\lambda\beta} \left(\sum_{k=1}^{2^n} |a_k(f)| \right)^{\lambda} \succ\prec$$

$$\succ\prec \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1-\lambda\beta} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k(f)| \right)^{\lambda} \leq C \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1-\lambda\beta} \left(n |a_n(f)| \right)^{\lambda} = C \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\lambda(1-\beta)-1} |a_n(f)|^{\lambda} \quad .$$

Если предположить, что ряд Фурье функции $f \in L_q(I_1)$ почти всюду $|C;\beta|_{\lambda}$-суммируем на множестве положительной меры, то в силу теоремы 1 работы [4] из предыдущего неравенства следует, что

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\lambda(\frac{1}{q}-\beta)-1} \cdot \omega^{\lambda}(f;\frac{1}{n})_q < +\infty$$

для функции $f \in L_q(I_1)$, $f \downarrow$.

Достаточность следует из теоремы 3 работы [13] при $s = 1$.

Теорема доказана.

Замечание 4. Теорема 5 анонсирована в [14].

Список литературы

1. *Битимханулы С.* Условие абсолютной суммируемости кратных тригонометрических рядов // Вестн. КазГУ. Сер. мат., мех., инф. — Алматы, 2001. — №1(24).
2. *Потапов М.К.* Теоремы Харди-Литтлвуда, Марцинкевича-Литтлвуда-Пэли, приближение «углом» и вложение некоторых классов функций // Math. — 1972. — Vol. 14(37). — № 2.
3. *Жак И.Е., Тиман М.Ф.* О суммировании двойных рядов // Мат. сб. — 1954. — Т. 35 (77). — № 1. — С. 21–56.
4. *Тиман М.Ф., Пономаренко Ю.А.* Об абсолютной суммируемости кратных рядов Фурье // Укр. мат. журн. — 1971. — Т. 23. — № 3. — С. 346–361.
5. *Салаи И.* Об абсолютной суммируемости тригонометрических рядов // Мат. заметки. — 1981. — Т. 39. — № 6. — С. 823–837.
6. *Дьяченко М.И.* Коэффициенты Фурье кусочно-монотонных функций многих переменных // Изв. РАН. — 1998. — Т. 62. — № 2. — С. 35–48.
7. *Дьяченко М.И.* Нормы ядер Дирихле и некоторых тригонометрических полиномов в пространствах L_p. // Мат. сб. — 1993. — Т. 184. — № 3. — С. 3–20.
8. *Жижиашвили Л.В.* Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа. — Тбилиси, 1983. — 113 с.
9. *Акишев Г.А.* Об условиях вложения классов функций многих переменных в пространство Лоренца и их приложения: Дис. … канд. физ.-мат. наук. — Алматы, 1983.
10. *Битимхан С., Акишев Г.А.* Об абсолютной суммируемости кратных тригонометрических рядов // Тез. докл. 2 Междунар. симп. (27 мая–2 июня 2002 г.). — Ростов-н/Д., 2002. — С. 15.
11. *Бугров Я.С.* Суммируемость преобразований Фурье и абсолютная сходимость кратных рядов Фурье // Тр. МИАН СССР. — 1989. — Т. 187. — С. 22–30.
12. *Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: ИЛ, 1948.
13. *Битимхан С., Акишев Г.А.* Модули гладкости и абсолютная суммируемость кратных тригонометрических рядов // Мат. журн. — Алматы, 2003. — Т. 3. — № 1(17). — С. 5–14.
14. *Bitimkhan S.* Absolute summability of Fourier series of monotonously decreasing function // Abstracts of the third congress of the world mathematical society of Turkic countries. June 30–July 4, 2009. — Vol. 1. — P. 95.