References

1. Educational Encyclopedia. Vol. 3 / Ed. *Kairova I.A., Petrov F.N.* — M.: Sov. Encycl., 1966. — 879 p.
2. *Zlydneva T.P.* Teaching and research activities as a condition of high-quality specialist training // Bulletin of pedagogical innovations. — 2005. — № 4. — P. 90–97.
3. State overal compulsory educational standart of the Republic of Kazakhstan SOCEDS RK3.08.317–2006.
4. http:// Cisco.netacad.net

УДК 519.33

Обобщённые числа Фибоначчи порядка *k*

The generalized Fibonacci numbers of order *k*

Бобровский В.П.[1], Бухарицына Л.В.[2]

[1]*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;*
[2]*Средняя школа № 23, Караганда (E-mail: ramatur@mail.ru)*

Фибоначчи сандарын әр түрлі әдістермен қорытуға болатыны белгілі. Мақалада Фибоначчи сандарының ең нақты жалпылаулары қарастырылады, бір жағынан, кейбір қарапайым түр өзгертулермен байланысты «қоян туралы есеп» Фибоначчи сандар туралы әдебиетте қарастырылған. Сонымен қатар Фибоначчидың *k*-сандары туралы есептер реті дәлелденген. Ұзақ уақыт бойы Фибоначчи сандары архитектураға дейін («алтын қима») геометрияда арифметикалық, алгебралық қасиеттерін, соңында олардың қосымшаларын оқудағы жалғыз объект болып саналып келді.

The famous Fibonacci numbers can be generalized different ways. Their most natural generalization is considered in our work, though and, associated with some simple mutating «the tasks of rabbits», however, covered in the vast literature about Fibonacci numbers. Also prove a number of properties generalization *k* — Fibonacci numbers. The Fibonacci numbers in a long time been almost the sole object for the study of arithmetic, algebraic properties, and subsequently their applications in geometry and other branches, until the architecture («golden section»).

1. В настоящее время для создания определенной чисто арифметической конструкции чисел Фибоначчи вводятся числа U_n, n=1,2,3, …, задаваемые рекуррентным соотношением

$$U_{n+1} = U_{n-1} + U_{n-2} \tag{1}$$

с начальными значениями

$$U_1 = U_2 = 1. \tag{2}$$

Первоначально эти числа были рассмотрены ещё во времена глубокого средневековья знаменитым итальянским математиком Леонардо из Пизы, более известного по прозвищу Фибоначчи (Fibonacci, сокращенно от fibius Bonacci — сын Боначчи, отсюда и название чисел). В средние века фамилий в современном смысле не было, поэтому великие или хотя бы известные люди имели прозвища, основу которых составляли ярко выраженные черты характера, великие дела их носителей, внешний вид, их привычки и даже физические недостатки. Например, итальянский математик Никола Фонтано (около 1499–1557 гг.) в математических кругах был более известен под прозвищем Тарталья (косноязычный, шепелявый, заика) из-за того, что, будучи еще ребенком, пытаясь защитить своего отца, убитого французскими солдатами-мародерами, получил при этом страшный удар алебардой, рассекшей ему гортань, всю жизнь с трудом мог говорить. Он истинный творец формулы, выражающей значение корней общего уравнения третьей степени в радикалах. Но, как это часто бывает, благодаря случаю или исторической ошибке, за этой формулой закрепилось имя Дж. Кардано, хотя сам Кардано никогда и нигде не утверждал, что эта формула принадлежит ему.

В сочинении Фибоначчи «Liber abacci» («Книга об абаке») в ее втором издании 1228 г. (первоначальный вариант 1202 г. утерян) эти числа рассматриваются как решение задачи «о кроликах», изложенной на страницах 123–124 рукописи 1228 г.

«Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года, если их природа такова, что через месяц пара кроликов производит на свет одну пару, а рождают кролики со второго месяца после своего рождения».

Числа (1) с начальными условиями (2) являются решением этой локальной задачи, в настоящее время рассматриваемой как арифметическая конструкция с бесконечно растущим индексом *n*.

Литература о числах Фибоначчи необыкновенно обширна и разнообразна, что неудивительно, так как числа Фибоначчи в течение трех веков, вплоть до Виета, были чуть не единственным объектом для изучения их арифметических, алгебраических свойств, а впоследствии их приложений в геометрии и других разделах математики, вплоть до архитектуры («золотое сечение»).

Интерес к числам Фибоначчи не угас до сих пор, достаточно сказать, что уже несколько десятилетий издается специальный журнал «About the Fibonacci Quarterly» (г. Нью-Йорк).

Первоначальные сведения о числах Фибоначчи содержатся в работах Б.Бонкомпагни [1], В.Хоггата и М.Бикнелла-Джонсона [2], У.Альфреда [3] (см. также популярную книгу Н.Н.Воробьева [4] и статью М.Дюбонэ [5]).

Первыми двадцатью числами Фибоначчи являются числа:

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,**144**,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765.

Интересно, что среди первого миллиона чисел Фибоначчи нет квадратов, кроме трех: $U_1 = U_2 = 1,\ U_{12} = 144$ (проверка произведена М.Вандерлихом).

Р.Финкельштейн [6] доказал, что среди чисел Фибоначчи только четыре имеют вид $k^2 + 1$, а именно $U_1 = U_2 = 1,\ U_3 = 2,\ U_4 = 5$ (если формально использовать отрицательные индексы, то к ним присоединяются еще U_{-1} и U_{-5}). Используя этот факт, Г.Вильямс, в частности, доказал, что уравнение

$$x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + xy^3 + y^6 = (x-6)^6$$

имеет в целых числах только четыре решения: $(\pm 1;\ 0)$ и $(0;\ \pm 1)$.

Теория чисел Фибоначчи изобилует результатами, касающимися вопросов делимости, среди которых следующее свойство строгой делимости (strong divisibility:

$$U(m, n) = (Um, Un).$$

Это свойство используется М.Вандерлихом для доказательства теоремы Евклида о бесконечности множества простых чисел. Допущение конечности этого множества приводит к противоречию с тем фактом, что $U_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$. Свойства последовательностей строгой делимости были описаны К.Кимберлингом [7] и В.Хоггатом [8], однако вопрос о бесконечности простых чисел Фибоначчи до сих пор не решен.

Ряд элементарных свойств чисел Фибоначчи следует непосредственно из соотношения (1), например, формулы сложения и умножения:

$$U_{m+n} = U_{m-1}U_n + U_m U_{n+1}; \tag{3}$$

$$U_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{n} U_k U_n^k U_{n-1}^{m-k}. \tag{4}$$

В частности, из (3) и (4) имеем

$$U_{2n} = U_n(U_{n-1} + U_{n+1}),\ U_{3n} = U_{n+1}^3 + U_n^3 \cdot U_{n-1}^3. \tag{5}$$

Различные тождества для чисел Фибоначчи содержатся в работах Ф.Трумпера [9] и Д.Десмонда [10]. Числа Фибоначчи напрямую связаны со многими фактами теории чисел. Последовательность чисел

$$\frac{U_i}{U_j}, i = 0,1,2,...,n-1,\ j = 1,2,...,n, \quad i > j,$$

носит название последовательности Фарея чисел Фибоначчи; свойства этих последовательностей и их обобщений рассмотрены в работах К.Аллади [11] и Х.Гупта [12], о последовательности дробей Фарея и некоторых их свойств см., например, в книгах А.А.Бухштаба [13] и И.М.Виноградова [14].

О связи чисел Фибоначчи с последовательностью Люка см. работы Л.Сомера [15], В.Хоггата и М.Бикнелла-Джонсона.

Последовательность Люка связана с простыми числами вида 2^p-1 (числами Мерсена, см. кн. Э.Троста [16]).

Известна теорема Заксендорфа о представлении натуральных чисел в виде суммы чисел Фибоначчи:

$$n = \sum_{v=1}^{k} U_{i_v}$$

К.Г.Леккеркер [17] доказал — при некоторых дополнительных условиях — единственность этого разложения. Им также введены понятия ранга числа n, понимая под этим числом $v = v(n)$ такое, что

$$U_v \le n < U_{v+1},$$

и некоторые функции, связанные со средним числом данного ранга.

Результат Заксендорфа-Леккеркера обобщен П.Брукманом [18].

Опираясь на идеи Ю.В.Матиясевича (см., например, [19]), Дж. Джонс [20] показал, что множество чисел Фибоначчи не является точной областью значений никакого многочлена (аналог результата о простых числах), однако ему удалось построить многочлен

$$y = (1 - (y^2 - yx - x^2)^2)^2,$$

все положительные значения которого являются числами Фибоначчи.

Числа Фибоначчи тесным образом связаны с числами

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

которые являются корнями уравнения $x^2 - x - 1 = 0$; отметим, что прямоугольники с соотношением сторон, равным α, носят название прямоугольников золотого сечения. О свойствах последовательности $\{n^2 - n - 1\}$ см. работу Дж.Хиди и Л.Келли [21].

Числа Фибоначчи выражаются через числа α и β, с помощью следующей формулы Бинэ:

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n). \quad (6)$$

Из формулы (5), в частности, следует, что U_n является ближайшим целым к числу $\alpha^n / \sqrt{5}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n-1}}{U_n} = x.$

Обобщения на произвольные рекуррентные последовательности этой и других формул см. в работе К.Лонга [22]. Различные результаты, связанные с суммами по числам Фибоначчи, содержатся также в работе Р.Бакстрома [23], например, типичный для этой работы результат:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{U_{2n+1}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Числа Фибоначчи не избежали участи всех чисел определенного класса и числовых функций — их обобщения. Обобщить числа Фибоначчи можно различными способами: изменить начальные условия (2), слагаемым (1) приписать «веса», т.е. суммировать с определенными коэффициентами, увеличить количество слагаемых в (1), а также варьировать эти способы.

При $U_1 = 1, U_2 = 4$ возникает последовательность чисел, названная Эсвиратоном [24] псевдофибоначчиевыми (psevdo-Fibonacci). Установлено, что среди них нет чисел вида $4k + 1$, в работе того же автора [24] доказывается, что в последовательности псевдофибоначчиевых чисел единственным квадратом являются числа $U_{-8} = 81, U_1 = 1, U_2 = 4, U_4 = 9.$

Числа p_r, определенные рекуррентным соотношением

$$p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n,\ n \ge 0,$$

с начальными условиями $p_0 = 0;\ p_1 = 1,$ носят название чисел Пелля. Название эти числа получили в результате одной творческой ошибки Леонарда Эйлера. О свойствах чисел Пелля см. работу М. де Леона [24].

Наиболее общий метод обобщения чисел Фибоначчи принадлежит Г.Кирстиду [25]. Он основан на рекуррентном соотношении вида

$$f_{n+1} = rf_{n-1} + sf_n,\ n \text{ — целое}, \quad (7)$$

с начальными условиями $f_1 = a,\ f_2 = b,$ где a, b, r, s — целые числа.

В статье Г.Кирстида такие последовательности названы фибоноидными (fibonoid sequences).

Последовательности вида (6) являются чисто периодическими по любому модулю m с некоторым наименьшим положительным периодом p (m). В указанной работе устанавливается большой ряд обобщающих по m существу известных утверждений относительно p (m) и других конгруэнциальных свойств $\{f(n)\}$.

2. Рассмотрим фибоноидную последовательность

$$U_1^k,\, U_2^k,\, U_n^k,$$

определенную рекуррентным соотношением

$$U_n^k = U_{n-1}^k + kU_{n-2}^k \tag{8}$$

с начальными условиями

$$U_1^k = 1;\; U_2^k = 1. \tag{9}$$

Опираясь на формулу (8) и условия (9), построим следующую таблицу:

N/K		*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	3	5	7	9	1 1	13	15	17	19
	1	5	1 1	1 9	2 9	4 1	55	71	89	10 9
	1	8	2 1	4 0	6 5	9 6	13 3	17 6	22 3	28 0
	1	1 3	4 3	9 7	1 81	3 01	46 3	89 3	93 7	12 61
	1	2 1	8 5	2 17	4 41	7 81	12 61	21 25	27 37	37 81
	1	3 4	1 71	5 08	1 165	2 286	40 39	83 76	10 233	15 130
	1	5 5	3 41	1 158	2 929	3 621	11 605	23 251	32 129	49 159

Числа, определенные соотношением (8) с начальными условиями (9) и реализованные в таблице, названы нами обобщенными числами Фибоначчи порядка k, или обобщенными k-числами Фибоначчи, или, еще проще, k-числами Фибоначчи. Это оправдано тем, что эти числа — решения обобщенной задачи Фибоначчи в следующей редакции.

«*Если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет k пар, а кролики рождают со второго месяца после своего рождения*».

Действительно, число U_n^k может быть представлено в виде суммы двух слагаемых: U_{n-1}^k — число пар кроликов предыдущего месяца, которые, естественно, остаются, из U_{n-1}^k пар приносят потомство только пары позапрошлого месяца; U_{n-2}^k — число пар, каждая из которых приносит по k пар, итого еще $k\, U_{n-2}^k$ пар, окончательно:

$$U_n^k = U_{n-1}^k + kU_{n-2}^k,$$

что соответствует равенству (8).

Счет в таблице начинается с 0. Нулевой столбец в ней состоит из единиц, он соответствует случаю $k = 0$, т.е. кролики вообще не приносят потомства. Столбец под номером 1, т.е. соответствующий $k = 1$ в (8), состоит из классических чисел Фибоначчи.

Задачу «о кроликах» можно заменить другими задачами, например, задачей о передаче информации (некто получил информацию, обработал ее, затратив, допустим, один день, а потом распространил ее среди k адресатов). Здесь большой интерес представляет вероятностная версия этой задачи: каждый информатор отправляет свое сообщение, в зависимости от обстоятельств, некоторому неопределенному числу адресатов, т.е. число k будет случайной величиной, подчиненной закону распределения (например, пуассоновскому). Задачу можно усложнить: учесть, например, вероятность сбоя информации, к тому же интерес к любой информации со временем, конечно, иссякает (поставленную задачу могут, например, решить).

Прежде всего, докажем, что числа U_n^k зависят от n и k, т.е. $U_n^k = f_n(k)$.

Теорема 1. (Бобровский, Абдрахманова, Заватская). Для чисел U_n^k справедлива формула

$$U_n^k = \begin{cases} \sum_{j=0}^{m} \binom{m+j}{m-j} k^{m-j}, & \text{если} \quad n = 2m+1; \\ \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m+j}{m-1-j} k^{m-1+j}, & \text{если} \quad n = 2m. \end{cases} \tag{10}$$

Из рекуррентного соотношения (8) и начального условия (9) следует, что

U_1^k					1
U_2^k					1
U_3^k				$k+$	1
U_4^k				$2k+$	1
U_5^k			k^2+	$+3k+$	1
U_6^k			$3k^2+$	$+4k+$	1
U_7^k		k^3+	$6k^2+$	$+5k+$	1
U_8^k		$4k^3+$	$10k^2+$	$+6k+$	1
U_9^k	k^4+	$10k^3+$	$15k^2+$	$+7k+$	1

и т.д., что соответствует формулам (10) и тем самым создает базу индукции. Далее допустим, что справедлива формула (10) при произвольном n. Тогда из (8) и (10) следует:

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m+j}{m-j} k^{m+j} + k \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m+j}{m-1+j} k^{m-1+j} = U_{2m+1} + kU_{2m} = \sum_{j=0}^{m} \left\{ \binom{m+j}{m-j} + \binom{m+j}{m-1+j} \right\} k^{m+j}.$$

Откуда имеют в виду известное свойство чисел сочетаний, для последней суммы имеем следующие значения:

$$\sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1-j}{m-1-j} k^{m+1-j} = U_{n+1}^{(k)},$$

что и доказывает теорему для нечетного n-1, для четного n-1 теорема доказывается аналогично.

Запишем коэффициенты в (10) в виде следующей таблицы:

Т а б л и ц а 1

					1
					1
				1	1
				2	1
			1	3	1
			3	4	1
		1	6	5	1
		4	10	6	1
	1	10	15	7	1
	5	20	21	8	1
1	15	35	28	9	1
6	35	56	36	10	1

или, что то же самое, согласно (10), в виде такой таблицы:

Т а б л и ц а 2

					1
					1
				$\binom{1}{1}$	1
				$\binom{2}{1}$	1
			$\binom{2}{2}$	$\binom{3}{1}$	1
			$\binom{3}{2}$	$\binom{4}{1}$	1
		$\binom{3}{3}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{5}{1}$	1
		$\binom{4}{3}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{6}{1}$	1
	$\binom{4}{4}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{7}{1}$	1
	$\binom{5}{4}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{8}{1}$	1
$\binom{5}{5}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{8}{2}$	$\binom{9}{1}$	1
$\binom{6}{5}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{8}{3}$	$\binom{9}{2}$	$\binom{10}{1}$	1

В таблицах содержатся числа сочетаний. Таблицы (1) и (2) — это зеркально отображенный прямоугольный треугольник Паскаля, причем столбец таблицы сдвинут по отношению к соседнему столбцу вниз на одну строку. Очевидно, что числа Фибоначчи U_n являются суммой чисел в *n*-ой строке таблицы 1(или 2).

Из (10) при $k = 1$ следует, что

$$U_n = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{m} \binom{m+j}{m-j}, & \text{если} \quad n = 2m+1; \\ \sum\limits_{i=0}^{m-1} \binom{m+j}{m-1-j}, & \text{если} \quad n = 2m, \end{cases}$$

или

$$U_n^k = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{m-1-j}{j} k^j.$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha_k = \frac{1+\sqrt{4k+1}}{2} \text{ и } \beta_k = \frac{1-\sqrt{4k+1}}{2}. \tag{11}$$

Числа α_k и β_k являются корнями уравнения $x^2 - x - k = 0$. Докажем следующую важную лемму.

Лемма. Для чисел α_k и β_k, определённых формулой (6), имеют место равенства

$$\alpha_k^n = \alpha_k U_n^k + kU_{n-1}^k; \tag{12}$$

$$\beta_k^n = \beta_k U_n^k + kU_{n-1}^k. \tag{13}$$

Докажем формулу (12).

В силу (11) имеем

$$\alpha_k{}^2 = \frac{(1+\sqrt{4k+1}\,)^2}{4} = \frac{1+2\sqrt{4k+1}+4k+1}{4} = \frac{1+\sqrt{4k+1}}{2} + k = \alpha_k + k,$$

так как

$$U_1^k = U_2^k = 1,\ \alpha_k^2 = \alpha_k U_2^k + kU_1^k;$$

$$\alpha_k^3 = \alpha_k \cdot \alpha_k^2 = \alpha_k(\alpha_k + k) = \alpha_k^2 + k\alpha_k = \alpha_k + k + k\alpha_k = \alpha_k(k+1) + k = \alpha_k U_3^k + kU_2^k;$$

$$\alpha_k^4 = \alpha_k \cdot \alpha_k^3 = \alpha_k(\alpha_k U_3^k + kU_2^k) = \alpha_k(U_3^k + kU_2^k + kU_3^k) = \alpha_k U_4^k + kU_3^k$$

и т.д., что обеспечивает базу индукции.

Далее индуктивно предполагаем справедливость формулы (7). Тогда имеем

$$\alpha_k^{n+1} = \alpha_k \cdot \alpha_k^n = \alpha_k(\alpha_k U_n^k + kU_{n-1}^k) = (\alpha_k + k)U_n^k + \alpha_n kU_{n+k} = \alpha_k(U_n^k + kU_{n-1}^k) + kU_n;$$

$$\alpha_k U_{n+1}^k + kU_n^k.$$

Формула (13) доказывается аналогично.

В следующей теореме доказывается обобщение формулы Бинэ.

Теорема 2. (Бобровский-Абдрахманова).

Для чисел U_n^k справедлива следующая формула:

$$U_n^k = \frac{(\alpha^n + \beta^n)}{\sqrt{4k+1}}. \tag{14}$$

Из (12) и (13) следует, что

$$\alpha_k^n - \beta_k^n = (\alpha - \beta)U_n^k,$$

и так как

$$\alpha - \beta = \frac{1+\sqrt{4k+1}}{2} - \frac{1-\sqrt{4k+2}}{2} = \sqrt{4k+1},$$

то отсюда следует (14).

Формулу (14) можно доказать иначе. Легко проверить, используя (4), что

$$\alpha_k - \beta_k = \sqrt{4k+1},\ \alpha_k + \beta_k = 1; \tag{15}$$

$$\alpha_k^2 + \beta_k^2 = 2k+1,\ \alpha_k\beta_k = -k. \tag{16}$$

Тогда из (15) имеем

$$\frac{\alpha_k-\beta_k}{\sqrt{4k+1}}=1=U_1{}^k;\ \frac{\alpha_k^2-\beta_k^2}{\sqrt{4k+1}}=\frac{(\alpha_k+\beta_k)(\alpha_k-\beta_k)}{\sqrt{4k+1}}=1=U_2^k. \qquad (17)$$

Из (15), (16), (17) находим

$$\frac{\alpha_n^3-\beta_n^3}{\sqrt{4k1}}=\frac{(\alpha_n-\beta_n)(\alpha_k^2-\alpha_k\beta_k+\beta_k^2)}{\sqrt{4k+1}}=\alpha_k^2+\alpha_k\beta_k+\beta_k^2=k+1=U_3^k=$$

$$=\alpha_k^2+\alpha_k\beta_k+\beta_k^2=k+1=U_3^k.$$

Индуктивно предполагаем, что справедливы равенства

$$U_n^k=\frac{\alpha_k^n-\beta_k^n}{\sqrt{4k+1}};U_{n-1}{}^k=\frac{\alpha_k{}^{n-1}-\beta_k^{n-1}}{\sqrt{4k+1}}.$$

Тогда, в силу (1),

$$U_{n+1}^k=\frac{\alpha_k^n-\beta_k^n}{\sqrt{4k+1}}+k\frac{\alpha_k^{n-1}-\beta_k^{n-1}}{\sqrt{4k+1}}=\frac{\alpha_k^n+\alpha_k^{n-1}}{\sqrt{4k+1}}-\frac{\beta_k^n+k\beta_k^{n-1}}{\sqrt{4k+1}}=$$

$$=\frac{\alpha_k^{n-1}(\alpha_k+1)}{\sqrt{4k+1}}-\frac{\beta_k^{n-1}(\beta_k+k)}{\sqrt{4k+1}}=\frac{\alpha_k{}^{n+1}-\beta_k{}^{n+1}}{\sqrt{4k+1}}.$$

Наиболее простой вид формула (9) принимает при $4k+1=m^2$, где m — целое, т.е. число $4k+1$ является точным квадратом.

Например, при $k = 2$: $\sqrt{4k+1}=3$ и тогда $\alpha_2=\frac{1+3}{2}=2$; $\beta_2=\frac{1-3}{2}=-1$, откуда формула (14) имеет вид $U_n^2=\frac{2^n-(-1)^n}{3}$. Имеем

$$U_1{}^2=\frac{2+1}{3}=1;\ U_2{}^2=\frac{4-1}{3}=1;\ U_3{}^2=\frac{8+1}{3}=3;\ U_4{}^2=\frac{16-1}{3}=5;\ U_5{}^2=\frac{32+1}{3}=11;\ U_6{}^2=\frac{64+1}{3}=21.$$

При $k=6$ $k^2+1=25$ и формула (12) имеет вид $U_n{}^6=\frac{3^n-(-2)^n}{5}$, и тогда $U_1{}^6=\frac{3+2}{5}=1$; $U_2{}^6=\frac{9-4}{5}=1$; $U_3{}^6=\frac{27+8}{5}=7$; $U_4{}^6=\frac{81-16}{5}=13$; $U_5{}^6=\frac{243+32}{5}=55$. При $k=3$, например, формула (12) имеет вид

$$U_n{}^3=\frac{(1+\sqrt{13})^n-(1-\sqrt{13})^n}{4\sqrt{13}},$$

тогда легко проверить $U_1^3=1$; $U_2^3=1$; $U_3^3=4$; $U_4^3=7$; $U_5^3=19$.

Число $k = 2$ в теории k-чисел Фибоначчи занимает особое место. Например, формулы (4) и (5) для чисел U_n^2 могут быть записаны в следующем виде:

Теорема 3. (Бобровский-Заватская). $U_n^{(2)}=\sum_{j=1}^{n}2^{n-2(1+j)}U_n^{(2)}=\sum_{j=1}^{n}2^{n-2(1+j)}$, $n\geq 3$.

Из формулы (3) имеем:

$$U_3^2=3=2+1;$$

$$U_4^2=5=2^2+1;$$

$$U_5^2=11=2^3+2+1;$$

$$U_6^2=21=2^4+2^2+1;$$

$$U_7^2=43=2^5+2^3+2+1 \text{ и т.д.}$$

Таким образом, создана база индукции для предположения

$$U_n^2=\begin{cases}2^{n-2}+2^{n-4}+\ldots+2^3+2+1, & \text{если } n=2m+1;\\ 2^{n-1}+2^{n-4}+\ldots+2^2+1, & \text{если } n=2m.\end{cases}$$

Пусть для нечетного n индуктивно предполагаема справедливость равенства:

$$U_n^2=2^{n-2}+2^{n-4}+\ldots+2^3+2+1, \quad \text{если } n=2m+1. \qquad (18)$$

Тогда из рекуррентного соотношения (1) при $k = 2$ имеем:

$$U_{n+1}^2 = U_n^2 + 2U_{n-1}^2. \qquad (19)$$

И тогда из формул (17), (18) имеем:

$$U_{n-1}^2 = 2^{n-3} + 2^{n-5} + ... + 2 + 1,$$

также индуктивно предполагаемой верной, таким образом приходим к доказательству теоремы.

Большинство формул, полученных для классических чисел Фибоначчи, могут быть обобщены и для k-чисел Фибоначчи, в том числе формулы сложения и умножения (3) и (4), например, формула сложения для k-чисел Фибоначчи имеет вид

$$U_{m+n}^k = kU_{m-1}^k U_n^k + U_m^k U_{n+1}^k,$$

которая проще всего доказывается с помощью обобщенной формулы Бинэ (13).

В теории чисел Фибоначчи известна формула Симпсона

$$U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2 = (-1)^n.$$

Для k-чисел Фибоначчи она имеет вид:

Теорема 4. (Абдрахманова-Заватская). Имеет место формула

$$U_{n+1}^k U_{n-1}^k - (U_n^k)^2 = (-1)^n k^{n-1}. \qquad (20)$$

Для доказательства этой формулы используем обобщенную формулу Бинэ (10). Имеем:

$$U_{n+1}^k U_{n-1}^k = \frac{(\alpha_k^{n+1} - \beta_k^{n+1})(\alpha_k^{n-1} - \beta_k^{n-1})}{4k+1} = \frac{\alpha_k^{2n} + \beta_k^{2n}}{4k+1} - 2\frac{\alpha_k^{n-1}\beta_k^{n-1}}{4k+1}(\alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

И так как

$$\alpha_k{}^2 + \beta_k{}^2 = \frac{(1+\sqrt{4k})^2 + (1-\sqrt{4k})^2}{4} = 2k + 1,$$

то

$$U_{n+1}^k U_{n-1}^k = \frac{\alpha_k^{2n} + \beta_k^{2n}}{4k+1} - 2\frac{(-k)^{n-1}}{4k+1}(2k+1). \qquad (21)$$

Далее

$$(U_n^k)^2 = \frac{(\alpha_k^n - \beta_k^n)^2}{4k+1} = \frac{\alpha_k^{2n} + \beta_k^{2n}}{4k+1} - 2\frac{(-k)^n}{4k+1}. \qquad (22)$$

Таким образом, из (16) и (17) имеем

$$U_{n+1}^k U_{n-1}^k - (U_n^k)^2 = -(-k)^{n-1} = (-1)^n k^{n-1}.$$

Собственно формула Симпсона следует из (22) при $k = 1$.

Как видим, интерес к числам Фибоначчи и обобщенным числам Фибоначчи не иссяк до сегодняшнего времени.

References

1. *Boncompagni B.* Jlliber Abbaci di Leonardo Pisuno. — Roma, 1857.
2. *Hoggatt W.* Bioknell-Johnson M. Represantation of integers in term of greatest integers functions and the golden section tarries — Fibonacci Quart. — 1979. — 17. — № 4. — P. 306–318.
3. *Alfred U.* An introduction to Fibonacci discovery. — San Jose (Calif). — 1965. — Fibonacci Quart. — 1963.
4. *Vorobiev N.N.* Fibonacci numbers. — Vol. 6. — M.: Nauka, 1978.
5. *Dubone M.* Une suite recurente remarqualle — seminar Delange-Pisot-Poiton. Theor nombres. Univ.Piere et Marie Curie. — 1977 (1978). 19. 112. 27/01–27/02.
6. *Finkelstein R.* On Fibonacci numbers which are one more that a square — y reine angew // Math. — 1973. — P. 171–178, 202–265.
7. *Kimberling C.* Strong divisibility sequences and sonie conjectures, Fibonacci Quart. — 1974. — 12. — № 1. — P. 13–17.
8. *Hoggatt V.E., Long C.T.* Divisibility properties of generalized Fibonacci probyminials, Fibonacci Quart. — 1974. — 12. — № 2. — P. 113–120.
9. *Trumper F.J.D.* Some general Fibonacci shift formulae — Fibonacci Quart. — 1973. — 11. — № 5. — P. 523–524.
10. *Desmond J.E.* On the equality of regions of different module of the Fibonacci sequence — Fibonacci Quart. — 1978. — 16. — № 1. — P. 86–87.
11. *Alladi K., Farey A.* Sequence of Fibonacci numbers, Fibonacci Quart. — 1975. — 13. — № 1. — P. 1–10.
12. *Gupta M.* A diriet method of obtaining Farey-Fibonacci sequence, Fibonacci Quart. — 1976. — 14. — № 5. — P. 389–391.
13. *Buchshtab A.A.* Number theory. — M.: Prosveshenie, 1966.
14. *Vinogradov I.M.* Fundamentals of number theory. —M.: Nauka, 1965.

15. *Somer L.* The divisibility properties of primary Lucas recurrences with respect to primes — Fibonacci Quart. — 1980. — 18. — № 4. — P. 344–353.
16. *Trost E.* Prime numbers. — M.: GIFML, 1959.
17. *Lekkerker C.G.* Vorstelling van natunrijke getullen door een om van getalllen van Fibonacci-Simon Sterin. — 1951/52/29. — № 4. — 190–195.
18. *Bruckman P.* Some divisibility properties of generalized Fibonacci sequences. — 1979. — 17. — № 1. — P. 42–49.
19. *Matiiasevich U.V.* Prime numbers are enumerated by polynom of 10 variables — Not. of scien. sem. of Leningr. dep. math. inst., 1977. 68. — P. 62–82.
20. *Jones James. P.* Diophantine representation on the Fibonacci numbers // Fibonacci Quart. — 1975. — 13. — № 1. — P. 84–85.
21. *Heed Joseph, Kelly Lucille.* An interesting sequence of Fibonacci sequence generating // Fibonacci Quart. — 1979. — 13. — № 1. — P. 29–30.
22. *Long C.* The decimal expansion of 1/89 and rerated results // Fibonacci Quart. — 1981. — 19. — № 1. —P. 53–55.
23. *Backstrom R.P.* On reliprocical series related of Fibonacci numbers with subscripts in arithmetic progression // Fibonacci Quart. — 1981. — 19. — № 1. — P. 14–21.
24. *M. de Leon*. Pells equation and Pell number triples-Fibonacci Quart. — 1975. — 14. — № 5. — P. 456–460.
25. *Kierstead H.* Fibonoid sequences modulo m-y. Recreat. Math. — 1979–1980. — 12, 1. — P. 32–44.

УДК 517.5

Об одном свойстве трансформированного оператора свертки

About the property of the modified convolution operator

Джумабаева А.А.

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана
(E-mail: Jumabaeva2010@yandex.kz)

s-саны қандайда бір шартты қанағаттандыратын A үйірткі операторы зерттелді. Бастапқы оператордың өзегін «көбейткіш» деп аталатын қандайда бір φ функцияға көбейгендегі «өзгертілген» A_φ операторы қарастырылды. Есептің негізі A операторына A_φ операторын сәйкес қоятын түрлендіру шенелген болатындай, φ функциясына шарт табудан тұрады. Мақалада φ функциясы үшін $M_{p_0,q_0}^{p_1,q_1}$ класында жататын көбейткіш болуының жеткілікті шарты алынған. Бұл шарт толық «вариация кеңістігі» терминінде анықталған. Дәлелдеуі торлық кеңістік әдісіне негізделген.

We study the convolution operator A, s numbers of which satisfy a certain condition. A «transformed» operator A_φ is considered, where the core of the first operator A is multiplied a certain function φ. The function φ is called «multiplier». The problem is to find conditions on the function φ for which the operator is assigns the operator A to the operator A_φ will be limited. We obtain a sufficient condition on the multiplier φ ensuring that it belongs to space $M_{p_0,q_0}^{p_1,q_1}$. The condition is expressed in terms of spaces of a total variation. The proof is based on the method of net spaces.

Пусть $1 \le p < \infty$, $0 < q \le \infty$. Через $\sigma_{p,q}$ обозначим класс вполне непрерывных операторов A, действующих в пространстве 1-периодических функций $L_2[0,1]$, для которых конечна величина

$$\sum_{m=1}^{\infty} s_m^q(A) m^{q/p - 1} < \infty$$

с соответствующей квазинормой

$$\|A\|_{\sigma_{p,q}} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} s_m^q(A) m^{q/p - 1} \right)^{1/q}.$$

Здесь $\{s_m(A)\}_{m=1}^{\infty}$, s_m — числа оператора A. Напомним, что числа оператора A s_m есть собственные значения оператора $\sqrt{A^* A}$, перенумерованные в порядке невозрастания.