ӘОЖ 539.3

Е.С.Утенов[1], С.Б.Ахажанов[2]

[1]Қарағанды мемлекеттік техникалық университеті;
[2]Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті

СЕРПІМДІЛІ НЕГІЗДЕГІ АРҚАЛЫҚТЫ ЕСЕПТЕУ ӘДІСІ

Построена теория расчета изгибаемой балки на упругом основании. Получено разрешающее уравнение изгиба балки. Учет упругого основания произведен с помощью параметра изгибной жесткости. Рассмотрен пример расчета балки на упругом основании. Результаты приведены в табличной форме.

The theory of calculation of a bent beam on the elastic basis is constructed. The allowing equation of a bend of a beam is received. The account of the elastic basis is made with the help of parameter bending rigidity. Examples of calculation of beams on the elastic basis are considered. Results are resulted in the tabulated form.

Серпімділі негіздегі арқалықты қысылатын серпімді қабат ретінде қарастырайық, оның қалыңдығы H және материалының серпімділік модулі E_0 болсын. Арқалық және серпімді негіздің арасында толық байланыс бар деп қабылдап алайық. Серпімді негізді вертикаль арқалық ретінде қарастырайық (төменгі шеті қатаң бекітілген, жоғарғы шеті бос) және келесі сипаттамаларға ие болсын (H, A, J):

$$A = b_0 \cdot \ell; \quad J = \frac{b_0 \ell^3}{12},$$

мұнда A, J — көлденең қиманың ауданы және өстік инерция моменті; l — арқалықтың ұзындығы; H — серпімді қабаттың биіктігі (вертикаль арқалықтың ұзындығы).

Осы арқалықты (K — вертикаль; m — көлденең) жүктемелерімен жүктеп, Мор формуласы бойынша берілген арқалықтың бос шетінің жылжуын анықтаймыз

$$W = \frac{K \cdot H}{E_0 A}, \quad u = \frac{m \cdot H^3}{3E_0 J}, \tag{1}$$

мұнда $E_0 A$, $E_0 J$ — сығылу және иілу кезіндегі арқалықтың қатаңдығы; W, u — арқалықтың бос жағының вертикаль және көлденең жылжулары.

Арқалықтың жылжуын [1] және толық байланыс шартын (1) ескеріп, күштік факторларды анықтаймыз

$$K = \frac{E_0 A}{H} W, \quad m = -\frac{3}{2} \frac{E_0 J}{H^3} \cdot h \frac{dW}{dx_1},$$

мұнда $W(x_1)$ — серпімділі негіздегі арқалықтың майысу функциясы.

Серпімділі негіздегі арқалықтың көлденең қимасының өстік инерция моментінің параметрі былайша анықталады [1]:

$$g = 1 + \frac{K_N}{K_N^0} + \frac{K_\theta}{K_\omega};$$
$$K_N = \frac{P\ell^2}{EJ_0} = \frac{3}{2} \frac{E_0}{E} \frac{\ell^5}{H^3 h^2}; \tag{2}$$
$$K_\theta = \frac{\sigma \ell^2}{EJ_0} = 12 \frac{E_0}{E} \frac{\ell^4}{Hh^3},$$

мұнда жақшаның ішінде серпімді негіз бен иілетін арқалықтың қатаңдықтарының қатынастары келтірілген; (2) формуланы шығарған кезде K_N және K_θ параметрлерінің алдарындағы таңба оң болып алынған, себебі серпімді негіз жақтан P және σ күштері кері бағытта әсер етеді. K_N^0 және K_ω параметрлері арқалықтың шетіндегі бекіністерге қатысты табылады.

Табылған (2) параметрін негіздеу үшін серпімділі негіздегі арқалықтың классикалық (техникалық) теориясын қолданайық:

– жылжулардың болжамдары және компоненттері

$$\varepsilon_3 = 0\,,\ \gamma_{13} = 0\,,\ \sigma_3 = 0\,;$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \ \to \ u_3(x_1, x_3) = W(x_1)\,,\ x_3 = zh\,; \tag{3}$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 \to u_1(x_1, x_3) = -h\underbrace{\left(c+z\right)}_{\phi(z)}\frac{dW}{dx_1}\,,$$

мұнда c — кез келген белгісіз тұрақты; z — өлшемсіз көлденең координата;

– деформация компоненттері

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -h\phi(z)\frac{d^2W}{dx_1^2}\,,\ \varepsilon_3 = 0\,,\ \gamma_{13} = 0\,;$$

– кернеулер компоненттері

$$\sigma_1 = -Eh\phi(z)\frac{d^2W}{dx_1^2}\,,\ \tau_{13} = Eh^2\left(A + cz + \frac{z^2}{2}\right)\frac{d^3W}{dx_1^3}\,; \tag{4}$$

$$\sigma_3 = Eh^3\left(B - Az - c\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right)\frac{d^4W}{dx_1^4}\,,$$

мұнда B, A — кез келген белгісіз тұрақтылар. Осы тұрақтыларды анықтау үшін (1) және (3) теңдеулерінің негізінде $z = -\dfrac{1}{2}$ болғандағы кернеулер компоненттерін анықтаймыз.

$$\sigma_3^0 = \frac{K}{\ell} = \frac{E_0A}{\ell H}W(x_1)\,;$$

$$\tau_{13}^0 = \frac{m}{\ell} = \frac{1}{\ell}\frac{3E_0J}{H^3}u_1\left(x_1, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{h}{\ell}\frac{3E_0J}{H^3}\left(c - \frac{1}{2}\right)\frac{dW}{dx_1}\,.$$

Келесі шарттарды жазайық:

– шекаралық $z = \dfrac{1}{2}$

$$\tau_{13} = 0 \to A + \frac{c}{2} + \frac{1}{8} = 0 \to A = \frac{1}{8} - \frac{c}{2}\,;$$

$$\sigma_3 = q(x_1) \to Eh^3\left(B - \frac{A}{2} - \frac{c}{8} - \frac{1}{48}\right)\frac{d^4W}{dx_1^4} = q(x_1)\,; \tag{5}$$

– байланыстырушы $z = -\dfrac{1}{2}$

$$\tau_{13} = \tau_{13}^0 : Eh^2\left(A - \frac{c}{2} + \frac{1}{8}\right)\frac{d^3W}{dx_1^3} = \tau_{13}^0\,;$$

$$\frac{12K_N^0}{h\ell^2}EJ_0\left(A - \frac{c}{2} + \frac{1}{8}\right) = \frac{h}{\ell}\frac{3EJ_0}{H^3}\left(c - \frac{1}{2}\right); \tag{6}$$

$$\sigma_3 = \sigma_3^0 : Eh^3\left(B + \frac{A}{2} - \frac{c}{8} + \frac{1}{48}\right)\frac{d^4W}{dx_1^4} = \sigma_3^0\,;$$

$$\frac{12K_\omega}{\ell^4}EJ_0\left(B + \frac{A}{2} - \frac{c}{8} + \frac{1}{48}\right) = \frac{E_0A}{\ell H}\,.$$

Келесі белгілеулерді енгізейік:

$$m_0 = \frac{1}{4}\frac{E_0J}{EJ_0}\frac{h^2\ell}{H^3}\frac{1}{K_N^0}\,,\ n_0 = \frac{1}{12}\frac{E_0A\ell^2}{EJ_0}\frac{\ell}{H}\frac{1}{K_\omega}\,.$$

(5) және (6) бірінші шартынан кез келген тұрақтыларды анықтаймыз

$$c = \frac{1}{2}\frac{m_0}{(1+m_0)}\,,\;\; A = -\frac{1}{8} - \frac{c}{2}\,,\;\; B = \frac{1}{24} + n_0 + \frac{3}{8}c\,. \tag{7}$$

(5) теңдеудің екінші шартынан (7)-ні ескеру арқылы $W(x_1)$ анықтайтын теңдеуді аламыз

$$EJ_0 g\frac{d^4W}{dx_1^4} = q(x_1)\,,\;\; g = 1 + 12n_0 + 6c\,. \tag{8}$$

(7) негізінде (4) былайша жазылады:

$$\sigma_1 = -Eh\phi(z)\frac{d^2W}{dx_1^2}\,,\;\; \tau_{13} = -\frac{Eh^2}{8}\psi(z)\frac{d^3W}{dx_1^3}\,; \tag{9}$$

$$\sigma_3 = EJ_0\delta(z)\frac{d^4W}{dx_1^4}\,,\;\; \phi(z) = c + z\,,\;\; \psi(z) = (1-4z^2) + 4c(1-2z)\,;$$

$$\delta(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}z - 2z^3\right) + \frac{3}{2}c(3 + 4z - 4z^2) + 12n_0\,.$$

Бұл кернеулерге келесі күштер мен сыртқы күш сәйкес келеді

$$M = -EJ_0\frac{d^2W}{dx_1^2}\,,\;\; Q = -EJ_0 g_0\frac{d^3W}{dx_1^3}\,; \tag{10}$$

$$\theta = \frac{dW}{dx_1}\,,\;\; q = EJ_0 g\frac{d^4W}{dx_1^4}\,,\;\; g_0 = 1 + 6c\,.$$

Осыларға сүйеніп, (9) былайша жазамыз:

$$\sigma_1 = \frac{h}{J_0}\phi(z)M\,;\;\; \tau_{13} = \frac{h^2}{8J_0 g_0}\psi(z)Q\,;\;\; \sigma_3 = \delta(z)\frac{q}{g}\,,$$

мұнда g (8) формуласымен анықталады.

(8) теңдеуін шешу кезінде белгісіз тұрақтылар пайда болады, олар арқалықтың шекаралық шарттарынан табылады:

1) топсалы тірелген

$$W = 0\,,\;\; M = 0\,;$$

2) қатты бекітілген

$$W = 0\,,\;\; \theta = \frac{dW}{dx_1} = 0\,;$$

3) бос

$$M = 0\,,\;\; Q = 0\,;$$

4) серпімді бекіністермен

$$W = \frac{Qb^3}{3E_*J_*}\,,\;\; \theta = \frac{M\,b}{E_*J_*}\,,$$

мұнда E_*J_* — бекітіп қойылатын арқалықтың иілу кезіндегі қатаңдығы; b — оның ұзындығы.

Енді (8) және шешімдерді [2, 3] салыстыруды мысал түрінде қарастырамыз. Осы шешімдер арқылы арқалықтың майысу функциясы анықталады. Бұрылу бұрышының және ішкі күштердің мәндері формула (10) бойынша табылады. Серпімділі негіздің материалының модулінің (E_0) арқалықтың материалының серпімділік модуліне (E) қатынасын өзгерткендегі майысу функциялары, бұрылу бұрышы және ішкі күштер мәндерін кестелер түрінде көрсетейік.

Мысал. Топсалы тіректі арқалықты қарастырайық ($q = q_0 = 1$, $l = 1$, $h = 0.25$, $H = 1$). Серпімділі негіздің материалының модулінің (E_0) арқалықтың материалының серпімділік модуліне (E) қатынасын өзгерткендегі майысу функциялары, бұрылу бұрышы және ішкі күштер мәндерін кестелер түрінде көрсетейік (1–4 кестелер).

1 - к е с т е

$\frac{E_0}{E}$	x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0,00001	W_1	0	0,000314	0,000594	0,000813	0,000952	0,001	0,000952	0,000813	0,000594	0,000314	0
	W_2	0	0,000314	0,000594	0,000813	0,000952	0,001	0,000952	0,000813	0,000594	0,000314	0
0,0001	W_1	0	0,000313	0,000593	0,000812	0,000951	0,000999	0,000951	0,000812	0,000593	0,000313	0
	W_2	0	0,000313	0,000593	0,000812	0,000951	0,000999	0,000951	0,000812	0,000593	0,000313	0
0,001	W_1	0	0,000311	0,000589	0,000806	0,000944	0,000991	0,000944	0,000806	0,000589	0,000311	0
	W_2	0	0,000311	0,000589	0,000806	0,000944	0,000991	0,000944	0,000806	0,000589	0,000311	0
0,01	W_1	0	0,000289	0,000547	0,000749	0,000878	0,000922	0,000878	0,000749	0,000547	0,000289	0
	W_2	0	0,000289	0,000548	0,000750	0,000878	0,000922	0,000878	0,000750	0,000548	0,000289	0
0,1	W_1	0	0,000170	0,000322	0,000441	0,000516	0,000542	0,000516	0,000441	0,000322	0,000170	0
	W_2	0	0,000172	0,000324	0,000442	0,000516	0,000541	0,000516	0,000442	0,000324	0,000172	0

2 - к е с т е

$\frac{E_0}{E}$	0,00001		0,0001		0,001		0,01		0,1	
x	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
0	0,00320	0,00320	0,00319	0,00319	0,00317	0,00317	0,00295	0,00295	0,00173	0,00175
0,1	0,00302	0,00302	0,00301	0,00301	0,00299	0,00299	0,00278	0,00278	0,00164	0,00165
0,2	0,00253	0,00253	0,00252	0,00252	0,00251	0,00251	0,00233	0,00233	0,00137	0,00137
0,3	0,00182	0,00182	0,00181	0,00181	0,00180	0,00180	0,00167	0,00167	0,00098	0,00097
0,4	0,00094	0,00094	0,00093	0,00093	0,00092	0,00092	0,00087	0,00087	0,00051	0,00050
0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,6	–0,00094	–0,00094	–0,00093	–0,00093	–0,00092	–0,00092	–0,00087	–0,00087	–0,00051	–0,00050
0,7	–0,00182	–0,00182	–0,00181	–0,00181	–0,00180	–0,00180	–0,00167	–0,00167	–0,00098	–0,00097
0,8	–0,00253	–0,00253	–0,00252	–0,00252	–0,00251	–0,00251	–0,00233	–0,00233	–0,00137	–0,00137
0,9	–0,00302	–0,00302	–0,00301	–0,00301	–0,00299	–0,00299	–0,00278	–0,00278	–0,00164	–0,00165
1	–0,00320	–0,00320	–0,00319	–0,00319	–0,00317	–0,00317	–0,00295	–0,00295	–0,00173	–0,00175

3 - к е с т е

$\frac{E_0}{E}$	0,00001		0,0001		0,001		0,01		0,1	
x	M_1	M_2	M_1	M_2	M_1	M_2	M_1	M_2	M_1	M_2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,0450	0,0450	0,0449	0,0449	0,0446	0,0446	0,0415	0,0419	0,0244	0,0267
0,2	0,0799	0,0799	0,0798	0,0798	0,0793	0,0793	0,0737	0,0741	0,0434	0,0453
0,3	0,1049	0,1049	0,1048	0,1048	0,1041	0,1041	0,0968	0,0969	0,0569	0,0573
0,4	0,1199	0,1199	0,1198	0,1198	0,1190	0,1189	0,1106	0,1105	0,0651	0,0639
0,5	0,1249	0,1249	0,1248	0,1248	0,1239	0,1239	0,1153	0,1150	0,0678	0,0661
0,6	0,1199	0,1199	0,1198	0,1198	0,1190	0,1189	0,1106	0,1105	0,0651	0,0639
0,7	0,1049	0,1049	0,1048	0,1048	0,1041	0,1041	0,0968	0,0969	0,0569	0,0573
0,8	0,0799	0,0799	0,0798	0,0798	0,0793	0,0793	0,0737	0,0741	0,0434	0,0453
0,9	0,0450	0,0450	0,0449	0,0449	0,0446	0,0446	0,0415	0,0419	0,0244	0,0267
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4-кесте

$\frac{E_0}{E}$	0,00001		0,0001		0,001		0,01		0,1	
x	Q_1	Q_2	Q_1	Q_2	Q_1	Q_2	Q_1	Q_2	Q_1	Q_2
0	0,4999	0,4999	0,4995	0,4996	0,4958	0,4966	0,4611	0,4685	0,2914	0,3143
0,1	0,3999	0,3999	0,3996	0,3996	0,3966	0,3967	0,3689	0,3700	0,2171	0,2236
0,2	0,2999	0,2999	0,2997	0,2997	0,2975	0,2972	0,2766	0,2746	0,1628	0,1503
0,3	0,1999	0,1999	0,1998	0,1998	0,1983	0,1980	0,1844	0,1816	0,1085	0,0916
0,4	0,0999	0,0999	0,0998	0,0998	0,0991	0,0989	0,0922	0,0903	0,0443	0,0431
0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,6	–0,0999	–0,0999	–0,0998	–0,0998	–0,0991	–0,0989	–0,0922	–0,0903	–0,0443	–0,0431
0,7	–0,1999	–0,1999	–0,1998	–0,1998	–0,1983	–0,1980	–0,1844	–0,1816	–0,1085	–0,0916
0,8	–0,2999	–0,2999	–0,2997	–0,2997	–0,2975	–0,2972	–0,2766	–0,2746	–0,1628	–0,1503
0,9	–0,3999	–0,3999	–0,3996	–0,3996	–0,3966	–0,3967	–0,3689	–0,3700	–0,2171	–0,2236
1	–0,4999	–0,4999	–0,4995	–0,4996	–0,4958	–0,4966	–0,4611	–0,4685	–0,2914	–0,3143

Мұнда W_1 — шешім (8) бойынша, ал W_2, θ_2, M_2, Q_2 — шешім [2, 3] арқылы анықталған мәндер; θ_1, M_1, Q_1 — W_1 арқылы (10) формуладан табылған мәндер.

Кестелерден майысу функциясы және бұрылу бұрышының мәндерінің айырмашылығы $\frac{E_0}{E} = 0,00001;\ 0,0001;\ 0,001;\ 0,01;\ 0,1$ болғанда 1 % аспайтынын көреміз, ал иілу моменті және көлденең күштер мәндерінің алшақтығы 8 % болады.

Сонымен, алынған нәтижелер арқылы серпімділі негіздегі әр түрлі бекітілген арқалықтардың иілуін аналитикалық түрде есептеуге болады.

Әдебиеттер тізімі

1. *Тұрсынов К.А.* Арқалықтың есептеу теориялары. — Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2007. — 115 б.
2. *Крылов А.Н.* О расчете балок, лежащих на упругом основании. — М: Изд-во АН СССР, 1930.
3. *Тұрсынов К.А., Ахажанов С.Б.* Жартылай серпімділі жазықтықтағы арқалықтың иілуі // ҚарМУ хабаршысы. Математика сер. — Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2006. — № 1(41).