

аргумента порядка  $l$  [1], 
$$F_{nm} = \int_0^c \int_0^{\pi/2} f(\varphi, z) (\sin 2\varphi)^{2\beta} S_n(\varphi) z^{1/2+\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c) d\varphi dz,$$

$\omega_n = 2n + \beta - 3/2$ ,  $n \in N$ ,  $\sigma_m$  –  $m$ -ый положительный корень уравнения  $J_{1/2-\gamma}(x) = 0$ .

Из равенства (3) в силу условия склеивания (2), находим 
$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} U_y(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} U_y(x, y, z) = v(x)Z(z).$$
 Затем, подставляя это в формулу

$$U(x, y, z) = \chi Z(z) \int_0^{x+y} v(t) (r_0^2)^{-\beta} \left(\frac{t}{x}\right)^\beta \Xi_2(\beta, 1-\beta, 1-\beta; r_1, r_2) dt,$$

находим решение задачи TN в области  $\Omega_1$ ,

где  $\chi = 2^{2\beta-1} \Gamma(\beta) / [\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)]$ ,  $r_0^2 = (x-t)^2 - y^2$ ,  $r_1 = -r_0^2 / (4xt)$ ,  $r_2 = \lambda r_0^2 / 4$ , а  $\Xi_2(a, b, c; x, y)$  – гипергеометрическая функция Гумберта [2]:

$$\Xi_2(a, b, c; x, y) = \sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_{m+k}} \frac{x^m y^k}{m!k!},$$

$(a)_m = a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1) = \Gamma(a+m)/\Gamma(a)$  – символ Похгаммера.

#### Список использованной литературы

1. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. –М.: Т.1.Изд. ИЛ, 1949. -798 с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра. -М.: Наука, 1973. -296 с.

### О РАЗРЕШИМОСТИ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Усманов К., Шадибеков К.

Университет Ахмеда Ясави, Туркестан, Казахстан

E-mail: [kairat.usmanov@ayu.edu.kz](mailto:kairat.usmanov@ayu.edu.kz)

Как известно одним из частных случаев функционально – дифференциальных уравнений является так называемые дифференциальные уравнения дробного порядка. Недавно в работе [1] было введено один из вариантов дробной производной, так называемая” конформабельная производная”.

В данной работе на отрезке  $[0, T]$  рассмотрим многоточечную краевую задачу для систем функционально - дифференциальных уравнении с конформабельной производной

$$T_\alpha x(t) + AT_\alpha x(\sigma(t)) = \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t K_2(t, s)\dot{x}(s)ds + f(t), \quad t \in [0, T], x \in R^n, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m B_i x(\theta_i) = d, \quad d \in R^n, \quad (2)$$

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{m-1} < \theta_m = T,$$

где  $0 < \alpha < 1$ , матрица  $K_1(t, s), K_2(t, s)$  непрерывны на  $[0, T] \times [0, T]$ ,  $n$ - мерная вектор-функция  $f(t)$  непрерывна на  $[0, T]$ ,  $A$  – некоторая симметричная,  $B_i, i = \overline{1, m}$  - постоянные матрицы, порядка  $n \times n$ .

Дифференциальные и функционально – дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами играют важную роль при исследовании задач медицины, биологии, экономики и т.д. Например, в работе [2] рассмотрена экономическая модель описывающая взаимосвязь между приростом населения и производством сельскохозяйственной продукции. Показано, что если рассмотреть в модели запаздывания с положительной дисперсией, то динамика экономики определяется системой интегро-дифференциальных уравнении с запаздыванием.

Некоторые из таких отклонении обладают свойствами  $\sigma: [0, T] \rightarrow [0, T]$  и  $\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t)) = t$ . Такие уравнения называют уравнениями со сдвигами Карлемана [3] или уравнениями с инволютивными преобразованиями. В уравнении (1) в качестве такого преобразования рассмотрено преобразование вида  $\alpha(t) = T - t$ . Свойства уравнении с инволютивными преобразованиями исследованы в работах [4-6].

Применяя к уравнению (1) свойства инволютивного преобразования и применяя интегрирования по частям к интегральному члену содержащую производную от искомой функции

$$\int_0^T K_2(t, s) \dot{x}(s) ds = K_2(t, s) x(s) \Big|_0^T - \int_0^T \frac{\partial K_2(t, s)}{\partial s} x(s) ds = K_2(t, T) x(T) - K_2(t, 0) x(0) - \int_0^T \frac{\partial K_2(t, s)}{\partial s} x(s) ds.$$

краевую задачу (1), (2) можно записать в виде

$$T_\alpha x(t) + AT_\alpha x(\sigma(t)) = \int_0^T K(t, s) x(s) ds + K_2(t, T) x(T) - K_2(t, 0) x(0) + f(t), \quad t \in [0, T], x \in R^n, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^m B_i x(\theta_i) = d, \quad d \in R^n, \quad (4)$$

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{m-1} < \theta_m = T,$$

Далее к полученной краевой задаче (3), (4) применим метод параметризации предложенный профессором Д.Джумабаевым [7-8], т.е. рассматриваемый отрезок разбиваем на части, так чтобы точки нагружения подпадали под точки разбиения. Значения искомой функции в точках разбиения обозначаем через параметры. Используя данный параметр переходим к новым переменным. Переход к новым переменным, дает возможность получения начальных условий для исходного уравнения. Множество всех разбиении, при котором полученная задача Коши имеет единственное решение обозначим через  $\Delta_{m(l+1)}$ . Определяя единственное решение задачи Коши и подставляя полученное решение в краевые условия, получим систему линейных уравнении относительно введенных параметров. Тем самым, устанавливается взаимосвязь между обратимостью матрицы полученной системы линейных алгебраических уравнении и однозначной разрешимости исходной многоточечной краевой задачи. На основании метода параметризации устанавливается утверждение:

**Теорема.** Пусть матрица  $[1 - A^2]$  обратима. Тогда для однозначной разрешимости многоточечной краевой задачи (3), (4) необходимо и достаточно чтобы матрица  $Q_\alpha(l)$  была обратима при  $l \in \Delta_{m(l+1)}$ .

This research has been/was/is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09259137)

### Список использованной литературы

1. R. Khalil, M. A. Horani, A. Yousef and M. Sababheh, A new definition of fractional derivative, *J. Comput. Appl. Math.* **264**, 65–70 (2014).
2. Ciano T.; Ferrara M.; Guerrini L. Qualitative analysis of a model of renewable resources and population with distributed delays. *Mathematics* 2022, 10(8), 1247; <https://doi.org/10.3390/math10081247>
3. Carleman T. La the'orie des e'quations inte'grales singulier'es et ses applications. *Annales de l'institut Henri Poincare'* 1932, 1, 401–430.
4. Przeworska-Rolewicz D. *Equations with Transformed Argument, An Algebraic Approach*, 1st ed.; Elsevier Scientific: Amsterdam, The Netherlands, 1973; ISBN 0-444-41078-3
5. Karapetians N.; Samko, S. *Equations with Involution Operators*, 1st ed.; World Birkha'user: Boston, MA, USA, 2001; ISBN 978-1-4612-0183-0.
6. Cabada A.; Tojo F.A.F. *Differential Equations with Involutions*, 1st ed.; Atlantis Press: Paris, France, 2015; ISBN 978-94-6239-120-8.
7. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для систем дифференциальных уравнений //Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 1. С. 50-66.
8. Dzhumabaev D. "Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations". *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41:4 (2018), 1439-1462

### О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Утебаев Д. <sup>1</sup>, Нуруллаев Ж.А. <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан

<sup>2</sup> Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан

E-mail: [dutebaev\\_56@mail.ru](mailto:dutebaev_56@mail.ru); [njusipbay@mail.ru](mailto:njusipbay@mail.ru)

Как известно, решение сложных прикладных задач требует к созданию более точных численных алгоритмов или совершенствованию существующих. Она проявляется особенно при исследовании сложных нестационарных уравнений соболевского типа. Такие уравнения появляются при решении задач геофизики, океанологии, физики атмосферы, физики полупроводников, физики магнитоупорядоченных структур, связанные с распространением волн в средах с сильной дисперсией и многие другие [1]–[3]. Например, уравнение ионно-звуковых волн в замагниченной плазме [3]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_B^2 \right) (\Delta_3 u - r_D^{-2} u) + \omega_p^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_3 u + \omega_p^2 \omega_B^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(x, t), \quad (1)$$

$$(x, t) \in Q_T = \Omega \cup \partial\Omega, \quad \Omega = \{x | x = (x_1, x_2, x_3), 0 < x_\alpha < l, \alpha = \overline{1,3}\},$$

относится к таким уравнениям. Начальные и краевые условия имеют вид:

$$\left. \frac{\partial^v}{\partial t^v} u(x, t) \right|_{t=0} = u_{0,v}, \quad v = \overline{0,3}, \quad x \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega, \quad u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T]. \quad (2)$$

Аппроксимируя пространственные переменные в (1) методом конечных разностей или методом конечных элементов получаем абстрактную задачу Коши для уравнения четвертого порядка:

$$D \frac{d^4 u_h(t)}{dt^4} + B \frac{d^2 u_h(t)}{dt^2} + A u_h(t) = f_h(t), \quad \frac{d^k u_h}{dt^k}(0) = u_{1,k,h}, \quad k = \overline{0,3}, \quad (3)$$

где  $D$ ,  $B$  и  $A$  линейные постоянные, не зависящие от  $t$ , операторы из  $H \rightarrow H$ ,  $D^* = D > 0$ ,  $B^* = B \geq 0$ ,  $A^* = A > 0$ ;  $\forall t \geq 0$ ,  $u = u(t)$ ,  $f = f(t) \in H$  - гильбертово пространство. Далее для задачи (3) на основе метода конечных элементов построена многопараметрическая разностная схема

$$\begin{aligned} D_\eta \dot{y}_t - \eta \tau^2 A y^{(0.5)} - D \ddot{y}^{(0.5)} &= \varphi_1, \\ D_\gamma y_t - D_\gamma \dot{y}^{(0.5)} + \eta \tau^2 D \ddot{y}_t &= \varphi_2, \end{aligned} \quad (4)$$