AIX 4.x; OS/390; Sun Solaris 7. Notes клиенті үшін: Microsoft Windows 95 (98, ME) немесе Windows 2000 (XP, 2003).

Автоматтандырылған жүйеде жұмыс орындау үшін Lotus Domino R6 деректер қорының серверіне қойылатын минималды талаптардың жиыны: процессор (CPU) — Intel Pentium 4 2,6 GHz, (800 MHz bus), 512 KB L2; аналық тақта — Socket 478, i865E, ATX, Serial ATA, 5 PCI, 4DDR, Video; жедел жады — DIMM DDR 512 MB.

Lotus Notes клиентінің жұмыс орнына қойылатын техникалық талаптардың жиыны: процессор (CPU) — Intel, Celeron, 2.0 GHz, S-478 PGA, 128KB; аналық тақта — Socket 478, i845DE, ATX, ATA-100, 3PCI, 2DDR, SB; жедел жады —DIMM DDR 256 MB PC2100 [2].

Автоматтандырылған жүйені орнатуға дискіде 50 мегабайт қосымша орын болуы тиіс.

Қазіргі жоғары оқу орындарында дайындалатын «Информатика», «Ақпараттық жүйелер» мамандықтары бойынша әр түрлі программалау тілдерімен қатар деректер қорларына қатысты пәндер де қарастырылады. Алайда қазіргі заман талабына сай жақсы білікті мамандарды дайындау үшін мүмкіндік болса, өмірдің әр түрлі салаларында кеңінен қолданылатын күрделі ақпараттық жүйелерді оқыту дұрыс деп есептейміз. «Информатика», «Ақпараттық жүйелер» мамандықтары бойынша осындай Lotus Notes/Domino, Oracle жүйелерін студенттерге оқытып үйретсе, орынды болар еді. Себебі бұл, біріншіден, осындай күрделі жүйелермен, олардың ортасымен ертерек танысуға, екіншіден, олардың программалау ортасымен танысып, деректер қорын басқарудың программалық кодтарын құруға мүмкіндік береді.

## References

1. *Lind D.* Construction content in the environment of Lotus Domino R5. — M.: Science, 2003.
2. *Lind D., Kern.* Lotus Notes and Domino 5/6: The encyclopedia of the programmer. — M.: Publishing house «KUDITS-IMAGE», 2003.

УДК 517.9

# Новые свойства уравнений Навье-Стокса

# New the properties of Navier-Stokes equations

Акыш А.Ш.

*Институт математики МОН РК, Алматы (e-mail: akysh41@gmail.ru)*

Мақалада Навье-Стокс теңдеулеріне (НСТ) қойылған бастапқы-шеттік есептен кинетикалық энергияның тығыздығы үшін бейсызықты параболалық теңдеу алынып, оның маңызды қасиеті — максимум принципі айқындалған. Соңғының жәрдемімен НСТ-ға да максимум принципі орындалатындығы көрсетілген. Сөйтіп, НСТ-ға қойылған бастапқы-шеттік есептің барлық уақыт $t \in [0,T]\, \forall T < \infty$ аралығында бір мәнді шешілетіндігімен қоса, әлді шешімінің барлығы дәлелденген.

In the work from system Navier-Stokes equations (NSE) are obtained nonlinear equations of parabolic form for density of kinetic energy, where important property of these equations — principle of maximum was obtained. With help the last proves validity of principle of maximum and for NSE that mathematical view of point is a key. On the basis of this principle it is probed as a whole on time $t \in [0,T]\, \forall T < \infty$ identical solvability of weak generalized solutions and existence of strong solutions.

**Введение.** Основные нерешенные проблемы уравнений Навье-Стокса (УНС) содержатся, например, в [1–4] и др. В частности, в монографии О.А.Ладыженской [1; 13] приведены нерешенные проблемы математической теории УНС. По-видимому, главная среди них следующая: «Имеет ли место однозначная разрешимость «в целом» общей трехмерной начально-краевой задачи в каком-либо классе обобщенных решений без предположений малости об известных функциях и областях, заполненных жидкостью?».

В ряде работ автора [5–7] и других показаны некоторые базовые утверждения для доказательства принципа максимума для УНС. В настоящей работе эти результаты подытожены и доведены до математической строгости. На их основе доказаны однозначная разрешимость слабых и существование сильных решений задачи для УНС в целом по времени $t \in [0,T]\ \forall T < \infty$, что позволяет утверждать: получен некоторый положительный ответ на изложенную выше проблему.

**Постановка задачи.** Рассмотрим начально-краевую задачу для УНС [1] относительно вектора скорости $U = (U_1, U_2, U_3)$ и давления $P$ в области $Q = (0,T] \times \Omega$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \mu \Delta U + (U, \nabla) U + \nabla P = \mathrm{f}(t,x); \tag{1a}$$

$$divU = 0; \tag{1b}$$

$$U(0,x) = \Phi(x); \tag{1c}$$

$$U(t,x)\big|_{\partial\Omega} = 0; \qquad x \in \partial\Omega, \tag{1d}$$

где $x \in \Omega \subset R_3$; $\Omega$ — выпуклая область, заполненная однородной жидкостью, а $\partial\Omega$ — её граница, $t \in [0,T]$, $T < \infty$; $0 < \mu$ — динамический коэффициент вязкости; $\Delta$, $\nabla$ — операторы Лапласа и Гамильтона; $\overset{0}{J}(\Omega)$ — пространство соленоидальных векторов, а $G(\Omega)$ состоит из $\nabla\eta$. Известно [1; 42] ортогональное разложение $L_2(Q) = G(Q) \oplus \overset{0}{J}(Q)$, причем элементы $\overset{0}{J}(Q)$ при $\forall t$ принадлежат $\overset{0}{J}(\Omega)$; $W_{2,0}^1(\Omega)$ — соболевское пространство функций, равных нулю на $\partial\Omega$; $W_{2,0}^{2,1}(Q)$ — гильбертово пространство функций, равных нулю на $[0,\mathrm{T}] \times \partial\Omega$ и имеющих обобщенные производные $\{\mathrm{U}_\mathrm{t}, \mathrm{U}_{x_\alpha}, \mathrm{U}_{x_\alpha x_\beta}, \alpha, \beta = \overline{1,3};\}$ из $\mathrm{L}_2(\mathrm{Q})$; $L_\infty(0,T; W_2^k(\Omega))$ — пространство измеримых по $t$ и при каждом $t \in [0,T]$ принимающих значения из $W_2^k(\Omega)$; $\overset{0}{\mathrm{J}}_p(\Omega)$ — пространство соленоидальных векторов из $L_p(\Omega)$, $\forall p \ge 2$; $f$ и $\Phi$ — векторы функций соответственно внешних сил и начальных данных, удовлетворяющие следующим требованиям:

$$\textbf{i)}\ f(t,x) \in C(\bar{Q}) \cap \overset{0}{J}(Q); \ \textbf{ii)}\ \Phi(x) \in C(\bar{\Omega}) \cap W_{2,0}^1(\Omega) \cap \overset{0}{J}(\Omega).$$

**Принцип максимума.** Из уравнений (1a) при $\mathrm{f} = 0$, воспользовавшись формулой

$$\Delta E = \sum_{\alpha=1}^{3} U_\alpha \Delta U_\alpha + |\nabla U_\alpha|^2,$$

получаем нелинейное уравнение параболического типа для плотности кинетической энергии (к.э.) $E = \vartheta^2 / 2$:

$$\mathbf{N}E \equiv \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \Delta E + (\nabla E, \mathbf{U}) + \mu \sum_{\alpha=1}^{3} |\nabla U_\alpha|^2 + (\nabla P, \mathbf{U}) = 0, \tag{2}$$

где $\vartheta = |\mathbf{U}|$ есть модуль вектора скорости, $(\cdot\,,\cdot)$ — скалярное произведение векторов.

**Теорема 1** [6]. Пусть $\bar{Q} = [0,T] \times \bar{\Omega}$ — цилиндрическая область с границей $[0,T] \times \partial\Omega$ в пространстве переменных $t, \mathbf{x}$ и функции $(P,E) \in C(\bar{Q}) \bigcap C^2(Q)$ удовлетворяют уравнению (2). Тогда функция $E(t,x)$ принимает свой максимум в цилиндре $\bar{Q}$ на нижнем основании $\{0\} \times \bar{\Omega}$ или на его боковой поверхности $[0,T] \times \partial\Omega$, т.е.

$$E(t,x) \le \max\{ \sup_{t=0 \wedge \mathbf{x} \in \bar{\Omega}} E(t,x), \sup_{t \in [0,T] \wedge \mathbf{x} \in \partial\Omega} E(t,x) \} = C - const. \tag{3}$$

**Определение 1.** Будем говорить, что вектор скорости $U(t,x)$ имеет в точке $M_1(t', x')$ области $Q$ экстремум, если каждая компонента вектора скорости $U_\alpha(t,x)$, $\alpha = 1,2,3$, в этой же точке $M_1$ достигает локального экстремума (либо локального максимума, либо локального минимума).

Для доказательства теоремы 1 используются следующие утверждения.

**Лемма 1**[4]. Если плотность к. э. $E(t,x)$ в некоторой точке $M_1(t',x')$ области $Q=[0,T]\times\overline{\Omega}$ достигает своего максимума, тогда точка $M_1$ является стационарной точкой вектора скорости $\mathbf{U}$, т.е.

$$\nabla U_\alpha(M_1)=0,\quad \alpha=\overline{1,3}, \tag{4}$$

и $U$ в точке $M_1$ достигает локального экстремума. Причем, по крайней мере, в этой же точке $M_1$ одна из компонент вектора скорости $U$ достигает либо положительного максимума, либо отрицательного минимума.

*Доказательство.* По условию леммы в точке $M_1$ области $Q=[0,T]\times\overline{\Omega}$ выполняются необходимые условия экстремума функции $E(t,\mathbf{x})$ в точке $M_1$:

$$\nabla E(M_1)=0, \tag{5}$$

Откуда легко показывается соотношение (4). Для доказательства второй части леммы 1 рассмотрим достаточные условия локального максимума $E$ в точке $M_1$ относительно главных миноров симметрической матрицы

$$E=\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 E}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 E}{\partial x_1\partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 E}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 E}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 E}{\partial x_2\partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 E}{\partial x_1\partial x_3} & \dfrac{\partial^2 E}{\partial x_2\partial x_3} & \dfrac{\partial^2 E}{\partial x_3^2} \end{Vmatrix}$$

в виде $E_1(M_1)<0;$ $E_2(M_1)>0$ и $E_3(M_1)<0$, что присуще отрицательной определенности матрицы $E$, где главные миноры обозначены через $E_\beta$, и $\beta$ указывает порядок минора.

Дифференцируя плотность к.э. $E$, найдем элементы матрицы $E$:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_j},\ i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,3}.$$

Отсюда с учетом (4) запишем неравенство для первого главного минора:

$$E_1(M_1)=\sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_1^2}<0. \tag{6}$$

Это неравенство возможно тогда и только тогда, когда, по крайней мере, одна из компонент скорости удовлетворяет достаточному условию либо положительного максимума, либо отрицательного минимума по переменной $x_1$ в точке $M_1$, а остальные — отрицательного максимума (положительного минимума) и вектор $U$ достигает экстремума по переменной $x_1$.

В самом деле, при некотором $\alpha$ компонента $U_\alpha$ удовлетворяет достаточному условию положительного максимума (отрицательного минимума) по переменной $x_1$, тогда

$$U_\alpha>0\wedge\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_1^2}(M_1)<0 \quad \left(U_\alpha(M_1)<0\wedge\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_1^2}(M_1)>0\right),$$

тем самым

$$U_\alpha(M_1)\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_1^2}(M_1)<0\,. \tag{7}$$

Когда это неравенство выполняется при $\forall\alpha$, тогда все компоненты $U_\alpha$ удовлетворяют достаточному условию положительного максимума (отрицательного минимума) по переменной $x_1$ и выполняется (6). Однако этого может не быть, и в худшем случае только одна из компонент может удовлетворять достаточному условию положительного максимума (отрицательного минимума). А оставшиеся компоненты удовлетворяют достаточному условию либо отрицательного максимума, либо положительного минимума, и неравенство (6) выполняется при условии, когда имеет место неравенство

$$\left|U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_1^2}(M_1)\right|>\sum_{\beta\neq\alpha}U_\beta\frac{\partial U_\beta}{\partial x_1^2}(M_1)\,,$$

т.е. модуль левой части неравенства (7) должен превышать сумму остальных двух слагаемых в (6). Если это требование не имеет место, то вместе с ним и неравенство (6). Тогда остается случай, что любые две компоненты вектора скорости удовлетворяют достаточному условию либо положительного максимума, либо отрицательного минимума, а последняя компонента удовлетворяет достаточному условию отрицательного максимума (положительного минимума) и наверняка выполняется неравенство (6). Вектор $U$ достигает экстремума по переменной $x_1$. Теперь, используя (4), рассмотрим неравенство для главного минора второго порядка в точке $M_1$:

$$E_2(M_1)=\begin{vmatrix} E_1 & \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_1\partial x_2} \\ \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_1\partial x_2} & \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_2^2}\end{vmatrix}=E_1\sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_2^2}-\left(\sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2>0.$$

Отсюда, с учетом (6), минор $E_2$ будет положительным тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_2^2}<0.$$

Откуда, рассуждая так же, как в предыдущем случае, показывается, что вектор скорости $U$ достигает экстремума по переменной $x_2$ и, по крайней мере, одна из компонент удовлетворяет достаточному условию положительного максимума (отрицательного минимума) по переменной $x_2$ (заметим, что это именно та компонента, которая достигла положительного максимума (отрицательного минимума) по $x_1$), а остальные — отрицательного максимума (положительного минимума).

Наконец, займемся минором третьего порядка. Неравенство для минора $E_3(M_1)$, с учетом (4), запишем в точке $M_1$ в виде

$$E_3=\begin{vmatrix} E_1 & \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_1\partial x_2} & \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 E}{\partial x_1\partial x_3} \\ \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 E}{\partial x_1\partial x_2} & \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2} & \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 E}{\partial x_2\partial x_3} \\ \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 E}{\partial x_1\partial x_3} & \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 E}{\partial x_2\partial x_3} & \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 E}{\partial x_3^2}\end{vmatrix}\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{E_1}\begin{vmatrix} E_1 & \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_1\partial x_3} \\ \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_1\partial x_3} & \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_3^2}\end{vmatrix}E_2-\frac{1}{E_1}\begin{vmatrix} E_1 & \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_1\partial x_3} \\ \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_1\partial x_2} & \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_2\partial x_3}\end{vmatrix}^2<0. \qquad (8)$$

Справедливость последнего тождества можно проверить непосредственным вычислением определителей. С учетом знаков $E_1$ и $E_2$ из (8) приходим к выводу, что $E_3$ будет отрицательным тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} E_1 & \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_1\partial x_3} \\ \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_1\partial x_3} & \sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_3^2}\end{vmatrix}=E_1\sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_3^2}-\Big(\sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_1\partial x_3}\Big)^2>0.$$

Это неравенство возможно тогда и только тогда, когда $\sum_{\alpha=1}^{3}U_\alpha\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_3^2}<0.$ Опять-таки, как в предыдущих случаях, это неравенство имеет место тогда и только тогда, когда вектор скорости $U$ достигает экстремума по $x_3$ и, по крайней мере, одна из компонент удовлетворяет достаточному условию положительного максимума (отрицательного минимума) по переменной $x_3$ (снова заметим, что это именно та компонента, которая достигла положительного максимума (отрицательного минимума) по $x_1$ и $x_2$), а остальные — отрицательного максимума (положительного минимума). Лемма 1 доказана.

Для функции давления $P$ имеет место аналогичная

**Лемма 2** [6]. Если плотность к. э. $E\,(t,x)$ достигает своего максимума в некоторой точке $M_1(t',\mathbf{x}')$ области $Q=[0,T]\times\overline{\Omega}$, то точка $M_1$ является стационарной для функции давления $P$, т.е. справедливо равенство $\nabla P(M_1)=0$.

*Доказательство.* Запишем известную формулу из векторного анализа

$$(U,\nabla)U=\nabla E-[U,\omega], \tag{9}$$

где $[\cdot\,,\,\cdot]$ — векторное произведение; $\omega = rotU$.

По условию теоремы 1 вектор-функция $[U,\omega]$ непрерывна в ограниченной области $\Omega$ при $\forall t\in[0,T]$, тем самым $[U,\omega]\in L_2(\Omega)$ $\forall t\in[0,T]$. Тогда, следуя [1], вектор-функцию $[U,\omega]$ представим в виде ортогональной суммы:

$$[U,\omega]=\nabla R\ +\ V^{(J)}, \tag{10}$$

где $\nabla R\in G(\Omega)$, $V^{(J)}\in \overset{0}{J}(Q)$. Откуда заодно вычислим граничные значения $\nabla R$:

$$\left.\frac{\partial R}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0, \tag{11}$$

так как $V^{(J)}n\,|_{\partial\Omega}=0$ и $[U,\omega]n\,|_{\partial\Omega}=0$ соответственно, в силу $V^{(J)}\in\overset{0}{J}$ и (1d), где $n$ есть единичный вектор внешней нормали в точке x границы $\partial\Omega$.

Законность соотношения (10) следует из разрешимости задачи Неймана для $R$ с правой частью $div[U,\omega]$ и граничным условием (11).

Раскрывая операцию div из вектора функции $(U,\nabla)U$, запишем

$$\mathrm{div}((U,\nabla)U)=\sum_{\alpha,k=1}^{3}\frac{\partial U_\alpha}{\partial U_k}\frac{\partial U_k}{\partial U_\alpha}. \tag{12}$$

Отметим, что правая часть последней формулы обращается в нуль в точке $M_1$ экстремума вектора скорости $U$, так как в этой точке выполняются условия (4).

Формулу (9) с учетом представления (10) перепишем $(U,\nabla)U=\nabla E-\nabla R-V^{(J)}$.

Применяя оператор div к предыдущему соотношению и используя (12), получим:

$$\sum_{\alpha,k=1}^{3}\frac{\partial U_\alpha}{\partial U_k}\frac{\partial U_k}{\partial U_\alpha}=\Delta E-\Delta R. \tag{13}$$

Отсюда, благодаря (6), найдем

$$\Delta E(M_1)-\Delta R(M_1)=0.$$

Откуда $\Delta R(M_1)\le 0$, так как по условию леммы $\Delta E(M_1)\le 0$, т.е. для функции $R$ в точке $M_1\in Q$ выполняется необходимое условие локального максимума. Тем самым точка $M_1$ является стационарной для функции $R(t,x)$. Из чего следует, что $\nabla R(M_1)=0$.

Применим операцию $div$ к векторному уравнению (1a). Тогда с учетом (1b), получим уравнение Пуассона, связывающее давление $P$ с вектором скорости $U$:

$$-\Delta P=\mathrm{div}\{(U,\nabla)U\}. \tag{14}$$

Правую часть уравнения (14) заменим соответствующей величиной из формулы (13), а затем умножим на произвольную функцию $\eta(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ и с помощью интегрирования по частям получим

$$-\int_\Omega \nabla(P+E-R)\nabla\eta\ dx=0\quad \forall t\in[0,T].$$

Откуда, благодаря произвольности $\nabla\eta$, имеем: $\nabla P(t,x)+\nabla E(t,x)-\nabla R(t,x)=0,\ \forall(t,x)\in Q.$ Это тождество запишем в точке $M_1\in Q$ $\nabla P(M_1)+\nabla E(M_1)-\nabla R(M_1)=0.$

Откуда следует: $\nabla P(M_1)=0$, так как $\nabla E(M_1)=0$ и $\nabla R(M_1)=0$ в точке $M_1\in Q$ экстремума вектора скорости U. Лемма 2 доказана.

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся известным приемом [4; 511]. Предположим противное, т.е. функция $E(t,x)$ достигает своего максимального значения в некоторой точке $M_0(t^0,x^0)$ внутри области $\bar{Q}=[0,T]\times\bar{\Omega}$:

$$E\left(M_0\right)>\max\{\sup_{t=0\wedge x\in\bar{\Omega}} E(t,x),\quad \sup_{t\in[0,T]\wedge x\in\partial\Omega} E(t,x)\}=C\geq 0. \tag{15}$$

Обозначим $m=E(t^0,x^0)-C>0$ и введем функцию $H(t,\mathrm{x})=E(t,\mathrm{x})+\dfrac{m}{2}\Big(1-\dfrac{t}{T}\Big)$. Функция $H(t,x)$ также принимает свое максимальное значение в некоторой точке $M_1\in Q$, причем

$$H(M_1)\geq H(M_0)\geq m\,.$$

Используя результаты лемм 1, 2, выпишем все необходимые условия максимума функции $H$ в точке $M_1$:

$$\frac{\partial H}{\partial t}\geq 0;\ \ \Delta H\leq 0:\ \Rightarrow\left\{\nabla H=0;\ \ \nabla U_\alpha=0,\ \alpha=\overline{1,3};\ \nabla P=0\right\}. \tag{16}$$

Из уравнения (2) с учетом условий (16) найдем для точки $M_1$ цепь неравенств:

$$NH\equiv\frac{\partial H}{\partial t}-\mu\Delta H+(\nabla H,U)+\mu\sum_{\alpha=1}^{3}|\nabla U_\alpha|^2+(\nabla P,U)+\frac{m}{2T}\geq\frac{m}{2T}>0.$$

Это означает, что неравенство (15) неверно. Следовательно, справедливо (3). Теорема 1 доказана.

Теорема 1 и леммы 1, 2 позволяют сформулировать следующий принцип максимума для уравнений (1a).

**Следствие 1.** Пусть в $\bar{Q}=[0,T]\times\bar{\Omega}$ — цилиндрической области с границей $[0,T]\times\partial\Omega$ в пространстве переменных $t,\ x$ функции $\left(P,\ U_\alpha,\ \alpha=\overline{1,3}\right)\in C(\bar{Q})\cap C^2(Q)$ удовлетворяют уравнению (1a). Тогда каждая функция $U_\alpha$ принимает свой положительный максимум (отрицательный минимум) в цилиндре $\bar{Q}$ на нижнем основании $\{0\}\times\bar{Q}$ или на его боковой поверхности $[0,T]\times\partial\Omega$, т.е.

$$U_\alpha(t,x)\leq\max\{\sup_{t=0\wedge x\in\bar{\Omega}}U_\alpha(t,x),\quad \sup_{t\in[0,T]\wedge x\in\partial\Omega}U_\alpha(t,x)\},\quad (t,x)\in\bar{Q}; \tag{17a}$$

$$\left(U_\alpha(t,x)\geq\min\{\inf_{t=0\wedge x\in\bar{\Omega}}U_\alpha(t,x),\quad \inf_{t\in[0,T]\wedge x\in\partial\Omega}U_\alpha(t,x)\},\quad (t,x)\in\bar{Q}\right),\ \alpha=\overline{1,3}. \tag{17b}$$

**Доказательство.** По теореме 1 плотность к. э. принимает свой максимум в цилиндре $\bar{Q}$ на нижнем основании $\{0\}\times\bar{Q}$ или на его боковой поверхности $[0,T]\times\partial\Omega$, вместе с ним по лемме 1 хотя бы одна из функций $U_\alpha(t,x),\ \alpha=1,\,2,\,3$, имеет либо положительный максимум, либо отрицательный минимум в точке, где функция $E$ достигает локального максимума. Откуда имеем (17). Отсюда, следуя [4; 513], можно получить доказательство следующего утверждения.

**Следствие 2.** Если вектор-функция $U(t,x)$ — классическое решение начально-краевой задачи уравнений Навье-Стокса (1) и вектор-функции $f,\ \Phi$ удовлетворяют условиям **i**) и **ii**), то справедлива оценка

$$\left\|U\right\|_{C(\bar{Q})}\leq\left\|\Phi\right\|_{C(\bar{\Omega})}+T\left\|f\right\|_{C(\bar{Q})}\equiv A_1\quad\forall T<\infty,$$

где

$$\left\|U\right\|_{C(\bar{Q})}=\max_{1\leq\alpha\leq 3}\sup_{\bar{Q}}|U_\alpha(t,x)|\,. \tag{18}$$

**Слабые обобщенные решения.** Умножим уравнение (1a) на произвольную вектор-функцию $Z(t,x)\in C(\bar{Q})\cap W_2^1(Q)$, равную нулю при $(t=T)\wedge(x\in\partial\Omega)$. Произведение проинтегрируем по области $Q$ и с помощью интегрирования по частям из первых двух слагаемых производные перенесем с $U$ на $Z$. В результате получим:

$$\int_Q\Big(-UZ_t+\mu\sum_{k=1}^{3}\nabla U_k\nabla Z_k+((U,\nabla)U+\nabla P)Z\Big)\,dxdt=\int_\Omega\Phi Z(0,x)dx+\int_Q fZdxdt\,. \tag{19a}$$

Уравнения (1a) еще раз умножим на градиент произвольной однозначной функции $\eta\in L_\infty(0,T;W_2^1(Q))$, и результат проинтегрируем по области $\Omega$. Откуда, с учетом условий (1d), (1c) и ортогональности подпространств $G(\Omega)$, $\overset{0}{J}(\Omega)$, получим тождество

$$\int_Q \nabla P\nabla\eta\, dxdt=-\int_Q (U,\nabla)U\nabla\eta\, dxdt \quad \forall t\in[0,T]. \tag{19b}$$

**Определение 2**[♦]. Назовем слабым обобщенным решением начально-краевой задачи Навье-Стокса (1) вектор-функцию $U$ и функцию $P$ из пространств

$$U\in C(\overline{Q})\cap L_2\Big(0,T;W_{2,0}^1(\Omega)\cap \overset{0}{J}(\Omega)\Big);\; P\in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\wedge\Big(\int_\Omega P(t,x)\,dx=0, t\in[0,T]\Big),$$

удовлетворяющие тождествам (19) при любых

$$Z(t,x)\in C(\overline{Q})\cap W_2^1(Q)\wedge\Big(Z\big|_{(t=T)\wedge(x\in\partial\Omega)}=0\Big);\; \eta(t,x)\in L_\infty\Big(0,T;W_2^1(\Omega)\Big).$$

Для справедливости этого определения все интегралы, входящие в (18), должны быть конечны для любых $Z,\eta$ из указанных классов.

**Лемма 3**. Если входные данные задачи (1) удовлетворяют требованиям **i), ii)**, то для слабого обобщенного решения задачи (1) справедливы оценки:

$$\|U\|^2_{L_\infty((0,T];L_2(\Omega))}\le 2\|\Phi\|^2_{L_2(\Omega)}+4T^2\|f\|^2_{L_\infty((0,T];\; L_2(\Omega))}=A; \tag{20}$$

$$\sum_{k=1}^3\int_0^t\|\nabla U_k(\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}d\tau\le\frac{1}{\mu}\|\Phi\|^2_{L_2(\Omega)}+\frac{2T^2}{\mu}\|f\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}=A_2; \tag{21}$$

$$\|\nabla P\|^2_{L_2(Q)}\le\|(U,\nabla)U\|^2_{L_2(Q)}\le 9A_1^2A_2\equiv A_3. \tag{22}$$

Неравенства, аналогичные (20), (21), известны давно, например, из [1; 184]. Для доказательства (22) используем следующую цепочку:

$$\|(U,\nabla)U\|^2_{L_2(Q)}=$$

$$=\int_Q((U,\nabla)U)^2dxdt\le 3\int_Q|U|^2\sum_{k=1}^3|\nabla U_k|^2dxdt\le 9\max_k\|U_k\|^2_{L_\infty(\Omega)}\sum_{k=1}^3\int_0^T\|\nabla U_k\|^2_{L_2(\Omega)}dt. \tag{23}$$

Здесь были последовательно использованы неравенства Коши-Буняковского для векторного произведения и Гельдера при $p=\infty\wedge q=1$. Из (19b) и (23), на основании оценок (18), (21), следует (22). Лемма 3 доказана.

Из принципа максимума и полученных априорных оценок следует однозначная разрешимость задачи (1).

**Теорема 2** [5]. Если входные данные $f$ и $\Phi$ удовлетворяют соответственно требованиям **i), ii)**, тогда задача (1) имеет слабое единственное обобщенное решение $U$ и $P$, удовлетворяющее тождеству (19) при любых $Z$ и $\eta$ из определения 2.

*Доказательство.* Пусть пара функций $\{U,P\}$ и $\{U^*,P^*\}$ — два решения задачи (1). Положим $V=U-U^*$, $R=P-P^*$, тогда обычным приемом из задачи (1) переходим к тождеству

$$\int_{Q_t}\Big(\frac{\partial V}{\partial t}V-\mu\Delta VV+(V,\nabla)UV+(U^*,\nabla)VV+\nabla RV\Big)dxd\tau=0\quad\forall t\in(0,T]. \tag{24}$$

В силу ортогональности подпространств $\overset{0}{J}(Q)$ и $G(Q)$ четвертый и пятый члены (24) исчезают. Все остальные члены преобразуем с помощью интегрирования по частям, тогда из (24) найдем

$$0.5\|V(t)\|^2_{L_2(\Omega)}+\mu\sum_{k=1}^3\int_0^t\|\nabla V_k(\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}d\tau=-\int_{Q_t}\sum_{k,\beta=1}^3V_\beta\frac{\partial V_k}{\partial x_\beta}U_kdxd\tau. \tag{25}$$

Интеграл в правой части оценим последовательно по неравенству Гельдера при $p=\infty\wedge q=1$ и Юнга при $p=2$, в результате получим неравенство

[♦] Здесь, благодаря принципу максимума, слабые обобщенные решения рассматриваются в более узком классе функций, чем в [1].

$$\int\limits_{Q_t}\sum_{k,\beta=1}^{3}V_k\frac{\partial V_k}{\partial x_\beta}U_k\,dxd\tau \le A_1\varepsilon/2\sum_{k=1}^{3}\int\limits_0^t\|\nabla V_k(\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}d\tau + A_4\int\limits_0^t\|V(\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}\,d\tau,\quad A_4=\frac{3A_1}{2\varepsilon}.$$

Принимая во внимание оценки (18), (21) и воспользовавшись последним неравенством при $\varepsilon = 2\mu/A_1$ из (25), найдем: $\dfrac{d}{dt}(\exp(-A_4 t)\|V(t)\|^2_{L_2(\Omega)})\le 0\ \ \forall t\in(0,T]$. Отсюда заключим, что $V\equiv 0\ \ \forall t\in(0,T]$, т.е. что решения $U$ и $U^*$ совпадают. Теперь с помощью функционального уравнения (19b), учитывая только что доказанную единственность $U$, получим интегральное соотношение для $\nabla R$:

$$\int\limits_\Omega \nabla R\nabla\eta\, dx = 0\ \ \forall t\in[0,T].$$

Отсюда, благодаря $\forall\nabla\eta$, получаем $\nabla R\equiv 0$, т.е. градиент давления $P$ из определения 2 находится единственным образом через вектор-функцию $U$. Теорема 2 доказана.

**Сильные решения**

**Определение 3.** Если в области $Q$ решение начально-краевой задачи Навье-Стокса (1) имеет всевозможные обобщенные производные того же порядка, что и сами уравнения, то это обобщенное решение называется сильным.

**Теорема 3.** Если входные данные задачи (1) удовлетворяют требованиям **i), ii)** и граница области $\partial\Omega\in C^2$, тогда у задачи (1) существует сильное единственное обобщенное решение $U$ и $P$ из пространств

$$U\in W^{2,1}_{2,0}(Q)\cap \overset{0}{J}_\infty(Q);\ P\in L_2(0,T;W_2^2(\Omega))\wedge(\int\limits_\Omega P dx = 0\ \forall t\in[0,T]),$$

удовлетворяющее уравнениям (1) и почти всюду в $Q$ и для них имеют место оценки:

$$\|U_t\|^2_{L_2(Q)}\le\mu\sum_{k=1}^{3}\|\nabla\Phi_k\|^2_{L_2(\Omega)}+5A_3+2T\|f\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\equiv A_5,\ \ U_t=\frac{\partial U}{\partial t};\tag{26}$$

$$\|\Delta U\|^2_{L_2(Q)}\le A_5/\mu^2\equiv A_6;\tag{27}$$

$$\|\nabla U_k\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\le A_5/\mu\equiv A_7,\ k=\overline{1,3};\tag{28}$$

$$\|\nabla P\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\le 3A_1^2\,A_7\equiv A_{10}.\tag{29}$$

$$\|U\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))}\le A_8\|\Delta U\|_{L_2(Q)},\qquad A_8-const;\tag{30}$$

$$\|P\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))}\le A_p\|\Delta P\|_{L_2(Q)}\le A_c\|U\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))},\ \ A_p, A_c\text{ — }const.\tag{31}$$

Для доказательства неравенства (26) из уравнения (1) найдем тождество

$$\int\limits_{Q_t}\left(U_t-\mu\Delta U\right)^2dxd\tau=\int\limits_{Q_t}\left(f-(U,\nabla)U-\nabla P\right)^2\ dx\,d\tau$$

и будем возводить в квадрат подынтегральные выражения. После этого парное произведение в левой части преобразуем с помощью интегрирования по частям, а в правой части таковые усилим по неравенству Юнга при $\varepsilon=1\wedge p=2$. Затем переходим к неравенству

$$\int\limits_{Q_t}U_t^2\,dx\,d\tau+\mu^2\int\limits_{Q_t}(\Delta U)^2\,dx\,d\tau+\mu\sum_{k=1}^{3}\int\limits_\Omega|\nabla U_k|^2\,dx\le$$

$$\le\mu\sum_{k=1}^{3}\int\limits_\Omega\|\nabla\Phi_k\|^2\,dx+2\int\limits_{Q_t}f^2\,dxd\tau+5\int\limits_{Q_t}((U,\nabla)U)^2\,dx\,d\tau.$$

Из последнего неравенства с учетом (22) получаем оценки (26)–(28) для сильных обобщенных решений задачи (1). Причем (28) является лучшей оценкой, чем (21). Далее, из (19а) находим неравенство

$$\int\limits_\Omega\left|\nabla P^2\right|dx\le\int\limits_\Omega|U|^2\sum_{k=1}^{3}|\nabla U_k|^2\,dx.$$

Оценив правую часть, по неравенству Гельдера при $p=1\wedge q=\infty$, имеем:

$$\int\limits_\Omega\left|\nabla P^2\right|dx\le 3\|U(t)\|^2_{L_\infty(\Omega)}\int\limits_\Omega\sum_{k=1}^{3}|\nabla U_k|^2\,dx,\ \forall t\in[0,T].$$

Отсюда, используя (28), приходим к (29).

Теперь покажем, что $\Delta P \in L_2(Q)$. Так как граница области $\partial\Omega \in C^2$, найдем оценку (30), используя неравенства из [1; 26], справедливого для любой функции $U(x) \in W_2^2(\Omega) \cap W_{2,0}^2(\Omega)$

$$\| U \|_{W_2^2(\Omega)} \le A_8 \|\Delta U \|_{L_2(\Omega)} \quad \forall t \in [0,T], \; A_8 - const.$$

Оценку для $\Delta P$ находим из соотношения

$$\Delta P = \sum_{\alpha,k=1}^{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_k},$$

найденного из векторного уравнения (1a) с применением операции div и с учетом (1b).

Возведя обе части последнего соотношения в квадрат, проинтегрируем по области $Q$. Затем, произведя оценку в правой части, получаем неравенство:

$$\int_Q (\Delta P)^2 \, dxdt \; \le 9 \sum_{k,\alpha=1}^{3} \int_Q \left| \frac{\partial U_k}{\partial x_\alpha} \right|^4 \, dx\,dt \quad \forall t \in [0,T]. \tag{32}$$

Из теорем вложения Соболева имеем, что $W_2^2(\Omega) \subset W_{6-\varepsilon}^1(\Omega) \;\; \forall \varepsilon > 0$. Отсюда при $\varepsilon = 2$ следует неравенство

$$\| U_k \|_{W_4^1(\Omega)} \le A_9 \| U_k \|_{W_2^2(\Omega)} \quad \forall t \in [0,T],$$

где $A_9$ — некоторая постоянная. На основании последнего неравенства и (27), (30) из (32) найдем оценку (31). Вектор-функция $U$ и функция давления $P$, подчинённые оценкам (26)–(31), удовлетворяют уравнениям (1а) почти всюду в области $Q$. Теорема 3 доказана.

*Автор выражает благодарность В.В.Смелову, В.П.Ильину, М.М.Арипову, М.Д.Рамазанову, Ш.С.Сахаеву, М.И.Рамазанову за поддержку и полезные советы и признателен М.О.Отелбаеву, Т.Ш.Кальменову, Г.М.Кобелькову, М.Т.Дженалиеву за высказанные замечания.*

## References

1. *Ladyzhenskaya O.A.* Mathematical problems of dynamics viscous incompressible fluids. — M.: Nauka, 1970. — 288 p.
2. *Ladyzhenskaya O.A.* The 6th problem of millennium: the Navier-Stokes equations, existence and smoothness // UMN. — 2003. — 58:2 (350). — P. 45–78.
3. *Fefferman Ch.* Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation // http: // claymath.org / Millenium Prize Problems / Navier-Stokes Equations. — Cambridge: MA: Clay Mathematics Institute. — 2000. — P. 1–5.
4. *Vladimirov V.S.* The equations of mathematical physics. — M.: Nauka, 1981. — 612 p.
5. *Akysh A.Sh.* About problem of theory of Navier-Stokes equations // Works of 6th conference of Russian-Kazakh working group of computing and informational technologies (16–18 Marth 2009). — Almaty: Kasakh University, 2009. — P. 54–61.
6. *Akysh A.Sh.* About lemm of mathematical theory of the Navier-Stokes equations // Materials III of International scientific conf. «Actual problems of mechanics and buildingmashine» (17–19 June 2009). — Almaty, 2009. — Vol. 3.
7. *Akysh A.Sh.* About stationary points of pressure of the Navier-Stokes equations // Transactions of the international conference «Modern problems of applied mathematics and information technologies — Al Khorezmiy». — Tashkent, 2009. — Vol. 1. — P. 43–47.