Если λ — точка спектра оператора L, то λ является точкой спектра одного из операторов (20). И наоборот, если λ — точка спектра одного из операторов (21), то λ является точкой спектра оператора L. Теперь, если воспользоваться предположением теоремы 1 о том, что $\lambda = 0$ является собственным значением конечной кратности, то теорема 1 легко следует из леммы 1.

Доказательство теоремы 2. Аналогично рассуждая и пользуясь леммой 2, получаем доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. В теореме 3 мы предполагали, что оператор A — положительно определенный, самосопряженный, с вполне непрерывным обратным. С этим связано то обстоятельство, что наименьшее собственное число этого оператора отлично от нуля. Теперь доказываемая теорема следует из леммы 4.

References

1. *Muratbekov M., Serikbaev Zh.* About properties of decisions of one class of the differential equations with operational factor // Mathematical magazine. — 2008. — T. 8 — № 1 (27). — P. 64–74.
2. *Muratbekov M.B.* Two-sides of the distribution function of s-values of class of mixed type differential operators. Complex Variables and Elliptic Equations. — University of Delaware, Newark, USA and RWTH Aachen, Germany. — 2007. — Vol. 52. — № 12. — P. 1121–1144.
3. *Otelbaev M.* Estimation of Storm–Liuville operators spectrum. — Alma-Ata: Gylym, 1990. — 192 p.

УДК 517.9

Оценки резольвент-корректных дифференциальных операторов на отрезке

Estimations resolvents correct differential operators on the interval

Нурахметов Д.Б., Кангужин Б.Е.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы (e-mail: daulet_arg@mail.ru, dauletkaznu@gmail.com)

Мақалада Биркгоф бойынша регулярлы ішкі шекаралық шарттар деп аталатын шекаралық шарттардың түрі нақтылы көрсетіліп, осындай шарттарға бағынатын, кесіндідегі корректі дифференциалдық операторлардың резольвенталары бағалаулары зерттелді. Көрнекілік үшін барлық нәтижелер кесіндіде реті тақ біртекті емес айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеулер үшін көрсетілді. Жұп рет үшін де ұқсасынша қарастырылды. Қорытындыда кесіндіде реті тақ біртекті емес айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеулер үшін резольвенталарының бағалауы келтірілді. Жұмыс әдісі бойынша [2, 3] еңбектерге жақын.

In this paper we select those boundary conditions, which we call regular internal boundary conditions for Birkhoff, and investigate the estimations of the resolvents of correct differential operators on the interval, subordinates in such conditions. For clarity, all results are illustrated by the non-homogeneous differential equations of odd order with variable coefficients on the interval. Similarly, study and even order. In conclusion, we present estimates of the resolvent for the non-homogeneous differential equation of odd order with variable coefficients on the interval. The method of ideologically similar to the methods of [2, 3].

1. Постановка задачи. В функциональном пространстве $L_2[0,b]$ рассмотрим оператор L_0, порожденный обыкновенным дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{(n)}(x) + p_2(x)y^{(n-2)}(x) + \cdots + p_n(x)y(x)$$

и регулярными двухточечными краевыми условиями [1]:

$$V_j(y) = \alpha_j y^{(k_j)}(0) + \sum_{\nu=0}^{k_j-1} \alpha_{j\nu} y^{(\nu)}(0) + \beta_j y^{(k_j)}(b) + \sum_{\nu=0}^{k_j-1} \beta_{j\nu} y^{(\nu)}(b) = 0,\ j = 1,...,n,$$

$$n-1 \ge k_1 \ge k_2 \ge ... \ge k_n \ge 0,\ k_{j+2} < k_j.$$

Предполагаем, что коэффициенты $p_k(x)$ являются k раз дифференцируемыми на $[0,b]$ функциями. Не умаляя общности, можно считать, что в пространстве $L_2[0,b]$ существует ограниченный обратный оператор L_0^{-1}. В работе [2] доказано следующее утверждение.

Теорема (М.Отелбаев). а) При любом наборе функций $\{\sigma_j(x), j=1,...,n\}$ из пространства $L_2[0,b]$ внутренне краевой задаче

$$l(y)=f(x),\ x\in(0,b), \tag{1}$$

$$V_j(y)-\int_0^b l(y)\sigma_j(x)dx=0,\ j=1,...,n, \tag{2}$$

в пространстве $L_2[0,b]$ соответствует оператор L, который имеет ограниченный обратный L^{-1}.

б) Пусть неоднородное уравнение (1) с некоторыми дополнительными условиями при любой правой части $f(x)\in L_2[0,b]$ имеет единственное решение $y(x)$ в пространстве $W_2^{n-1}[0,b]$, для которого выполняется априорная оценка

$$\|y\|_{L_2[0,b]}\le c\|f\|_{L_2[0,b]}.$$

Тогда найдется единственный такой набор функции $\{\sigma_j(x), j=1,...,n\}$ из пространства $L_2[0,b]$, что дополнительные условия эквивалентны условиям (2). Оператор соответствующей задаче (1)–(2) будем обозначать через L.

В настоящей работе выделим такие $\{\sigma_j(x), j=1,...,n\}$ из пространства $L_2[0,b]$, которые назовем регулярными внутренне краевыми условиями по Биркгофу, и исследуем оценки резольвенты операторов L, подчиненных таким условиям.

2. Регулярные внутренне краевые условия. Нам удобно рассмотреть интеграл $I_j(y)=\int_0^b l(y)\sigma_j(x)dx$ и преобразовать его следующим образом:

$$I_j=\int_0^b y^{(n)}(x)\sigma_j(x)dx+\sum_{k=0}^{n-2}\int_0^b y^{(k)}(x)p_k(x)\sigma_j(x)dx.$$

Предполагаем, что $\sigma_j(x)$ представляет $(n-k_j)$ раз дифференцируемую функцию, причем

$$\sigma(0)=\sigma_j^{(1)}(0)=...=\sigma_j^{(n-k_j-1)}(0)=0,$$

$$\sigma(b)=\sigma_j^{(1)}(b)=...=\sigma_j^{(n-k_j-1)}(b)=0.$$

Тогда из формулы Лагранжа следует:

$$\begin{aligned}I_j&=y^{(n-1)}(x)\sigma_j(x)\Big|_0^b-y^{(n-2)}(x)\sigma_j^{(1)}(x)\Big|_0^b+...+(-1)^{n-k_j-1}y^{(k_j)}(x)\sigma_j^{(n-k_k-1)}(x)\Big|_0^b+\\&+(-1)^{n-k_j}\int_0^b y^{(k_j)`}(x)\sigma_j^{(n-k_j)}(x)dx+\sum_{k=k_j+1}^{n-2}(-1)^{k-k_j}\int_0^b y^{(k_j)}(x)(p_k(x)\sigma_j(x))^{(k-k_j)}dx+\\&+\sum_{k=0}^{k_j}\int_0^b y^{(k)`}(x)p_k(x)\sigma_j(x)dx=\int_0^b y^{k_j}(x)((-1)^{n-k_j}\sigma_j^{(n-k_j)}(x)+\\&+\sum_{k=k_j+1}^{n-2}(-1)^{k-k_j}(p_k(x)\sigma_j(x))^{(k-k_j)}+p_{k_j}(x)\sigma_j(x))dx+\sum_{k=0}^{k_j-1}y^{(k)}(x)p_k(x)\sigma_j(x)dx.\end{aligned} \tag{3}$$

Обозначим левую часть краевого условия через $U_j(y)$. Тогда с учетом соотношения (3) она примет вид

$$U_j\equiv V_j(y)-\sum_{t=0}^{k_j}\int_0^b y^{(t)}(x)s_{t,j}(x)dx, \tag{4}$$

где

$$s_{k_j,j}(x)=(-1)^{n-k_j}\sigma^{n-k_j}(x)+\sum_{k=k_j+1}^{n-2}(-1)^{k-k_j}(p_k(x)\sigma_j(x))^{(k-k_j)}+p_{k_j}(x)\sigma_j(x);$$

$$s_{t,j}=p_t(x)\sigma_j(x),\ t=0,...,k_j-1. \qquad (5)$$

Определение 1. Внутренне краевые условия (2) назовем регулярными по Биркгофу, если граничные функции $\sigma_1(x),...,\sigma_n(x)$ удовлетворяют требованиям $\sigma_j(x)\in W_2^{(n-k_j)}[0,b]$,

$$\sigma_j(0)=0,\sigma_j^{(1)}(0)=0,...,\sigma_j^{(n-k_j-1)}(0)=0, \qquad (6)$$
$$\sigma_j(b)=0,\sigma_j^{(1)}(b)=0,...,\sigma_j^{(n-k_j-1)}(b)=0.$$

Иначе говоря, краевые условия (2) являются регулярными по Биркгофу, если их можно записать в виде (4) с некоторыми функциями $s_{k_j,j}(x)$ из пространства $L_2[0,b]$.

3. Асимптотика собственных значений. В регулярном случае можно найти асимптотику собственных значений оператора L. Известно, что искомые собственные значения являются нулями характеристического определителя

$$\Delta(\lambda)=\frac{\det\left\|U_j(y_k(x,\lambda))\right\|_{j,k=1}^{n}}{\det\left\|y_k^{(\nu-1)}(x,\lambda)\right\|_{\nu,k=1}^{n}}, \qquad (7)$$

где $y_1(x,\lambda),y_2(x,\lambda),...,y_n(x,\lambda)$ — произвольная фундаментальная система решений однородного уравнения $l(y)-\lambda y=0,\ 0<x<b.$ Удобно сначала разбить комплексную ρ-плоскость на конечное число секторов $S_1,...,S_{2n}$ и затем в каждом из указанных секторов выбрать фундаментальную систему решений $y_1(x,\rho),...,y_n(x,\rho)$ уравнения $l(y)-\rho^n y=0$ с асимптотикой:

$$y_k^{s-1}(x,\rho)=\omega_k^{s-1}\rho^{s-1}e^{\omega_k\rho x}[1],k,s=1,...,n,\rho\in S_\nu, \qquad (8)$$

где $\omega_k^n=-1,[A]=A+O(\frac{1}{\rho}),\ \rho\to\infty$. При этом в каждом секторе S_ν для чисел $\omega_1,\omega_2,...,\omega_n$ существует индивидуальная нумерация такая, что

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1)\le\operatorname{Re}(\rho\omega_2)\le...\le\operatorname{Re}(\rho\omega_n),\ \rho\in S_\nu. \qquad (9)$$

Для конкретности подробно рассмотрим случай $n=2\mu-1$. Случай $n=2\mu$ исследуется аналогично. Если $n=2\mu-1$, то выполняются неравенства

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1)\le\operatorname{Re}(\rho\omega_2)\le...\le\operatorname{Re}(\rho\omega_{\mu-1})<0,$$
$$0<\operatorname{Re}(\rho\omega_{\mu+1})\le\operatorname{Re}(\rho\omega_{\mu+2})\le...\le\operatorname{Re}(\rho\omega_n). \qquad (10)$$

Таким образом, при $n=2\mu-1$ справедливы неравенства (9), (10), поэтому, аналогично тому, как это сделано в [1; 76–77], получаем:

$$U_j(y_k(x,\rho))=\{\alpha\}\rho^{k_j}\omega^{k_j},\ k<\mu,$$
$$U_j(y_k(x,\rho))=\{\beta\}\rho^{k_j}\omega_k^{k_j}\exp(\rho\omega_j b),\ k>\mu,$$
$$U_j(y_\mu(x,\rho))=\{(\alpha\}+\exp(\rho\omega_\mu b)\{\beta_\mu\})\rho^{k_j}\omega_\mu^{k_j}, \qquad (11)$$

где $\{A\}=A+\overline{\overline{O}}(1)$ при $\rho\to\infty$. При выводе асимптотических соотношений (11) использовались представления (4), (5) и неравенства (9), (10). Из соотношений (11) и (8) следует, что характеристический определитель $\Delta(\rho)$, определяемый по формуле (7), можно оценить следующим образом:

$$\Delta(\rho)=\frac{\rho^{k_1+k_2+....+k_n}e^{\rho(\omega_{\mu+1}+\omega_{\mu+2}+...+\omega_n)}b}{\rho^{1+2+...+(n-1)}}\Delta_0(\rho),$$

где

$$\Delta_0(\rho)=\begin{vmatrix}\{\alpha_1\omega_1^{k_1}\} & \dots & \alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\{\alpha_1\}+\{\beta_1\}e^{\rho\omega_\mu b})\omega_\mu^{k_1} & \{\beta_1\omega_{\mu+1}^{k_1}\} & \dots & \{\beta_1\omega_n^{k_1}\}\\ \{\alpha_2\omega_1^{k_2}\} & \dots & \alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\{\alpha_2\}+\{\beta_2\}e^{\rho\omega_\mu b})\omega_\mu^{k_2} & \{\beta_2\omega_{\mu+1}^{k_2}\} & \dots & \{\beta_2\omega_n^{k_2}\}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \{\alpha_n\omega_1^{k_n}\} & \dots & \alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\{\alpha_n\}+\{\beta_n\}e^{\rho\omega_\mu b})\omega_\mu^{k_n} & \{\beta_n\omega_{\mu+1}^{k_n}\} & \dots & \{\beta_n\omega_n^{k_n}\}\end{vmatrix}.$$

Таким образом, нули $\Delta(\rho)$ асимптотически совпадают с нулями $\Delta_0(\rho)$. Аналогичные рассуждения верны и в других секторах. Следовательно [1; 74], справедлива

Теорема 1. Для собственных значений оператора L, соответствующих внутренней краевой задаче (1), (2), выполняется асимптотическое соотношение при $m \to \infty$

$$\lambda_m^{\pm} = (\pm 2m\pi i)^n \left(1 - \frac{n \ln \xi^{\pm}}{2m\pi i} + \overline{\overline{O}}\left(\frac{1}{m}\right)\right)^n,$$

где $\xi^{\pm}$ — некоторые константы, если граничные функции $\sigma_1(x),...,\sigma_n(x)$ удовлетворяют требованиям (6).

4. Резольвента оператора. Оператор, соответствующий задаче (1), (2), здесь будем обозначать через L_σ. Это сделано для того, чтобы подчеркнуть зависимость L_σ от набора граничных функций $\{\sigma_j(x),\ j = 1,...,n\}$ из пространства $L_2[0,b]$. При нулевом наборе граничных функций $\sigma_j \equiv 0, j = \overline{1,n}$, соответствующий оператор обозначим через L_0. В таком случае справедлива

Теорема 2. Для произвольного набора $\{\sigma_j(x), j = \overline{1,n}\}$ из пространства $L_2[0,b]$ резольвента оператора L_σ имеет представление

$$(L_\sigma - \lambda I)^{-1} f(x) = (L_0 - \lambda I)^{-1} f(x) + \sum_{\nu=1}^{n} < f; L_0^*(L_0^* - \overline{\lambda} I)^{-1}\sigma_\nu > L_\sigma (L_\sigma - \lambda I)^{-1} \phi_\nu(x), \tag{12}$$

где $< f, g >$ — скалярное произведение $L_2[0,b], \{\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)\}$ — специальная фундаментальная система решений уравнения $l(\varphi) = 0,$ с условиями $V_j(\varphi_\nu) = \delta_{j\nu},$ L_0^* — сопряженный оператор.

Доказательство теоремы 2. Правую часть соотношения (12) обозначим через $y(x,\lambda)$. Введем обозначения:

$$y_0(x,\lambda) = (L_0 - \lambda I)^{-1} f(x),$$
$$c_j =< f, L_0^*(L_0^* - \overline{\lambda} I)^{-1}\sigma_j >,\ j = \overline{1,n}.$$

Тогда

$$y(x,\lambda) = y_0(x,\lambda) + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu L_\sigma (L_\sigma - \lambda I)^{-1} \varphi_\nu(x).$$

Покажем, что $y(x,\lambda)$ является решением уравнения $l(y) - \lambda y = f(x).$ Непосредственное вычисление подтверждает это:

$$l(y(x,\lambda)) - \lambda y(x,\lambda) = l(y_0) - \lambda y_0 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu [l(L_\sigma(L_\sigma - \lambda I)^{-1}\varphi_\nu(x)) - \lambda L_\sigma (L_\sigma - \lambda I)^{-1}\varphi_\nu(x)] =$$
$$= f(x) + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu [\lambda L_\sigma (L_\sigma - \lambda I)^{-1}\varphi_\nu(x)) - \lambda L_\sigma (L_\sigma - \lambda I)^{-1}\varphi_\nu(x)] = f(x).$$

Теперь проверим выполнение краевых условий. Рассмотрим

$$U_j(y(x,\lambda)) = U_j(y_0(x,\lambda)) + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu U_j(L_\sigma(L_\sigma - \lambda I)^{-1}\varphi_\nu(x)) = V_j(y_0(x,\lambda)) -$$
$$- < L_0(L_0 - \lambda I)^{-1} f(x); \sigma_j > + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu (U_j(\varphi_\nu(x)) + \lambda U_j((L_\sigma - \lambda I)^{-1}\varphi_\nu(x))) =$$
$$= \left| \begin{matrix} V_j(y_0) = 0, \\ U_j((L_\sigma - \lambda I)^{-1}\varphi_\nu) = 0 \end{matrix} \right| = - < L_0(L_0 - \lambda I)^{-1} f(x), \sigma_j(x) > + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu (V_j(\varphi_\nu(x)) - < l(\varphi_\nu), \sigma_j >) =$$
$$= |l(\varphi_\nu) = 0| = - < L_0(L_0 - \lambda I)^{-1} f(x), \sigma_j(x) > + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu V_j(\varphi_\nu(x)) = \left|V_j(\varphi_\nu(x)) = \delta_{j\nu}\right| =$$
$$= - < L_0(L_0 - \lambda I)^{-1} f(x), \sigma_j(x) > + c_j = 0.$$

Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

Замечание 1. В ходе доказательства теоремы 2 нами получено соотношение

$$U_j(L_\sigma(L_\sigma - \lambda I)^{-1}\varphi_\nu) = \delta_{j\nu}.$$

Замечание 2. Также из доказательства теоремы 2 видно, что функция $y=\sum_{\nu=1}^{n} L_\sigma(L_\sigma-\lambda I)^{-1}\varphi_\nu(x)D_\nu$, где D_ν — произвольные константы, является решением однородного уравнения

$$l(y)-\lambda y\left(x\right)=0, \tag{13}$$

причем удовлетворяет условия $U_j(y)=D_j$. Таким образом, для произвольного решения уравнения (13) верно представление $y(x)=\sum_{\nu=1}^{n} L_\sigma(L_\sigma-\lambda I)^{-1}\varphi_\nu(x)U_\nu(y)$.

В частности, если $y_1(x,\lambda),...,y_n(x,\lambda)$ — произвольная фундаментальная система решений уравнения $l(y)-\lambda y\left(x\right)=0,$ то $L_\sigma(L_\sigma-\lambda I)^{-1}\varphi_k(x)=\dfrac{\kappa_k(x,\lambda)}{\Delta\left(\lambda\right)}$, $k=1,...,n,$ где

$$\Delta_\sigma(\lambda)=\det\left\|U_j(y_\nu)\right\|,\ \kappa_k(x,\lambda)=\det\Delta_k(x,\lambda).$$

Матрица $\Delta_k(x,\lambda)$ получается из матрицы $\left\|U_j(y_\nu)\right\|$, если ее k-строку заменить на строку $\left[y_1(x,\lambda),...,y_n\left(x,\lambda\right)\right]$. В результате правую часть соотношения (12) можно переписать в виде

$$(L_\sigma-\lambda I)^{-1}f(x)=\frac{(-1)^n}{\Delta_\sigma(\lambda)}\begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & \dots & y_n(x,\lambda) & (L_0-\lambda I)^{-1}f(x)\\ U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) & -<f;L_0^*(L_0^*-\overline{\lambda}I)^{-1}\sigma_1>\\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) & -<f;L_0^*(L_0^*-\overline{\lambda}I)^{-1}\sigma_n> \end{vmatrix} \tag{14}$$

С другой стороны, известно [1; 47], что резольвента регулярной двухточечной задачи имеет представление

$$(L_0-\lambda I)^{-1}f(x)=\frac{(-1)^n}{\Delta_0(\lambda)}\begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & \dots & y_n(x,\lambda) & (K-\lambda I)^{-1}f(x)\\ V_1(y_1) & \dots & V_1(y_n) & V_1((K-\lambda I)^{-1}f(x))\\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ V_n(y_1) & \dots & V_n(y_n) & V_n((K-\lambda I)^{-1}f(x)) \end{vmatrix}, \tag{15}$$

где

$$(K-\lambda I)^{-1}f(x)=\int_0^b g(x,t,\lambda)f(t)dt,$$

$$g(x,t,\lambda)=\pm\frac{1}{2W\left(\xi\right)}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x)\\ y_1^{(n-2)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) & \dots & y_n^{(n-2)}(\xi)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_1(\xi) & y_2(\xi) & \dots & y_n(\xi) \end{vmatrix},$$

причем знак «+», если $x>t,$ знак «–», если $x<t.$

Пусть $n=2\mu-1$ и выбран конкретный сектор S_0 в ρ-плоскости:

$$(K-\lambda I)^{-1}f(x)=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\mu}\int_0^x y_\nu(x,\lambda)z_\nu(t,\lambda)f(t)dt+\frac{1}{2}\sum_{\nu=\mu+1}^{n}\int_0^x y_\nu(x,\lambda)z_\nu(t,\lambda)f(t)dt-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\mu}\int_x^b y_\nu(x,\lambda)z_\nu(t,\lambda)f(t)dt-\frac{1}{2}\sum_{\nu=\mu+1}^{n}\int_x^b y_\nu(x,\lambda)z_\nu(t,\lambda)f(t)dt.$$

Тогда предварительно 1-й, 2-й,…, μ-й столбец умножим на $\frac{1}{2}\int_0^b z_1(t,\lambda)f(t)dt,...,$ $\frac{1}{2}\int_0^b z_\mu(t,\lambda)f(t)dt,...,$ $\left(\mu+1\right)$-й, …, n-й столбцы умножим на $\left(-\frac{1}{2}\int_0^b z_{\mu+1}(t,\lambda)f(t)dt\right),...,\left(-\frac{1}{2}\int_0^b z_n(t,\lambda)f(t)dt\right)$ и затем прибавим к последнему столбцу. В этом случае элементами последнего столбца станут выражения:

$$P_0(x)=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\mu}\int_0^x y_\nu(x,\lambda)z_\nu(t,\lambda)f(t)dt-\frac{1}{2}\sum_{\nu=\mu+1}^{n}\int_x^b y_\nu(x,\lambda)z_\nu(t,\lambda)f(t)dt+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\mu}\int_0^x y_\nu(x,\lambda)z_\nu(t,\lambda)f(t)dt-\frac{1}{2}\sum_{\nu=\mu+1}^{n}\int_x^b y_\nu(x,\lambda)z_\nu(t,\lambda)f(t)dt\,; \qquad (16)$$

$$P_j=\sum_{\nu=\mu+1}^{n}V_{j0}(y_\nu)\int_0^b z_\nu(t,\lambda)f(t)dt-\sum_{\nu=0}^{n}V_{jb}(y_\nu)\int_0^b z_\nu(t,\lambda)f(t)dt,\ j=1,2,...,n.$$

В результате из (15) имеем

$$(L_0-\lambda I)^{-1}f(x)=(-1)^n\frac{\begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & \dots & y_\mu(x,\lambda) & e^{-\rho\omega_{\mu+1}b}y_{\mu+1}(x,\lambda) & \dots & e^{-\rho\omega_n b}y_n(x,\lambda) & P_0(x)\\ \frac{1}{\rho^{k_1}}V_1(y_1) & \dots & \frac{1}{\rho^{k_1}}V_1(y_\mu) & e^{-\rho\omega_{\mu+1}b}\frac{1}{\rho^{k_1}}V_1(y_{\mu+1}) & \dots & e^{-\rho\omega_n b}V_1(y_n) & P_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{1}{\rho^{k_{n1}}}V_n(y_1) & \dots & \frac{1}{\rho^{k_n}}V_n(y_\mu) & e^{-\rho\omega_{\mu+1}b}\frac{1}{\rho^{k_n}}V_n(y_{\mu+1}) & \dots & e^{-\rho\omega_n b}V_n(y_n) & P_n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho^{k_1}}V_1(y_1) & \dots & \frac{1}{\rho^{k_1}}V_1(y_\mu) & e^{-\rho\omega_{\mu+1}b}\frac{1}{\rho^{k_1}}V_1(y_{\mu+1}) & \dots & e^{-\rho\omega_n b}V_1(y_n) & P_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{1}{\rho^{k_{n1}}}V_n(y_1) & \dots & \frac{1}{\rho^{k_n}}V_n(y_\mu) & e^{-\rho\omega_{\mu+1}b}\frac{1}{\rho^{k_n}}V_n(y_{\mu+1}) & \dots & e^{-\rho\omega_n b}V_n(y_n) & P_n\end{vmatrix}}\equiv$$

$$\equiv P_0(x)-P_1\frac{\kappa_1(x,\rho)}{\Delta_0(\rho)}-P_2\frac{\kappa_2(x,\rho)}{\Delta_0(\rho)}-...-P_n\frac{\kappa_n(x,\rho)}{\Delta_0(\rho)}.$$

Поскольку при $\rho\to\infty,\ \rho\in S_0$,

$$y_j(x,\lambda)=e^{\rho\omega_j x}[1],\quad z_j(t,\lambda)=e^{-\rho\omega_j t}\frac{[c_\nu]}{\rho^{n-1}},\ j=1,...,n,$$

и их можно дифференцировать, то из последнего представления следует оценка убывания резольвенты $\left(L_0-\lambda I\right)^{-1}f(x)$ при $\rho\to\infty,\ \rho\in S_0$. Теперь получим окончательное представление резольвенты $\left(L_0-\lambda I\right)^{-1}f(x)$.

Пусть $n=2\mu-1$ и $\mathrm{Re}(\rho\omega_1)\le\mathrm{Re}(\rho\omega_2)\le...\mathrm{Re}(\rho\omega_\mu)\le 0\,\mathrm{Re}(\rho\omega_{\mu+1})\le...\mathrm{Re}(\rho\omega_n)$ при $\rho\in S_0$. Тогда правую часть соотношения (14) можно переписать в виде

$$(L_\sigma-\lambda I)^{-1}f(x)=(-1)^n\frac{\begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & \dots & y_\mu(x,\lambda) & e^{-\rho\omega_{\mu+1}b}y_{\mu+1}(x,\lambda) & \dots & e^{-\rho\omega_n b}y_n(x,\lambda) & P_0(x)\\ \frac{1}{\rho^{k_1}}U_1(y_1) & \dots & \frac{1}{\rho^{k_1}}U_1(y_\mu) & e^{-\rho\omega_{\mu+1}b}\frac{1}{\rho^{k_1}}U_1(y_{\mu+1}) & \dots & e^{-\rho\omega_n b}U_1(y_n) & P_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{1}{\rho^{k_{n1}}}U_n(y_1) & \dots & \frac{1}{\rho^{k_n}}U_n(y_\mu) & e^{-\rho\omega_{\mu+1}b}\frac{1}{\rho^{k_n}}U_n(y_{\mu+1}) & \dots & e^{-\rho\omega_n b}U_n(y_n) & P_n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho^{k_1}}U_1(y_1) & \dots & \frac{1}{\rho^{k_1}}U_1(y_\mu) & e^{-\rho\omega_{\mu+1}b}\frac{1}{\rho^{k_1}}U_1(y_{\mu+1}) & \dots & e^{-\rho\omega_n b}U_1(y_n) & P_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{1}{\rho^{k_{n1}}}U_n(y_1) & \dots & \frac{1}{\rho^{k_n}}U_n(y_\mu) & e^{-\rho\omega_{\mu+1}b}\frac{1}{\rho^{k_n}}U_n(y_{\mu+1}) & \dots & e^{-\rho\omega_n b}U_n(y_n) & P_n\end{vmatrix}}$$

Из последнего представления также следует оценка убывания резольвенты при $\rho\to\infty,\ \rho\in S_0$. Точно так же исследуется резольвента в других подсекторах и при четном n. Таким образом, доказана

Теорема 3. Пусть граничные функции $\sigma_1(x),...,\sigma_n(x)$ таковы, что справедливо (6). Тогда резольвента оператора L_σ представляет интегральный оператор

$$(L_\sigma - \lambda I)^{-1} f(x) = \int_0^b G_\sigma(x,t,\lambda) f(t)\,dt$$

и его ядра $G_\sigma(x,t,\lambda)$ на окружностях $|\lambda| = R_k$, которые относят от спектра оператора L_σ на расстояния не меньше δ, где $\delta > 0$. Имеет место оценка

$$|G(x,t,\lambda)| \le \frac{M}{|\lambda|^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Здесь M не зависит от x,t,λ. Из полученной оценки ядра интегрального оператора стандартным образом следуют теоремы о разложении, которые приведены в книге [1; 97–98]. Отметим, что при изложении результатов данной статьи существенно было влияние работы А.А. Шкаликова [3].

References

1. *Naimark M.A.* Linear differential operators. — M.: Nauka, 1969. — 528 p.
2. *Otelbayev M.O., Shynybekov A.N.* Correct problems of the type Bitsadze-Samara // Dokl. AN SSSR — 1982. — T. 265. — № 4. — P. 815–819.
3. *Shkalikov A.A.* On the basis of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions // Vestn. MGU. Ser. Matem., mehan. — 1982. — № 6. — P. 12–21.

УДК 517.956.2

Задача типа Самарского-Бицадзе для одного класса эллиптических систем второго порядка на плоскости с полярной особенностью

The problem type Samarskyi-Bitsadze for one class of elliptic systems of the second order on the plane with polar feature

Сарсенбаева М.С.

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана (e-mail: sarmairasar@mail.ru)

Мақалада полярлық ерекшелігі бар жазықтықтың шексіз бұрыштық облысында берілген екінші ретті эллиптикалық жүйелердің бір класы үшін Самарский-Бицадзе типті есебі қарастырылған. Дәрежелік қатар түрінде берілген үзіліссіз шешімдердің айқын түрде бір көпбейнесі алынған. Сол үзіліссіз шешімдердің көпбейнесінің көмегімен жазықтықтың шексіз бұрыштық облысында екінші ретті эллиптикалық жүйе үшін Самарский-Бицадзе есебі шешілген. Алынған нәтижелер тегіс оң қисықты беттердің шексіз аз иілу теориясында қолданылуы мүмкін.

In this paper the problem of type Samarskyi-Bitsadze for one class of elliptic system of the second order with polar feature on a plane of infinitely angular area is solved. The kind of one variety continuous the decision which are given sedate numbers is received in obvious. By means of this variety of continuous decisions the problem of type Samarskyi-Bitsadze for elliptic system of the second order on a plane of infinitely angular area is solved. The received results can be used in the theory of infinitesimal bends for surfaces with smooth positive curvature with a flattening line.

Пусть $0 < \varphi_0 \le 2\pi$, $\quad 0 \le \varphi_1, \varphi_2 \le \varphi_0$ и $G = \left\{ z = re^{i\varphi} : 0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi \le \varphi_0 \right\}$.

Рассмотрим в G уравнение

$$V_{z\bar{z}} + \frac{a(\varphi)}{2r} V_z + \frac{b(\varphi)}{2r} V_{\bar{z}} + \frac{c(\varphi)}{4r^2} V - \frac{d(\varphi)}{4r^{2-\alpha}\left(y - k_1 x\right)^{\alpha}} \overline{V} = \frac{f(\varphi) r^{\nu-2+\alpha}}{4\left(y - k_2 x\right)^{\alpha}}, \qquad (1)$$

где $a(\varphi), b(\varphi), c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi) \in C\left[0, \varphi_1\right]$, $\nu > 2$ — действительное число, $k_1 = tg\varphi_1, k_2 = tg\varphi_2$.