УДК 517.51

Н.А.Бокаев[1], А.Т.Сыздыкова[2]

[1]*Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана;*
[2]*Павлодарский государственный университет им. С.Торайгырова*
(E-mail: bokayev2011@yandex.ru)

Оценка наилучшего приближения углом суммы двойных рядов по мультипликативной системе с квазивыпуклыми коэффициентами

В статье исследованы двойные ряды по мультипликативным системам с квазивыпуклыми коэффициентами. Доказана сходимость таких рядов к интегрируемым функциям и получена оценка наилучшего приближения углом в метрике $L^1[0,1)^2$ полиномами по мультипликативной системе.

Ключевые слова: двойные ряды по мультипликативным системам, квазивыпуклые коэффициенты, наилучшее приближение углом.

Известно, что ряд по системе Уолша с квазивыпуклыми коэффициентами является рядом Фурье-Уолша некоторой суммируемой функции $f \in L^1[0,1)$ (см. [1, 2]). В [3] получена оценка наилучшего приближения суммы одномерных рядов по мультипликативным системам с квазивыпуклыми коэффициентами. В данной работе получена оценка наилучшего приближения углом суммы двойных рядов в метрике $L^1[0,1)^2$ по мультипликативной системе с квазивыпуклыми коэффициентами.

Пусть $P = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность натуральных чисел, такая, что $2 \le p_n \le M$, $M \in \mathrm{N}$, $n = 1,2,\ldots$ Положим по определению

$$m_0 = 1,\ m_j = \prod_{n=1}^{j} p_{n,\, j=1,2\ldots}$$

Тогда каждая точка $x \in [0,1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n},\ x_n \in \mathrm{Z} \bigcap [0, p_n),$$

где Z — множество целых чисел. Данное разложение определено однозначно, если при $x = \dfrac{k}{m_n}$ $0 < k < m_n$, $k \in \mathrm{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}$, брать разложение с конечным числом $x_n \ne 0$. Для $x, y \in [0,1)$ введем операцию обобщенного сложения «$\oplus$»:

$$x \oplus y = z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n / m_n,\ z_n = x_n + y_n (\mathrm{mod}\, p_n).$$

При фиксированном x число Z определено для почти всех y.

Мультипликативная система Виленкина-Прайса $\{X_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ определена следующим образом. Всякое $k \in \mathrm{Z}_+$ представимо в виде

$$k = \sum_{n=1}^{\infty} k_n m_{n-1},\ \ k_n \in \mathrm{Z} \bigcap [0, p_n).$$

Для $x \in [0,1)$ и $k \in \mathrm{Z}_+$ положим

$$X_0(x) \equiv 1,\ X_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n k_n}{p_n}\right).$$

Известно, что система функций $\{X_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ является полной ортонормированной системой в $L[0,1)$ (см. [2, 4]).

Суммы

$$\sum_{k=0}^{n-1} X_k(x) =: D_n(x) \ \text{ и } \ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D_k(x) =: F_n(x)$$

называются соответственно ядрами Дирихле и Фейера. Известно [4], что для любого $n\in N$ и $x\in(0,1)$ имеют место неравенства

$$|D_n(x)|\le\frac{C_1}{x},\quad \|D_n\|_{L^1[0,1)}\le C_2\ln(n+1); \tag{1}$$

$$|F_n(x)|\le\frac{C_3}{x},\quad \|F_n\|_{L^1[0,1)}\le C_4. \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем через C_k будем обозначать положительные постоянные, различные в разных местах.

Коэффициенты Фурье функции $f\in L^1[0,1)$ по системе $\{X_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ определяются следующим образом:

$$\hat f(n)=\int_0^1 f(t)\overline{X_n(t)}dt,\quad n\in \mathrm{Z}_+,$$

где интеграл подразумевается в смысле Лебега.

Положим

$$P_n=\{f\in L^1[0,1):\ \hat f(k)=0,\ k\ge n\},\quad n\in \mathrm{Z}_+$$

и через

$$E_n(f)=\inf\{\|f-t_n\|_{L^1}:t_n\in P_n\}$$

будем обозначать наилучшее приближение функции f полиномами по мультипликативной системе. В двумерном случае будем рассматривать так называемое наилучшее приближение углом, представленное следующим образом: если $P_n^{(i)}$, $i=1,2,$ — множества функций $f(x_1,x_2)$ таких, что для фиксированного x_j, $j=1,2$, $j\ne i$, имеем $f(x_1,x_2)\in P_n$, тогда по определению положим

$$A_{m,n}(f)=\inf\{\|f-u-v\|_{L^1}:u\in P_n^{(1)};v\in P_m^{(2)}\}. \tag{3}$$

В данной работе исследуется двойной ряд по мультипликативной системе:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{j,k}X_j(x)X_k(y). \tag{4}$$

Нам понадобится двойное преобразование Абеля (см. [5]), применительно к частичным суммам ряда (4):

$$\begin{aligned}\sum_{j=p}^{m}\sum_{k=q}^{n}a_{j,k}X_j(x)X_k(y)&=\sum_{j=p}^{m-1}\sum_{k=q}^{n-1}a_{j,k}D_{j+1}(x)D_{k+1}(y)\Delta_{11}+\\&+\sum_{j=p}^{m-1}\Delta_{10}a_{j,n}D_{j+1}(x)D_n(y)-\sum_{j=p}^{m-1}\Delta_{10}a_{j,q}D_{j+1}(x)D_n(y)+\\&+\sum_{k=q}^{n-1}\Delta_{01}a_{m,k}D_m(x)D_{k+1}(y)-\sum_{k=q}^{n-1}\Delta_{01}a_{pk}D_p(x)D_{k+1}(y)+\\&+a_{m,n}D_m(x)D_n(y)-a_{p,n}D_p(x)D_n(y)-a_{m,q}D_m(x)D_q(y)+a_{p,q}D_p(x)D_q(y)+\\&+a_{m,n}D_m\left(x\right)D_n\left(y\right)-a_{p,n}D_p\left(x\right)D_n\left(y\right)-a_{m,q}D_m\left(x\right)D_q\left(y\right),\end{aligned} \tag{5}$$

где $D_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}X_k(x)$ — ядро Дирихле по мультипликативной системе.

Положим $\Delta_{10}a_{\ kn}=a_{kn}-a_{k+1,n}$, $\Delta_{01}a_{\ kn}=a_{kn}-a_{k,n+1}$, $\Delta_{11}a_{\ kn}=\Delta_{10}(\Delta_{01}a_{kn})$, $\Delta_{ij}^2(a_{kn})=\Delta_{ij}(\Delta_{ij}a_{kn})$, где $i,j\in\{0,1\}$.

Двойная последовательность $\{a_{k,n}\}$ называется квазивыпуклой, если

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(k+1)(n+1)\,|\,\Delta_{11}^2a_{k,n}\,|<\infty.$$

Основной целью настоящей работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема. Пусть двойная квазивыпуклая последовательность $\{a_{k_1k_2}\}_{k_1,k_2}^{\infty}$ удовлетворяет условиям $a_{k_1,k_2} \to 0$ при $\max\{k_1,k_2\} \to \infty$ и

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}(k_1+1)\,|\,\Delta_{10}^2 a_{k_1k_2}\,| < \infty \text{ при фиксированном } k_2 \in Z_+;$$

$$\sum_{k_2=0}^{\infty}(k_2+1)\,|\,\Delta_{01}^2 a_{k_1k_2}\,| < \infty \text{ при фиксированном } k_1 \in Z_+.$$

Тогда ряд

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} a_{k_1k_2} X_{k_1}(x_1) X_{k_2}(x_2)$$

является рядом Фурье некоторой функции $f(x_1,x_2)L^1[0,1)^2$ и имеет место оценка

$$A_{n_1n_2}(f) \le C\left(\sum_{k_1=n_1}^{\infty}\sum_{k_2=n_2}^{\infty}(k_1+1)(k_2+1)\Delta_{11}^2 a_{k_1k_2} + n_2\ln n_2\sum_{k_1=n_1}^{\infty}(k_1+1)\Delta_{10}^2 a_{k_1k_2} + n_1\ln n_1\sum_{k_2=m_2}^{\infty}(k_2+1)\Delta_{01}^2 a_{k_1k_2}\right). \quad (6)$$

Для доказательства теоремы понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Если двойная последовательность $\{a_{nm}\}_{n,m=0}^{\infty}$ квазивыпукла и $a_{k_1,k_2} \to 0$ при $\max\{k_1,k_2\} \to \infty$, то ее члены удовлетворяют условиям:

a) $k_1k_2\Delta_{11}a_{k_1,k_2} \to 0$ при $k_1,k_2 \to \infty$;

b) $k_1\Delta_{10}a_{k_1,k_2} \to 0$ при $k_1 \to \infty$ и фиксированном k_2;

c) $k_2\Delta_{01}a_{k_1,k_2} \to 0$ при $k_2 \to \infty$ и фиксированном k_1.

Доказательство. Рассмотрим сумму

$$\sum_{k_1=n}^{\infty}\sum_{k_2=m}^{\infty}\Delta_{11}^2 a_{k_1k_2} = \sum_{k_1=n}^{\infty}\sum_{k_2=m}^{\infty}\Delta_{11}(\Delta_{11}a_{k_1k_2}) = \sum_{k_1=n}^{\infty}\sum_{k_2=m}^{\infty}\Delta_{11}(\Delta_{01}a_{k_1k_2} - \Delta_{01}a_{k_1+1,k_2}) = \Delta_{11}a_{nm}.$$

Отсюда в силу квазивыпуклости последовательности $\{a_{nm}\}_{n,m=0}^{\infty}$ имеем

$$|\,\Delta_{11}a_{nm}\,| \le \sum_{k_1=n}^{\infty}\sum_{k_2=m}^{\infty}\Delta_{11}^2 a_{k_1k_2} = \sum_{k_1=n}^{\infty}\sum_{k_2=m}^{\infty} = \frac{1}{k_1+1}\cdot\frac{1}{k_2+1}(k_1+1)(k_2+1)\,|\,\Delta_{11}^2 a_{k_1k_2}\,| \le$$

$$\le \frac{1}{(n+1)(m+1)}\sum_{k_1=n}^{\infty}\sum_{k_2=m}^{\infty}(k_1+1)(k_2+1)\,|\,\Delta_{11}^2 a_{k_1k_2}\,| = 0\left(\frac{1}{(n+1)(m+1)}\right), n,m \to \infty.$$

Отсюда вытекает условие *a*) леммы 1. Условия b) и c) следуют из одномерного случая [2].

Лемма 2. Пусть последовательность $\{a_{nm}\}_{n,m=0}^{\infty}$ такова, что при фиксированных m и n соответственно удовлетворяет условиям

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,|\,\Delta_{10}^2 a_{nm}\,| < \infty; \quad \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\,|\,\Delta_{01}^2 a_{nm}\,| < \infty.$$

Тогда ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_{10}(\Delta_{11}a_{nm})(n+1); \quad \sum_{m=0}^{\infty}\Delta_{01}(\Delta_{11}a_{nm})(m+1)$$

сходятся и имеют место следующие неравенства:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_{10}(\Delta_{11}a_{nm})(n+1) \le \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,|\,\Delta_{10}^2 a_{nm}\,|;$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Delta_{01}(\Delta_{11}a_{nm})(m+1) \le \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\,|\,\Delta_{01}^2 a_{nm}\,|.$$

Доказательство. Достаточно показать справедливость последних двух неравенств, а сходимость вытекает из них как следствие, автоматически. Покажем справедливость первого неравенства, второе получается аналогично. Так как

$$\Delta_{11}a_{nm} = \Delta_{10}(\Delta_{01}a_{nm}) = \Delta_{01}(\Delta_{10}a_{nm}),$$

тогда при любом фиксированном m имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_{10}(\Delta_{11}a_{nm})(n+1)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_{10}(\Delta_{10}a_{nm}-\Delta_{10}a_{n,m+1})(n+1)=\sum_{n=0}^{\infty}(\Delta_{10}^{2}a_{nm}-\Delta_{10}^{2}a_{n,m+1})(n+1).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_{10}(\Delta_{11}a_{nm})(n+1)\le C\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,|\,\Delta_{10}^{2}a_{nm}\,|.$$

Доказательство теоремы. Сначала докажем сходимость ряда (4) при всех $x_1,x_2\in(0,1)^2$. Для этого рассмотрим сумму

$$L_{i_1,i_2}^{\infty\infty}(x_1,x_2)=\sum_{k_1=i_1}^{n_1}\sum_{k_2=i_2}^{n_2}a_{k_1,k_2}X_{k_1}(x_1)X_{k_2}(x_2).$$

Дважды используя преобразование Абеля (6) и учитывая, что $a_{n,m}\to 0$ при $n\to\infty$, $m\to\infty$, имеем

$$L_{i_1,i_2}^{\infty,\infty}(x_1,x_2)=\sum_{k_1=i_1}^{\infty}\sum_{k_2=i_2}^{\infty}\Delta_{11}^{2}a_{k_1k_2}(k_1+1)(k_2+1)F_{k_1+1}(x_1)F_{k_2+1}(x_2)--\sum_{k_1=i_1}^{\infty}\Delta_{10}(\Delta_{11}a_{k_1i_2})(k_1+1)(i_2-1)F_{k_1+1}(x_1)F_{i_2-1}(x_2)-$$

$$-\sum_{k_2=i_2}^{\infty}\Delta_{01}(\Delta_{11}a_{i_1k_2})(i_1-1)(k_2+1)F_{i_1-1}(x_1)F_{k_2+1}(x_2)-$$

$$-D_{i_2}(x_2)\sum_{k_1=i_1}^{\infty}\Delta_{10}^{2}a_{k_1i_2}(k_1+1)F_{k_1+1}(x_1)-D_{i_1}(x_1)\sum_{k_1=i_1}^{\infty}\Delta_{01}^{2}a_{i_1k_2}(k_2+1)F_{k_2+1}(x_2)+$$

$$+\Delta_{11}a_{i_1i_2}(i_1-1)(i_2-1)F_{i_1-1}(x_1)F_{i_2-1}(x_2)+\Delta_{10}a_{i_1i_2}(m_1-1)F_{i_1-1}(x_1)D_{i_2}(x_2)+$$

$$+\Delta_{01}a_{i_1i_2}(i_2-1)F_{i_2-1}(x_2)D_{i_1}(x_1)+a_{i_1i_2}D_{i_1}(x_1)D_{i_2}(x_2). \qquad (7)$$

Обозначим суммы

$$S_{11}^{2}=\sum_{k_1=i_1}^{\infty}\sum_{k_2=i_2}^{\infty}\Delta_{11}^{2}a_{k_1k_2}(k_1+1)(k_2+1);\quad S_{10}=\sum_{k_1=i_1}^{\infty}\Delta_{10}(\Delta_{11}a_{k_1i_2}(k_1+1)(i_2+1);$$

$$S_{01}=\sum_{k_2=i_2}^{\infty}\Delta_{01}(\Delta_{11}a_{i_1k_2}(i_1+1)(k_2+1);\quad S_{10}^{2}=\sum_{k_1=i_1}^{\infty}\Delta_{10}^{2}a_{k_1i_2}(k_1+1)F_{k_1+1}(x_1);$$

$$S_{01}^{2}=\sum_{k_1=i_1}^{\infty}\Delta_{01}^{2}a_{i_1k_2}(k_2+1).$$

Тогда, учитывая лемму 1 и неравенства (1), (2),

$$|\,L_{i_1,i_2}(x_1,x_2)\,|\le\frac{C}{x_1x_2}(S_{11}^{2}+S_{10}+S_{01}+S_{10}^{2}+S_{01}^{2}+$$

$$+\Delta_{11}a_{i_1i_2}(i_1-1)(i_2-1)+\Delta_{10}a_{i_1i_2}(i_1-1)+\Delta_{01}a_{i_1i_2}(i_2-1)+a_{i_1i_2}).$$

По условию теоремы и лемм 1 и 2 правая часть стремится к нулю при $i_1\to\infty$ и $i_2\to\infty$ для всех $x_1,x_2\in(0,1)^2$. Следовательно, существует функция

$$f(x_1,x_2)=\lim_{\substack{n_1\to\infty\\ n_2\to\infty}}\sum_{k_1=0_1}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}a_{k_1,k_2}X_{k_1}(x_1)X_{k_2}(x_2).$$

Пусть Q_{i_1,i_2} — множество всех таких индексов (k_1,k_2), что или $0\le k_1<i_1$, или $0\le k_2<i_2$. Положим

$$T_{i_1,i_2}(x_1,x_2)=\sum_{(k_1,k_2\in Q_{i_1,i_2})}a_{k_1,k_2}X_{k_1}(x_1)X_{k_2}(x_2).$$

Рассмотрим разность

$$R_{i_1,i_2}(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)-T_{i_1,i_2}(x_1,x_2).$$

Тогда ясно, что

$$P_{i_1,i_2}(x_1,x_2)=\sum_{k_1=i_1}^{\infty}\sum_{k_2=i_2}^{\infty}a_{k_1,k_2}X_{k_1}(x_1)X_{k_2}(x_2)=L_{i_1,i_2}^{\infty\infty}(x_1,x_2),$$

т.е.

$$f(x_1,x_2)-T_{i_1,i_2}(x_1,x_2)=L^{\infty\infty}_{i_1,i_2}(x_1,x_2).$$

Тогда из (7) следует

$$f(x_1,x_2)-T_{i_1,i_2}(x_1,x_2)-\Delta_{11}a_{i_1i_2}(i_1-1)(i_2-1)F_{i_1-1}(x_1)F_{i_2-1}(x_2)-$$
$$-\Delta_{10}a_{i_1i_2}(i_1-1)F_{i_1-1}(x_1)D_{i_2}(x_2)-\Delta_{01}a_{i_1i_2}(i_2-1)F_{i_2-1}(x_2)D_{i_1}(x_1)-$$
$$-a_{i_1i_2}D_{i_1}(x_1)D_{i_2}(x_2)=\sum_{k_1=i_1}^{\infty}\sum_{k_2=i_2}^{\infty}\Delta^2_{11}a_{k_1k_2}(k_1+1)(k_2+1)F_{k_1+1}(x_1)F_{k_2+1}(x_2)-$$
$$-\sum_{k_1=i_1}^{\infty}\Delta_{10}(\Delta_{11}a_{k_1i_2})(k_1+1)(i_2-1)F_{k_1+1}(x_1)F_{i_2-1}(x_2)-$$
$$-\sum_{k_2=i_2}^{\infty}\Delta_{01}(\Delta_{11}a_{i_1k_2})(k_2+1)(i_1-1)F_{k_2+1}(x_2)F_{i_1-1}(x_1)-$$
$$-D_{i_2}(x_2)\sum_{k_1=i_1}^{\infty}\Delta^2_{10}a_{k_1i_2}(k_1+1)F_{k_1+1}(x_1)-D_{i_1}(x_1)\sum_{k_2=i_2}^{\infty}\Delta^2_{01}a_{i_1k_2}(k_2+1)F_{k_2+1}(x_2).$$

Отметим, что в левой части последнего равенства фигурируют многочлены порядка, не превосходящие i_1,i_2, обозначим их через P_{i_1,i_2}. Тогда, согласно определению (3), имеем

$$A_{i_1,i_2}(f)=\inf_{\substack{0\le k_1<i_1\\0\le k_2<i_2}}\|f-\Phi_{k_1,k_2}\|_{L^1}\le\|f-P_{i_1,i_2}\|_{L^1}\le$$
$$\le\sum_{k_1=i_1}^{\infty}\sum_{k_2=i_2}^{\infty}\Delta^2_{11}a_{k_1k_2}(k_1+1)(k_2+1)\|F_{k_1+1}(x_1)F_{k_2+1}(x_2)\|_{L^1(0,1)^2}+$$
$$+(i_2-1)\sum_{k_1=i_1}^{\infty}\Delta_{10}(\Delta_{11}a_{k_1i_2})(k_1+1)\|F_{k_1+1}(x_1)F_{i_2-1}(x_2)\|_{L^1(0,1)^2}+$$
$$+(i_1-1)\sum_{k_2=i_2}^{\infty}\Delta_{01}(\Delta_{11}a_{i_1k_2})(k_2+1)\|F_{k_2+1}(x_2)F_{i_1-1}(x_1)\|_{L^1(0,1)^2}+$$
$$+\sum_{k_1=i_1}^{\infty}\Delta^2_{10}a_{k_1i_2}(k_1+1)\|D_{i_2}(x_2)\|_{L^1(0,1)^2}\|F_{k_1+1}(x_1)\|_{L^1(0,1)^2}+$$
$$+\sum_{k_2=i_2}^{\infty}\Delta^2_{01}a_{i_1k_2}(k_2+1)\|D_{i_1}(x_1)\|_{L^1(0,1)^2}\|F_{k_2+1}(x_2)\|_{L^1(0,1)^2}.$$

Тогда, на основании лемм 2 и 3, получим оценку (6). Теорема доказана.

Список литературы

1 *Yano S.* On Walsh-Fourier series // Tohoku Math. J. — 1951. — Vol. 3. — № 2. — P. 223–242.

2 *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. — М.: Наука, 1987.

3 *Volosivets S.S., Fadeev R.N.* Estimates of best approximations in integral metrics and Fourier coefficients with respect to multiplicative systems // Analysis Mathematica, 2011. — No. 37 — P. 215–238.

4 *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. — Баку: ЭЛМ, 1981.

5 *Moricz F.* On double cosine, sine and Walsh series with monotone coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. — 1990. — Vol. 109. — No. 2. — P. 417–425.

Н.Ә.Боқаев, А.Т.Сыздықова

Коэффициенттері квазидөңес мультипликативтік жүйе бойынша екі еселі қатарлардың қосындысының ең жақсы бұрыштап жуықтауының бағалануы

Мақалада коэффициенттері квазидөңес мультипликативтік жүйе бойынша екі еселі қатарлар қарастырылған. Сондай қатарлардың интегралданатын функцияларға жинақталатыны дәлелденді және $L^1[0,1)^2$ метрикадағы мультипликативтік жүйе бойынша ең жақсы бұрыштап жуықтауының бағалануы берілді.

N.A.Bokayev, A.T.Syzdykova

An estimate of best approximation by angle of sum of double series with respect to multiplicative system with quasiconvex coefficients

In this work double series with respect to multiplicative systems in terms of quasiconvex coefficients are investigated. The convergence such series to integrable functions are proved and an estimate of best approximation by angle with respect to multiplicative system in $L^1[0,1)^2$ metric is obtained.

References

1 Yano S. *Tohoku Math. J.*, 1951, 3, 2, p. 223–242.

2 Golubov B.I., Yefimov A.V., Skvorcov V.A. *Walsh series and transforms: theory and application*, Moscow: Nauka, 1987.

3 Volosivets S.S., Fadeev R.N. *Analysis Mathematica*, 2011, 37, p. 215–238.

4 Agayev G.N., Vilenkin N.Ya., Dzhafarli G.M., Rubinshteiyn A.I. *Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups*, Baku: ELM, 1981.

5 Moricz F. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1990, 109, 2, p. 417–425.

УДК 519.683

М.М.Букенов, Г.Б.Бакаева

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: kim.chandi@inbox.ru)

Схема расщепления для трехмерной задачи теплопроводности

В статье исследована схема расщепления для трехмерного уравнения теплопроводности, сводящаяся к трехточечным прогонкам. Проведена численная реализация схемы и показана практическая применимость. Численная реализация схемы, стабилизирующей поправки, и сравнение её со схемой расщепления показали практическую эффективность предложенного алгоритма. Результаты расчетов приведены в таблице и дан анализ.

Ключевые слова: теплопроводность, сетка, единичный оператор, аппроксимация, трехточечные прогонки.

Рассмотрим в области $D \in R^3$ с границей γ задачу — найти решение $u(x,t)$-уравнения теплопроводности

$$\frac{vu}{vt} = a^2 \sum\nolimits_i^3 = \frac{\partial^z u}{1\partial x_i^z} + f(x,t), x \in D, t \in [0,T], \frac{v^3 u}{v x_i^z}, \tag{1}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{2}$$

и граничному условию

$$u(x,t) = \varphi(x,t), x \in \varphi. \tag{3}$$

Для решения задачи (1)–(3) используем разностную аппроксимацию, следуя [1]. Введем равномерную сетку ω.

$$\left\{\omega=\left(x_{1,i}, x_{2,k}, x_{3,j}\right), x_{1,i} = ih_1, x_{2,k} = kh_2, x_{3,j} = jh_3, i = 0,...,N, k = 0,...,N, j = 0,...,N. h_m = L_m / N, m = 1,2,3\right\};$$

$$\omega_\tau = \left\{t_n = nr, n = 0,...,M, n = T / M\right\}.$$