Таким образом, установлены достаточные условия осуществимости и сходимости предложенного алгоритма, показана разрешимость задачи (1)–(3) в шаре $S_1\left(u^{(0)}(x,t),\left[R(x)+1\right]\psi\right)$.

Список литературы

1. *Cesari L.* Тр. междунар. симп. по нелинейным колебаниям. — Киев, 1963. — Т. 1. — С. 440–457.
2. *Veivoda O. et. al.* Partial differential equations: Time-periodic solutions. — Alphen aan den Rijn. Sijthoff: Noordhoff, 1981. — 358 p.
3. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — Киев, 1984.
4. *Кигурадзе Т.И.* О периодических краевых задач для линейных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1993. — Т. 29. — № 2. — С. 281–297.
5. *Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громяк М.И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. — Киев: Наук. думка, 1991. — 232 с.
6. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Однозначная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39. — № 10. — С. 1343–1354.
7. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Однозначная разрешимость краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2002. — Т. 42. — № 11. — С. 1673–1685.
8. *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1989. — Т. 29. — № 1. — С. 50–66.
9. *Орумбаева Н.Т.* Об одном алгоритме нахождения изолированного решения полупериодической краевой задачи для системы нелинейных гиперболических уравнений // Вестн. Карагандинского ун-та. Сер. Математика. — Караганда, 2008. — № 2(50).

УДК 517.911

А.Б.Тлеулесова

Жезказганский университет им. О.А.Байконурова

О СУЩЕСТВОВАНИИ ИЗОЛИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Импульсті әсерлі сызықты емес жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есептің оқшауланған шешімінің бар болуы мен ұсынылған алгоритмнің орындалуы мен жинақтылығының жеткілікті шарттары тағайындалған.

The conditions of reliability and convergence of offering algorithm and the existence of isolated solution of periodical two-point value problem for systems of nonlinear ordinary differential equations with impulse influence are established.

Рассматривается нелинейная периодическая краевая задача с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\quad t\in\left[0,T\right]\setminus\left\{\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m\right\},\quad x\in R^n; \tag{1}$$

$$0=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_m<\theta_{m+1}=T;$$

$$x(0)=x(T); \tag{2}$$

$$x(\theta_i+0)-x(\theta_i-0)=J_i\left(\lim_{t\to\theta_i-0}x(t)\right),\quad i=\overline{1,m}, \tag{3}$$

где $f:\left[0,T\right]\times R^n\to R^n$ — непрерывная по x, кусочно-непрерывная по t с возможным $\left(i=\overline{1,m}\right)$ и разрывами первого рода в точках $t=\theta_i$, $i=\overline{1,m}$, вектор-функция; $J_i:R^n\to R^n$ — непрерывные вектор-функции.

Различные задачи для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, методы их решения и другие вопросы теории импульсных систем были рассмотрены в [1–5].

В данной работе методом параметризации [6] рассматриваются вопросы существования изолированного решения периодической краевой задачи с импульсным воздействием для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решением задачи (1)–(3) является кусочно-непрерывно дифференцируемая на [0, T] вектор-функция $x^*(t)$, удовлетворяющая при всех значениях $t \in [0,T]$, кроме точек $t=\theta_i$, $i=\overline{1,m}$, дифференциальному уравнению (1), граничным условиям (2) и имеющая в точках $t=\theta_i$, $i=\overline{1,m}$ разрыв первого рода, для которых справедлива (3).

Взяв $\theta_0=0$, $\theta_{m+1}=T$, произведем разбиение так, чтобы точки скачка являлись точками разбиения

$$[0,T)=\bigcup_{r=1}^{m+1}[\theta_{r-1},\theta_r).$$

Через $x_r(t)$ обозначим сужение функции $x(t)$ на r-ый интервал $[\theta_{r-1},\theta_r)$, т.е. $x_r(t)=x(t)$, $[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, и задачу (1)–(3) сведем к многоточечной краевой задаче с импульсным воздействием

$$\frac{dx_r}{dt}=f(t,x_r),\ t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\ \ r=\overline{1,m+1};\tag{4}$$

$$x_1(0)=\lim_{t\to T-0}x_{m+1}(t);\tag{5}$$

$$x_{i+1}(\theta_i+0)-\lim_{t\to\theta_i-0}x_i(t)=J_i\left(\lim_{t\to\theta_i-0}x_i(t)\right),\ i=\overline{1,m}.\tag{6}$$

Значение функции $x_r(t)$ в точках $t=\theta_{r-1}$ обозначим через λ_r и на каждом интервале $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, произведя замену $u_r(t)=x_r(t)-\lambda_r$, получим эквивалентную задаче (4)–(6) многоточечную краевую задачу с параметром

$$\frac{du_r}{dt}=f(t,u_r+\lambda_r),\ t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\ \ r=\overline{1,m+1};\tag{7}$$

$$u_r(\theta_{r-1})=0,\ r=\overline{1,m+1};\tag{8}$$

$$\lambda_1-\lambda_{m+1}-\lim_{t\to T-0}u_{m+1}(t)=0;\tag{9}$$

$$\lambda_{i+1}-\lambda_i-J_i\left(\lambda_i+\lim_{t\to\theta_i-0}u_i(t)\right)=0,\ i=\overline{1,m}.\tag{10}$$

Решением задачи (7)–(10) является пара $(\lambda,u[t])$ с элементами $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{m+1})'\in R^{n(m+1)}$, $u[t]=(u_1(t),u_2(t),...,u_{m+1}(t))'\in C([0,T],\tilde\theta,R^{n(m+1)})$, $\tilde\theta=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_{m+1})$, где функции $u_r(t)$ непрерывно дифференцируемы на $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, и при $\lambda_r=\lambda_r^*$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (7) и условиям (8)–(10).

Если $x_r(t)$ — решение задачи (4)–(6), то система пар $(\lambda_r,u_r(t))$, $r=\overline{1,m+1}$, с элементами $\lambda_r=x(\theta_{r-1})$, $u_r(t)=x_r(t)-x_r(\theta_{r-1})$, $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, является решением задачи (7)–(10). И, наоборот, если система пар $(\tilde\lambda_r,\tilde u_r(t))$, $r=\overline{1,m+1}$, — решение задачи (7)–(10), то функция $\tilde x(t)$, определяемая равенствами

$$\tilde x(t)=\begin{cases}\tilde\lambda_r+\tilde u_r(t),t\in[\theta_{r-1},\theta_r);\\ \tilde\lambda_{m+1}+\lim\limits_{t\to T-0}\tilde u_{m+1}(t),t=T,\end{cases}$$

будет решением задачи (4)–(6).

Введение дополнительных параметров λ_r позволяет получить начальные условия (8) для функций $u_r(t)$, определенных на $[\theta_{r-1},\theta_r)$. При фиксированном значении параметров λ_r задача Коши (7), (8) на интервале $[\theta_{r-1},\theta_r)$ эквивалентна нелинейному интегральному уравнению

$$u_r(t)=\int_{\theta_{r-1}}^{t} f(\tau,u_r(\tau)+\lambda_r)d\tau,\ t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\ r=\overline{1,m+1}. \tag{11}$$

Вместо $u_r(\tau)$ подставив соответствующую правую часть (11) и повторив этот процесс ν $(\nu=1,2,...)$ раз, получим представление функции $u_r(t)$, отсюда, определив $\lim\limits_{t\to\theta_r-0}u_r(t)$, $r=\overline{1,m+1}$, и подставив соответствующие им выражения в (9), (10), получим систему нелинейных уравнений относительно $\lambda_r\in R^n$

$$Q_{\nu,\tilde\theta}(\lambda,u)=0,\ \lambda\in R^{n(m+1)}. \tag{12}$$

Для нахождения пары $(\lambda,u[t])$ имеем замкнутую систему уравнений (11), (12), определяемую через функции $f(t,x)$, $J_i(x)$, точки θ_r и число подстановок ν. Возьмем $\lambda^{(0)}=\left(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},...,\lambda_{m+1}^{(0)}\right)'\in R^{n(m+1)}$ и предположим, что задача Коши (7), (8) при $\lambda_r=\lambda_r^{(0)}$ имеет решение $u_r^{(0)}(t)$, непрерывные на $[\theta_{r-1},\theta_r)$ и для которых существует конечный левосторонний предел $\lim\limits_{t\to\theta_r-0}u_r^{(0)}(t)$ при всех $r=\overline{1,m+1}$. Множество таких $\lambda^{(0)}\in R^{n(m+1)}$ обозначим $Z^0(f,\tilde\theta)$.

Взяв $\lambda^{(0)}\in Z^{(0)}(f,\tilde\theta)$, $u^{(0)}[t]$, непрерывные и неотрицательные на $[\theta_{r-1},\theta_r]$, функции $V_r(t)\ge 0$, число $\sigma>0$, построим множества

$$S(\lambda^{(0)},\sigma)=\left\{(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{m+1})'\in R^{n(m+1)}:\left\|\lambda_r-\lambda_r^{(0)}\right\|<\sigma,r=\overline{1,m+1}\right\};$$

$$S\left(u^{(0)}[t],V[t]\sigma\right)=\Big\{\left(u[t]=u_1(t),u_2(t),...,u_{m+1}(t)\right)'\in R^{n(m+1)}:$$

$$:\left\|u_r(t)-u_r^{(0)}(t)\right\|<V_r(t)\sigma,t\in[\theta_{r-1},\theta_r),r=\overline{1,m+1}\Big\};$$

$$Z_0(V[t],\sigma)=\Big\{(t,x):t\in[0,T],\left\|x-\lambda_r^{(0)}-u_r^{(0)}(t)\right\|<[V_r(t)+1]\sigma;$$

$$t\in[\theta_{r-1},\theta_r),r=\overline{1,m+1};$$

$$\left\|x-\lambda_{m+1}^{(0)}-\lim_{t\to T-0}u_{m+1}^{(0)}(t)\right\|<[V_{m+1}(T)+1]\sigma,\ t=T\Big\};$$

$$Z_i(V[t],\sigma)=\left\{x\in R^n:\left\|x-\lambda_r^{(0)}-\lim_{t\to\theta_i-0}u_i^{(0)}(t)\right\|<[V_i(\theta_i)+1]\sigma\right\},r=\overline{1,m}.$$

Через $W=W\left(f,L(t),\tilde\theta,J_i,L_i,i=\overline{1,m}\right)$ обозначим совокупность $\left(\lambda^{(0)},u^{(0)}[t],V[t],\sigma\right)$, при которых функции $f(t,x)$, $J_i(x)$ соответственно в $Z_0(V[t],\sigma)$, $Z_i(V[t],\sigma)$ имеют равномерно непрерывные частные производные и выполняются неравенства $\|f_x'(t,x)\|\le L(t)$, $\|J_{i,x}'(x)\|\le L_i,i=\overline{1,m}$, где $L(t)$ — кусочно-непрерывная функция на $[0,T]$ с возможными разрывами первого рода в точках $t=\theta_i$, $i=\overline{1,m}$, удовлетворяющие соотношениям $\exp\left(\int_{\theta_{r-1}}^{t}L(\tau)d\tau\right)-1\le V_r(t)$, $t\in[\theta_{r-1},\theta_r),r=\overline{1,m+1}.$ Предполагая существование $\lambda^{(0)}\in Z^0(f,\tilde\theta)$, за начальное приближение решения задач (7)–(10) возьмем пару $\left(\lambda^{(0)},u^{(0)}[t]\right)$, и последовательные приближения строим по следующему алгоритму:

Шаг 1. а) Параметр $\lambda^{(1)}\in R^{n(m+1)}$ определяем из систем уравнений (12) при $u=u^{(0)}$;

б) Решая задачу Коши (7), (8) при $\lambda_r=\lambda_r^{(1)}$, находим функции $u_r^{(1)}(t)$, $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$.

Шаг 2. а) Подставляя найденные $u_r^{(1)}$, $r=\overline{1,m+1}$, в (12), определяем $\lambda^{(2)}\in R^{n(m+1)}$;

б) Решая задачу Коши (7), (8) на интервалах $[\theta_{r-1},\theta_r)$ при $\lambda_r=\lambda_r^{(2)}$, находим функцию $u_r^{(2)}(t), r=\overline{1,m+1}$.

Продолжая процесс на k-ом шаге, получаем пару $\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]\right)$. Для нахождения решения системы уравнений (12) мы воспользуемся теоремой 1 из [7].

Достаточные условия осуществимости, сходимости предложенного алгоритма и существования изолированного решения многоточечной краевой задачи с параметром (7)-(10) устанавливает

Теорема 1. Пусть существуют $\nu\in N$, $\left(\lambda^{(0)},u^{(0)}[t],V[t],\sigma\right)\in W$, при которых матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde\theta}(\lambda,u)}{\partial\lambda}$ обратима для любых $(\lambda,u[t])\in S\left(\lambda^{(0)},\sigma\right)\times S\left(u^{(0)}[t],V[t]\sigma\right)$ и справедливы неравенства

1) $\left\|\left[\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde\theta}(\lambda,u)}{\partial\lambda}\right]^{-1}\right\|\le\gamma_\nu\left(\tilde\theta\right)$;

2) $q_\nu\left(\tilde\theta\right)=\gamma_\nu\left(\tilde\theta\right)\max\left(1,\max\limits_{r=\overline{1,m+1}}\|L_i\|\right)\max\limits_{r=\overline{1,m+1}}\left\{e^{\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r}L(t)dt}-\sum\limits_{i=0}^{\nu}\dfrac{1}{i!}\left(\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\theta_r}L(t)\,dt\right)^i\right\}<1$;

3) $\dfrac{1}{1-q_\nu\left(\tilde\theta\right)}\gamma_\nu\left(\tilde\theta\right)\left\|Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda^{(0)},u^{(0)}\right)\right\|<\sigma$.

Тогда определяемая алгоритмом последовательность пар $\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]\right)$, $k=0,1,2,\ldots$ содержится в $S\left(\lambda^{(0)},\sigma\right)\times S\left(u^{(0)}[t],V[t]\sigma\right)$ и сходится к решению задачи (7)–(10) — паре $\left(\lambda^*,u^*[t]\right)\in S\left(\lambda^{(0)},\sigma\right)\times S\left(u^{(0)}[t],V[t]\sigma\right)$ и справедливы оценки

а) $\left\|\lambda^*-\lambda^{(k)}\right\|\le\left[q_\nu\left(\tilde\theta\right)\right]^k\dfrac{\gamma_\nu\left(\tilde\theta\right)}{1-q_\nu\left(\tilde\theta\right)}\left\|Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda^{(0)},u^{(0)}\right)\right\|$;

б) $\left\|u_r^*(t)-u_r^{(k)}(t)\right\|\le\left(e^{\int_{\theta_{r-1}}^{t}L(\tau)d\tau}-1\right)\left\|\lambda_r^*(t)-\lambda_r^{(k)}(t)\right\|$, $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$.

Причем любое решение задачи (7)–(10) в $S\left(\lambda^{(0)},\sigma\right)\times S\left(u^{(0)}[t],V[t]\sigma\right)$ изолировано.

Доказательство. В силу условий теоремы оператор $Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda,u^{(0)}\right)$ в $S\left(\lambda^{(0)},\rho\right)$ удовлетворяет всем предположениям теоремы 1 [7]. Взяв число $\varepsilon_0>0$, удовлетворяющее неравенствам $\varepsilon_0\gamma_\nu\left(\tilde\theta\right)\le\dfrac{1}{2}$; $\gamma_\nu\left(\tilde\theta\right)\left\|Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\tilde\lambda,u^{(0)}\right)\right\|<\sigma\left[1-\varepsilon_0\gamma_\nu\left(\tilde\theta\right)\right]$ и используя равномерную $S\left(\lambda^{(0)},\rho\right)$ непрерывность матрицы Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda,u^{(0)}\right)}{\partial\lambda}$, найдем $\delta_0\in\left(0;\dfrac{\sigma}{2}\right]$ такое, что $\left\|\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda,u^{(0)}\right)}{\partial\lambda}-\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\tilde\lambda,u^{(0)}\right)}{\partial\lambda}\right\|<\varepsilon_0$ для любых $\lambda,\ \tilde\lambda\in S\left(\lambda^{(0)},\rho\right)$ при $\left\|\lambda-\tilde\lambda\right\|<\delta_0$. Выбрав $\alpha\ge\alpha_0=\max\left(\dfrac{1,\gamma_\nu\left(\tilde\theta\right)\left\|\partial Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda,u^{(0)}\right)\right\|}{\delta_0}\right)$, построим итеграционный процесс

$$\lambda^{(1,0)} = \lambda^{(0)},\ \lambda^{(1,s+1)} = \lambda^{(1,s)} - \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda^{(1,s)}, u^{(0)}\right)}{\partial\lambda}\right]^{-1} Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda^{(1,s)}, u^{(0)}\right),\ m = 0,1,... \quad (13)$$

По теореме 1 [7] итерационный процесс (13) сходится к $\lambda^{(1)} \in S\left(\lambda^{(0)}, \delta\right)$ — изолированному решению уравнения $Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda, u^{(0)}\right) = 0$ и

$$\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\| \le \gamma_\nu\left(\tilde\theta\right)\left\|Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda^{(1,S)}, u^{(0)}\right)\right\| < \sigma. \quad (14)$$

При наших предположениях задача Коши (7), (8) при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$ на $\left[\theta_{r-1}, \theta_r\right)$ имеет единственное решение $u_r^{(1)}(t)$ и для него справедливо неравенство

$$\left\|u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t)\right\| \le \int_{\theta_{r-1}}^{t} \alpha(\tau)\left\|\lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)}\right\| + \left\|u_r^{(1)}(\tau) - u_r^{(0)}(\tau)\right\| d\tau.$$

Используя лемму Гронуолла-Беллмана, имеем

$$\left\|u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t)\right\| \le \left(\exp\left[\int_{\theta_{r-1}}^{t} \alpha(\tau) d\tau\right] - 1\right)\left\|\lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)}\right\|,\ t \in \left[\theta_{r-1}, \theta_r\right),\ r = \overline{1, m+1}. \quad (15)$$

Откуда и из (14) получаем $u^{(1)}[t] \in \bar S\left(u^{(0)}[t],\ R[t]\sigma\right)$.

Из структуры оператора $Q_{\nu,\tilde\theta}(\lambda, u)$ и равенства $Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda^{(1)}, u^{(0)}\right) = 0$ следует, что

$$\gamma_\nu\left(\tilde\theta\right)\left\|Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda^{(1)}, u^{(1)}\right)\right\| = \gamma_\nu\left(\tilde\theta\right)\left\|Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda^{(1)}, u^{(1)}\right) - Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda^{(1)}, u^{(0)}\right)\right\| \le$$

$$\le \gamma_\nu\left(\tilde\theta\right)\max\left(1, \max_{i=1,m}\left\|L_i\right\|\right)\max_{r=1,m+1}\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} L(\tau_1)...\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} L(\tau_1).\left\|u_r^{(1)}(\tau_\nu) - u_r^{(0)}(\tau_\nu)\right\| d\tau_\nu ... d\tau_1.$$

Подставив правую часть (15) и вычислив повторные интегралы, получим

$$\gamma_\nu\left(\tilde\theta\right)\left\|Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda^{(1)}, u^{(1)}\right)\right\| \le q_\nu\left(\tilde\theta\right)\left\|\left(\lambda^{(1)} - \lambda^{0}\right)\right\|. \quad (16)$$

Если $\lambda \in S\left(\lambda^{(1)}, \sigma_1 + \tilde\varepsilon\right)$, $\sigma_1 = \gamma_\nu\left(\tilde\theta\right)\left\|Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda^{(1)}, u^{(1)}\right)\right\|$, число $\tilde\varepsilon > 0$ удовлетворяет неравенству $\tilde\varepsilon + \gamma_\nu\left(\tilde\theta\right)\left\|Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda^{(0)}, u^{(0)}\right)\right\| / \left[1 - q_\nu\left(\tilde\theta\right)\right] < \sigma$, то в силу неравенств 2), 3) теоремы 1 и (14), (16) имеет место оценка

$$\left\|\lambda - \lambda^{(0)}\right\| \le \left\|\lambda - \lambda^{(1)}\right\| + \left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\| < \gamma_\nu\left(\tilde\theta\right)\left\|Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda^{(1)}\right), u^{(1)}\right\| + \tilde\varepsilon + \left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\| \le$$

$$\le \left[q_\nu\left(\tilde\theta\right) + 1\right]\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\| + \tilde\varepsilon < \frac{\gamma_\nu\left(\tilde\theta\right)}{1 - q_\nu\left(\tilde\theta\right)}\left\|Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda^{(0)}, u^{(0)}\right)\right\| + \tilde\varepsilon < \sigma,$$

то есть $S\left(\lambda^{(1)}, \sigma_1 + \tilde\varepsilon\right) \subset S\left(\lambda^{(0)}, \sigma\right)$. Оператор $Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda, u^{(1)}\right)$ в $S\left(\lambda^{(1)}, \sigma_1 + \tilde\varepsilon\right)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 [7], поэтому итерационный процесс

$$\lambda^{(2,0)} = \lambda^{(1)},\ \lambda^{(2,S+1)} = \lambda^{(2,S)} - \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda^{(2,m)}, u^{(0)}\right)}{\partial\lambda}\right]^{-1} Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda^{(2,m)}, u^{(0)}\right), m = 0,1,...$$

сходится к $\lambda^{(2)} \in S\left(\lambda^{(1)}, \sigma_1 + \tilde\varepsilon\right)$ — изолированному решению уравнения $Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda, u^{(1)}\right) = 0$ и $\left\|\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}\right\| \le \gamma_\nu\left(\tilde\theta\right)\left\|Q_{\nu,\tilde\theta}\left(\lambda^{(1)}, u^{(1)}\right)\right\|$ отсюда и из (16) вытекает неравенство

$$\left\|\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}\right\| \le q_\nu\left(\tilde\theta\right)\left\|\left(\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right)\right\|. \quad (17)$$

Предполагая, что пара $\left\|\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}\right\| \le q_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\left\|\left(\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right)\right\|$ определена и установлены оценки

$$\left\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\right\| \le q_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\left\|\left(\lambda^{(k-2)}-\lambda^{(k-3)}\right)\right\| \le \left[q_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\right]^{k-2}\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|; \tag{18}$$

$$\gamma_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(k-2)},u^{(k-1)}\right)\right\| \le q_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\left\|\lambda^{(k-1)},\lambda^{(k-2)}\right\|, \tag{19}$$

k -е приближение по параметру $\lambda^{(k)}$ находим из уравнения $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda,u^{(k-1)}\right)=0$. Используя (18), (19) и равенство $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(k-1)},u^{(k-1)}\right)=0$, аналогично (15), устанавливаем справедливость неравенства

$$\gamma_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(k-1)},u^{(k-1)}\right)\right\| \le q_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\left\|\lambda^{(k-1)},\lambda^{(k-2)}\right\| \le \left[q_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\right]^{k-1}\left\|\lambda^{(1)}+\lambda^{(0)}\right\|. \tag{20}$$

Возьмем $\sigma_{k-1}=\gamma_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(k-1)},u^{(k-1)}\right)\right\|$ и покажем, что $S\left(\lambda^{(k-1)},\sigma_{k-1}+\tilde{\varepsilon}\right)\subset S\left(\lambda^{(0)},\sigma\right)$. Действительно, в виду (18), (19), (20) и (3)

$$\left\|\left(\lambda-\lambda^{(0)}\right)\right\| \le \left\|\lambda-\lambda^{(k-1)}\right\|+\left\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\right\|+\ldots+\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|<$$

$$<\sigma_{k-1}+\tilde{\varepsilon}+\left[q_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\right]^{k-2}\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|+\ldots+\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\| \le .$$

$$\le\left(\left[q_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\right]^{k-1}+\ldots+1\right)\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|+\tilde{\varepsilon}<\frac{\gamma_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)}{1-q_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)}\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(0)},u^{(0)}\right)\right\|+\tilde{\varepsilon}<\sigma.$$

Так как $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda,u^{(k-1)}\right)$ в $S\left(\lambda^{(k-1)},\sigma_{k-1}+\tilde{\varepsilon}\right)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1[1], то существует $\lambda^{(k)}\in S\left(\lambda^{(k-1)},\sigma_{k-1}+\tilde{\varepsilon}\right)$ — решение уравнения $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda,u^{(k-1)}\right)=0$ и справедлива оценка

$$\left\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\right\| \le q_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(k-1)},u^{(k-1)}\right)\right\|. \tag{21}$$

Решая задачи Коши (7), (8) при $\lambda_r=\lambda_r^{(k)}$, находим функции $u_r^{(k)}(t)$, $t\in\left[\theta_{r-1},\theta_r\right)$, $r=\overline{1,m+1}$. Если $\sigma_k=\gamma_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}\right)\right\|=0$, то $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}\right)=0$. Отсюда, учитывая, что $u_r^{(k)}(t)$ является решением задачи Коши (7), (8) при $\lambda_r=\lambda_r^{(k)}$ на $t\in\left[\theta_{r-1},\theta_r\right)$, $r=\overline{1,m+1}$, получаем равенства

$$\lambda_1^{(k)}-\lambda_{m+1}^{k}-\lim_{t\to T-0}u_1^{(k)}(t)=0;\ \lambda_{i+1}^{(k)}-\lambda_i^{(k)}-J_i\left(\lambda_i^{(k)}+\lim_{t\to\theta_i-0}u_i^{(k)}(t)\right)=0,$$

то есть пара $\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]\right)$ — решение задачи (7)–(10).

Используя (20), (21) и неравенство Гронуолла-Беллмана [8], устанавливаем оценки

$$\left\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\right\| \le q_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)\left\|\left(\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\right)\right\|; \tag{22}$$

$$\left\|u_r^{(k)}(t)-u_r^{(k-1)}(t)\right\| \le \left(\exp\left[\int_{\theta_{r-1}}^{t}L(\tau)d\tau\right]-1\right)\left\|\lambda_r^{(k)}-\lambda_r^{(k-1)}\right\|,\ t\in\left[\theta_{r-1},\theta_r\right),\ r=\overline{1,m+1}. \tag{23}$$

Из неравенств (22), (23) и $q_{\nu}(\tilde{\theta})<1$ вытекает, что последовательность пар $\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]\right)$ при $k\to\infty$ сходится к $\left(\lambda^{(*)},u^{(*)}[t]\right)$ — решению задачи (7)-(10). Причем, в силу неравенств $\exp\left(\int_{\theta_{r-1}}^{t}L(\tau)d\tau\right)-1\le V_r(t)$, $t\in\left[\theta_{r-1},\theta_r\right)$, $r=\overline{1,m+1}$, и 3) теоремы 1, $\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]\right)$, $k=1,2,\ldots$ и $\left(\lambda^{(*)},u^{(*)}[t]\right)$ принадлежат $S\left(\lambda^{(0)},\sigma\right)\times S\left(u^{(0)}[t],V[t]\sigma\right)$. В неравенствах

$$\left\|\lambda^{(k+p)}-\lambda^{(k)}\right\|<\frac{1}{1-q_{\nu}(\tilde{\theta})}[q_{\nu}\left(\tilde{\theta}\right)]^{k}\gamma_{\nu}(\tilde{\theta})\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(0)},u^{(0)}\right)\right\|;$$

$$\left\|u_r^{(k+p)}(t)-u_r^{(k)}(t)\right\| \le \left(\exp\left[\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t} L(\tau)d\tau\right]-1\right)\left\|\lambda_r^{(k+p)}-\lambda_r^{(k)}\right\|,\ t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\ r=\overline{1,m+1},$$

переходя к пределу при $p\to\infty$, получаем оценки а), б) теоремы 1.

Покажем изолированность решения. Пусть пара $\left(\tilde{\lambda},\tilde{u}[t]\right)$ — решение задачи (7)–(10) принадлежащее $S\left(\lambda^{(0)},\sigma\right)\times S\left(u^{(0)}[t],V[t]\sigma\right)$. Тогда существует число $\tilde{\delta}>0$ такое, что $\left\|\tilde{\lambda}-\lambda^{(0)}\right\|+\tilde{\delta}<\sigma$.

Учитывая, что функции $\tilde{u}_r(t)$, $u_r^{(0)}(t)$ являются решениями задачи Коши (7), (8) при $\lambda_r=\tilde{\lambda}_r$, $\lambda_r=\lambda_r^{(0)}$ соответственно, и вновь используя неравенство Гронуолла-Беллмана, имеем

$$\left\|\tilde{u}_r(t)-u_r^{(0)}(t)\right\| \le \left(\exp\left[\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t} L(\tau)d\tau\right]-1\right)\left\|\tilde{\lambda}_r-\lambda_r^{(0)}\right\| \le V_r(t)\left\|\tilde{\lambda}_r-\lambda_r^{(0)}\right\|,\ t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\ r=\overline{1,m+1}.$$

Теперь, если $\lambda\in S\left(\tilde{\lambda},\tilde{\delta}\right)$, $u[t]\in S\left(u^{(0)}[t],V[t]\sigma\right)$, то в силу неравенств

$$\left\|\lambda-\lambda^{(0)}\right\| \le \left\|\lambda-\tilde{\lambda}\right\|+\left\|\tilde{\lambda}-\lambda^{(0)}\right\| \le \delta+\left\|\tilde{\lambda}-\lambda^{(0)}\right\|<\sigma,\ r=\overline{1,m+1};$$

$$\left\|u_r(t)-u_r^{(0)}(t)\right\| \le \left\|u_r(t)-\tilde{u}_r(t)\right\|+\left\|\tilde{u}_r(t)-u_r^{(0)}(t)\right\| \le V_r(t)\tilde{\delta}+V_r(t)\left\|\tilde{\lambda}_r-\lambda_r^{(0)}\right\|<V_r(t)\sigma;$$

$t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, имеем $\lambda\in S\left(\lambda^{(0)},\sigma\right)$, $u[t]\in S\left(u^{(0)}[t],V[t]\sigma\right)$, то есть $S\left(\tilde{\lambda},\tilde{\delta}\right)\subset S\left(\lambda^{(0)},\sigma\right)$, $\bar{S}\left(\tilde{u}[t],V[t]\tilde{\delta}\right)\subset \bar{S}\left(u^{(0)}[t],V[t]\sigma\right)$.

Возьмем число $\varepsilon>0$ такое, что

$$\varepsilon\gamma_\nu(\tilde{\theta})<1,\ q_\nu(\tilde{\theta})<1-\varepsilon\gamma_\nu(\tilde{\theta}). \tag{24}$$

Из равномерной непрерывности $f_x'(t,x)$, $J_{i,x}'(x)$, $i=\overline{1,m}$ соответственно в $Z_0(V[t],\sigma)$, $Z_i(V[t],\sigma)$ и из структуры матрицы Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}(\lambda,u)}{\partial\lambda}$ вытекает ее равномерная непрерывность в $S\left(\lambda^*,\tilde{\delta}\right)\times S\left(u^*[t],V[t]\tilde{\delta}\right)$. Поэтому существует число $\delta\in\left(0,\tilde{\delta}\right]$, при котором $\left\|\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}(\lambda,u)}{\partial\lambda}-\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}(\lambda^*,u^*)}{\partial\lambda}\right\|\le\varepsilon$ для всех $(\lambda,u)\in S\left(\lambda^*,\delta\right)\times S\left(u^*[t],V[t]\delta\right)$. Заметим, что если $\left(\lambda^*,u^*[t]\right)$ — решение задачи (7)–(10), то $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right)=0$ при любом $\nu\in N$.

Пусть $\left(\tilde{\lambda},\tilde{u}\right)\in S\left(\lambda^*,\delta\right)\times S\left(u^*[t],V[t]\delta\right)$ — другое решение задачи (7)–(10). Тогда из равенств $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right)=0;$ $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda},\tilde{u}\right)=0$ и

$$\lambda^*=\lambda^*-\left[\frac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right)}{\partial\lambda}\right]^{-1}Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right),\ \tilde{\lambda}=\tilde{\lambda}-\left[\frac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right)}{\partial\lambda}\right]^{-1}Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda},\tilde{u}\right)$$

следует, что $\lambda^*-\tilde{\lambda}=\lambda^*-\tilde{\lambda}-\left[\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right)}{\partial\lambda}\right]^{-1}\left[Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right)-Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda},u^*\right)+Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda},u^*\right)-Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda},\tilde{u}\right)\right].$

По формуле конечных приращений Лагранжа для разности $Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right)-Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda},u^*\right)$ справедливо равенство

$$\lambda^*-\tilde{\lambda}=-\left[\frac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right)}{\partial\lambda}\right]^{-1}\int\limits_0^1\left(\frac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda}+t(\lambda^*-\tilde{\lambda}),u\right)}{\partial\lambda}-\frac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right)}{\partial\lambda}\right)dt\left(\lambda^*-\tilde{\lambda}\right)-$$

$$-\left[\frac{\partial Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^*,u^*\right)}{\partial\lambda}\right]^{-1}\left[Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda},u^*\right)-Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\tilde{\lambda},\tilde{u}\right)\right].$$

Отсюда следует оценка

$$\left\|\lambda^* - \tilde{\lambda}\right\| \le \frac{\gamma_\nu(\tilde{\theta})}{1-\varepsilon\gamma_\nu(\tilde{\theta})}\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}(\tilde{\lambda},u^*) - Q_{\nu,\tilde{\theta}}(\tilde{\lambda},\tilde{u})\right\| \le \frac{\gamma_\nu(\tilde{\theta})}{1-\varepsilon\gamma_\nu(\tilde{\theta})}\max\left(1, \max_{i=\overline{1,m}}\left\|L_i\right\|\right)\times$$

$$\times \max_{r=\overline{1,m+1}}\left\{\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} L(\tau_1)\ldots\int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} L(\tau_\nu)\left\|u_r^*(\tau_\nu) - \tilde{u}_r(\tau_\nu)\right\|d\tau_\nu \ldots d\tau_1\right\}. \tag{25}$$

И так как $\left\|u_r^*(t) - \tilde{u}_r(t)\right\| \le \int_{\theta_{r-1}}^{t} L(\tau)\left(\left\|\lambda_r^* - \tilde{\lambda}_r\right\| + \left\|u_r^*(\tau) - \tilde{u}_r(\tau)\right\|\right)d\tau$, то в силу неравенства Гронуолла-Беллмана имеют место соотношения

$$\left\|u_r^*(t) - \tilde{u}_r(t)\right\| \le \left(\exp\left(\int_{\theta_{r-1}}^{t} L(\tau)d\tau - 1\right)\right)\left\|\lambda_r^* - \tilde{\lambda}_r\right\|; \tag{26}$$

$$\left\|\lambda^* - \tilde{\lambda}\right\| \le \frac{q_\nu(\tilde{\theta})}{1-\varepsilon\gamma_\nu(\tilde{\theta})}\left\|\lambda^* - \tilde{\lambda}\right\|. \tag{27}$$

Таким образом, в силу (25), (26), (27) неравенств имеют место равенства $\lambda_r^* = \tilde{\lambda}_r$, $u_r^*(t) = \tilde{u}_r(t)$, $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1,m+1}$. Теорема 1 доказана.

Функции $x^{(k)}(t)$, $k = 0,1,2,\ldots$ определили равенствами

$$x^{(k)}(t) = \begin{cases} \lambda_r^{(k)} + u_r^{(k)}(t),\ t \in [\theta_{r-1}, \theta_r),\ r = \overline{1,m+1}; \\ \lambda_{m+1}^{(k)} + \lim\limits_{t \to T-0} u_{m+1}^{(k)}(t),\ t = T, \end{cases}$$

через $S\left(x^{(0)}(t), \left[V[t]+1\right]\sigma\right)$ обозначим множество кусочно-непрерывно дифференцируемых функций $x:[0,T] \to R^n$, удовлетворяющих неравенствам

$$\left\|x(t) - x^{(0)}(t)\right\| < \left[V_r(t)+1\right]\sigma,\ t \in [\theta_{r-1}, \theta_r),\ r = \overline{1,m+1},\ \left\|x(T) - x^{(0)}(T)\right\| < \left[V_{m+1}(T)+1\right]\sigma.$$

Ввиду эквивалентности задач (1)–(3) и (7)–(10) из теоремы 1 следует

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, то последовательность функций $\left(x^{(k)}(t)\right)$, $k = 0,1,\ldots$ содержится в $S\left(x^{(0)}(t), \left[V[t]+1\right]\sigma\right)$, сходится к $x^*(t)$ — изолированному решению задачи (1)–(3) в $S\left(x^{(0)}(t), \left[V[t]+1\right]\sigma\right)$ и справедливы неравенства

$$\left\|x^*(t) - x^{(k)}(t)\right\| < \left[q_\nu(\tilde{\theta})\right]^k \frac{\gamma_\nu(\tilde{\theta})}{1-q_\nu(\tilde{\theta})}\exp\left(\int_{\theta_{r-1}}^{t} L(\tau)d\tau\right)\left\|Q_{\nu,\tilde{\theta}}\left(\lambda^{(0)}, u^{(0)}\right)\right\|,\quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r),\ r = \overline{1,m+1}. \tag{28}$$

Причем любое решение задачи (1)–(3) в $S\left(x^{(0)}(t), \left[V[t]+1\right]\sigma\right)$ изолировано.

Доказательство. Пусть условия теоремы 1 выполнены. Так как для всех $k = 0,1,2,\ldots$ пара $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ содержится в $S\left(\lambda^{(0)}, \sigma\right) \times S\left(u^{(0)}[t], V[t]\sigma\right)$, сходится к $\left(\lambda^*, u^*[t]\right) \in S\left(\lambda^{(0)}, \sigma\right) \times S\left(u^{(0)}[t], V[t]\sigma\right)$ — решению задачи (7)–(10), то определенная нами последовательность функций $\left(x^{(k)}(t)\right)$, $k = 0,1,2,\ldots$ содержится в $S\left(x^{(0)}(t), \left(V[t]+1\right)\sigma\right)$, сходится к $x^*(t) \in S\left(x^{(0)}(t), \left[V(t)+1\right]\sigma\right)$ — решению задачи (1)–(3). В силу неравенств а), б) теоремы 1 при $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1,m+1}$, имеет место неравенство (28). Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1986.

2. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Периодические и почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Украинский мат. журн. — 1980. — Т. 34. — № 1. — С. 66–73.
3. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 125 с.
4. *Роговченко Ю.В., Трофимчук С.И.* Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием // Украинский мат. журн. — 1989. — Т. 41. — № 5. — С. 622–626.
5. *Martynyuk A.A., Chernetzkaya L.N.* On boundedness of the solution to impulsive system // Прикладная механика. — 1997. — № 7. — Т. 33. — С. 88–94.
6. *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1989. — Т. 29. — № 1. — С. 50–66.
7. *Джумабаев Д.С.* Итерационные процессы с демпфирующими множителями и их применения // Матем. журн. — Алматы, 2001. — Т. 1. — № 1.
8. *Филатов А.Н., Шарова Л.В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. — М.: Наука. — 152 с.