

здесь $\alpha_0(x) = \int_0^p G_0(x, \xi) f_0(\xi) d\xi$, $R_0(x, \xi) = \bar{G}_0(x, \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{G}_m(x, \xi)$,

$$R_n(x, \xi) = \bar{G}_n(x, \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{G}_{nm}(x, \xi), \quad \bar{G}_0(x, \xi) = a_1 G_{0\xi}(x, \xi) - a_2 G_0(x, \xi),$$

$$\bar{G}_n(x, \xi) = a_1 G_{n\xi}(x, \xi) - a_2 G_n(x, \xi),$$

$G_0(x, \xi)$ функция Грина для задачи:

$$\begin{cases} V_0''' = 0, \\ V_0''(0) = V_0(p) = V_0'(p) = 0, \end{cases}$$

$G_n(x, \xi)$ функция Грина для задачи:

$$\begin{cases} V''' + \lambda_n^3 V = 0, \\ V''(0) = V(p) = V'(p) = 0, \end{cases}$$

Доказана равномерная сходимость ряд (3) и его производная входящие в уравнения (2), используя условия на заданных функций.

Список использованной литературы

1. Апаков Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Украинский математический журнал. - Киев. 2012. Т.64. № 1. С. 1-11.
2. Иргашев Б. Ю. Краевая задача для одного вырождающего уравнения высокого порядка с младшими членами // Bulletin of the Institute of Mathematics. – 2019. – №. 6. – С. 23-29.
3. Apakov, Y.P., Umarov, R.A. Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms. Construction of the Green's Function. Lobachevskii J Math 43.

ЗАДАЧА ТРИКОМИ-НЕЙМАНА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Уринов А.К., Каримов К.Т.

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

E-mail: urinovak@mail.ru, karimovk80@mail.ru

В работе исследована задача Трикоми-Неймана для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в смешанной области, для которого эллиптическая часть состоит из четверти цилиндра, а гиперболическая часть из прямоугольной призмы. Доказано однозначной разрешимости поставленной задачи в классе регулярных решений.

Пусть Ω - трехмерная область, ограниченная цилиндрической поверхностью

$$S_0 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0, z \in (0, c)\}, \text{ прямоугольниками}$$

$$S_1 = \{(x, y, z) : x \in (1/2, 1), x - y = 1, z \in (0, c)\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) : x \in (0, 1/2), x + y = 0, z \in (0, c)\},$$

$$S_3 = \{(x, y, z) : x = 0, y \in (0, 1), z \in (0, c)\} \text{ и плоскими фигурами } S_4 = M_0 \cup I_1 \cup M_1,$$

$$S_5 = M_2 \cup I_2 \cup M_3, \quad \text{где } M_1 = \{(x, y, z) : -y < x < 1 + y, -1/2 < y < 0, z = 0\},$$

$$M_0 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0, z = 0\}, \quad M_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0, z = c\},$$

$$M_3 = \{(x, y, z) : -y < x < 1 + y, -1/2 < y < 0, z = c\}, \quad I_1 = \{(x, y, z) : x \in (0, 1), y = 0, z = 0\},$$

$$I_2 = \{(x, y, z) : x \in (0, 1), y = 0, z = c\}.$$

В области Ω рассмотрим уравнение

$$L_{\beta\beta\gamma}U \equiv U_{xx} + (\operatorname{sgny})U_{yy} + U_{zz} + \frac{2\beta}{x}U_x + \frac{2\beta}{|y|}U_y + \frac{2\gamma}{z}U_z = 0, \quad (1)$$

где $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, причем $0 < \beta < 1/2$, $-2 < \gamma < 1/2$.

В области Ω уравнение (1) принадлежит смешанному типу, а именно в области $\Omega_0 = \Omega \cap \{y > 0\}$ - эллиптическому типу, а в области $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}$ - гиперболическому типу, причем $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ являются плоскостями сингулярности уравнения, а при переходе через прямоугольника $\bar{\Omega}_0 \cap \bar{\Omega}_1$ уравнения меняет свой тип.

Для уравнения (1) в области Ω сформулируем и исследуем следующую задачу:

Задача TN. Найти функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (1) и следующим условиям:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &\in C(\bar{\Omega}) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_0 \cup \Omega_1), \quad x^{2\beta}U_x, \quad z^{2\gamma}U_z \in C(\bar{\Omega}); \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^{2\beta}U_x(x, y, z) &= 0, \quad (0, y, z) \in S_3; \quad \frac{\partial}{\partial n}U(x, y, z) = F(x, y, z), \quad (x, y, z) \in S_0; \\ U(x, y, z)|_{\bar{S}_2} &= 0, \quad U(x, y, z)|_{\bar{S}_4} = 0, \quad U(x, y, z)|_{\bar{S}_5} = 0, \end{aligned}$$

а также условию склеивания

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta}U_y(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta}U_y(x, y, z), \quad x \in (0, 1), \quad z \in (0, c), \quad (2)$$

где $\partial U / \partial n$ - производная по внешней нормали к поверхности S_0 , а $F(x, y, z)$ - заданная непрерывная функция.

В работе доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $\beta \in (0, 1/2)$, $\gamma \in (-2, 1/2)$ и выполнены следующие условия: а) функции $\frac{f(\varphi, z)}{(\sin 2\varphi)^{1-2\beta}}$ и $\frac{\partial}{(\sin 2\varphi)\partial\varphi} \left[\frac{f(\varphi, z)}{(\sin 2\varphi)^{1-2\beta}} \right]$ обращаются в нуль при $\varphi \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow \pi/2$ равномерно по z ; б) функции $f(\varphi, z)$ и $B_{\gamma-1/2}^z f(\varphi, z)$ обращаются в нуль при $z \rightarrow 0$ и $z \rightarrow c$ равномерно по φ ;

$$\text{в) } z^{2\gamma} \frac{\partial}{\partial z} f(\varphi, z), \quad z^{2\gamma} \frac{\partial}{\partial z} B_{\gamma-1/2}^z f(\varphi, z) \in C(\bar{\Pi}), \quad \Pi = \{(\varphi, z) : \varphi \in (0, \pi/2), z \in (0, c)\},$$

$$\text{г) } \frac{\partial}{\partial z} z^{2\gamma} \frac{\partial}{\partial z} B_{\gamma-1/2}^z \left\{ \frac{\partial}{\partial\varphi} \left[\frac{\partial \left[f(\varphi, z) (\sin 2\varphi)^{2\beta-1} \right]}{(\sin 2\varphi)\partial\varphi} \right] \right\} \in L(\bar{\Pi}).$$

Тогда решение задачи TN в области $\Delta = \{(\rho, \varphi, z) : \rho \in (0, 1), \varphi \in (0, \pi/2), 0 < z < c\}$ (область Ω_0 в цилиндрические координаты) существует и определяется формулой

$$U(x, y, z) = V(\rho, \varphi, z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_n(\varphi) \tilde{g}_{nm}(\rho) z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)}{[c J_{3/2-\gamma}(\sigma_m)]^2}, \quad (3)$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$, $J_l(z)$ - функция Бесселя порядка l первого рода [1], $S_n(\varphi) = (\sin \theta)^{1/2-\beta} P_{(\omega_n-1)/2}^{1/2-\beta}(\cos \theta)$, $\theta = \pi - 2\varphi \in [0, \pi/2]$, $P_\nu^\mu(x)$ - функция Лежандра [2],

$$\tilde{g}_{nm}(\rho) = \frac{\rho^{-2\beta} I_{\omega_n}(\sigma_m \rho/c) F_{nm}}{[(\omega_n - 2\beta) I_{\omega_n}(\sigma_m/c) + (\sigma_m/c) I_{\omega_n+1}(\sigma_m/c)]}, \quad I_l(z) - \text{функция Бесселя мнимого}$$

аргумента порядка l [1],
$$F_{nm} = \int_0^c \int_0^{\pi/2} f(\varphi, z) (\sin 2\varphi)^{2\beta} S_n(\varphi) z^{1/2+\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c) d\varphi dz,$$

$\omega_n = 2n + \beta - 3/2$, $n \in N$, σ_m – m -ый положительный корень уравнения $J_{1/2-\gamma}(x) = 0$.

Из равенства (3) в силу условия склеивания (2), находим
$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} U_y(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} U_y(x, y, z) = v(x)Z(z).$$
 Затем, подставляя это в формулу

$$U(x, y, z) = \chi Z(z) \int_0^{x+y} v(t) (r_0^2)^{-\beta} \left(\frac{t}{x}\right)^\beta \Xi_2(\beta, 1-\beta, 1-\beta; r_1, r_2) dt,$$

находим решение задачи TN в области Ω_1 ,

где $\chi = 2^{2\beta-1} \Gamma(\beta) / [\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)]$, $r_0^2 = (x-t)^2 - y^2$, $r_1 = -r_0^2 / (4xt)$, $r_2 = \lambda r_0^2 / 4$, а $\Xi_2(a, b, c; x, y)$ – гипергеометрическая функция Гумберта [2]:

$$\Xi_2(a, b, c; x, y) = \sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_{m+k}} \frac{x^m y^k}{m!k!},$$

$(a)_m = a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1) = \Gamma(a+m)/\Gamma(a)$ – символ Похгаммера.

Список использованной литературы

1. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. –М.: Т.1.Изд. ИЛ, 1949. -798 с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра. -М.: Наука, 1973. -296 с.

О РАЗРЕШИМОСТИ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Усманов К., Шадибеков К.

Университет Ахмеда Ясави, Туркестан, Казахстан

E-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz

Как известно одним из частных случаев функционально – дифференциальных уравнений является так называемые дифференциальные уравнения дробного порядка. Недавно в работе [1] было введено один из вариантов дробной производной, так называемая” конформабельная производная”.

В данной работе на отрезке $[0, T]$ рассмотрим многоточечную краевую задачу для систем функционально - дифференциальных уравнении с конформабельной производной

$$T_\alpha x(t) + AT_\alpha x(\sigma(t)) = \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t K_2(t, s)\dot{x}(s)ds + f(t), \quad t \in [0, T], x \in R^n, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m B_i x(\theta_i) = d, \quad d \in R^n, \quad (2)$$

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{m-1} < \theta_m = T,$$

где $0 < \alpha < 1$, матрица $K_1(t, s), K_2(t, s)$ непрерывны на $[0, T] \times [0, T]$, n - мерная вектор-функция $f(t)$ непрерывна на $[0, T]$, A – некоторая симметричная, $B_i, i = \overline{1, m}$ - постоянные матрицы, порядка $n \times n$.