

$$u(-1, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad u_{xx}(-1, t) = 0, \quad u_{xx}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

және

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, T) = \psi(x), \quad x \in [-1, 1] \quad (3)$$

бастапқы шекаралық шарттары, мұндағы $\Omega = \{-1 < x < 1, 0 < t < T\}$, $\phi(x), \psi(x)$ жеткілікті тегіс функциялар және $q(x) = q_1(x) + q_2(x)$ комплекс мәнді коэффициент[1].

Айталық $D(L_q)$ жиыны (2) шекаралық шартты қанағаттандыратын функциялардан тұрады $y(x) \in C^4(-1, 1) \cap C^3[-1, 1]$

Теорема[2]. Мына төмендегі шарттар орындалсын:

1. $q(x) \in C^4[-1, 1], \varphi, \psi \in D(L_q), L_q\varphi, L_q\psi \in D(L_q)$
2. $|1 - \cos \sqrt{\lambda_k} T| \geq \delta_0$ болатындай δ_0 оң саны табылады;

Онда (1)–(3) кері есебінің жалғыз шешімін келесі Фурье қатары түрінде жазамыз:

$$u(x, t) = \varphi(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k - \psi_k}{1 - \cos \sqrt{\lambda_k} T} [\cos \sqrt{\lambda_k} t - 1] X_k(x)$$

$$f(x) = L_q\varphi(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k - \psi_k}{1 - \cos \sqrt{\lambda_k} T} \lambda_k X_k(x)$$

Әдебиеттер тізімі

- [1] Mussirepova, E.; Sarsenbi, A.A.; Sarsenbi, A.M. Solvability of mixed problems for the wave equation with reflection of the argument. *Math. Methods Appl. Sci.* 2022, 45, 11262–11271
- [2] Imanbetova, A., Sarsenbi, A., Seilbekov, B. (2023). Inverse problem for a fourth order hyperbolic equation with a complex-valued coefficient. *MDPI Mathematics*, 11 (15), 3432. <https://doi.org/10.3390/math11153432>

ЖҮГІ БӨЛШЕКТІК ИНТЕГРАЛ ТҮРІНДЕ БЕРІЛГЕН ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ЕСЕБІНІҢ ШЕШІМІ ЖАЙЛЫ

Камила Ижанова¹, Минзилия Космакова²

^{1,2}Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды зерттеу университеті, Қарағанды, Қазақстан

¹E-mail: kamila.izhanova@alumni.nu.edu.kz

²E-mail: svetlanamir578@gmail.com

$Q = \{(x, t) : x > 0, t > 0\}$ облысында келесі шеттік есептің шешімін табамыз:

$$u_t - u_{xx} + \lambda I_{0x}^\beta u(x, t)|_{x=\gamma(t)} = f(x, t), \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = 0; u|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Берілген шеттік есептің шешімін келесі түрде жазып алуға болады:

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) \mu(\tau) d\xi d\tau + f_1(x, t), \quad (3)$$

мұндағы

$$\mu(t) = I_{0x}^\beta u(x, t)|_{x=\gamma(t)}, \quad 0 < \beta < 1,$$

$$f_1(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

β -ретті (мұндағы $0 < \beta < 1$) жүктік интеграл операторды (3) теңдеуге қолданар алдында, келесі теңдікті ескерміз :

$$\int_0^\infty G(x, \xi, t) d\xi = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

Солай (3) теңдеуімізді келесідей жазып аламыз:

$$u(t, \tau) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau + f_1(x, t). \quad (4)$$

Кейін бөлшектік интегралды есептейміз:

$$\begin{aligned} & I_{0x}^\beta \left(\int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau \right) (x) = \\ & \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x \left(\int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{\theta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau \right) \frac{1}{(x-\theta)^{1-\beta}} d\theta = \\ & \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \mu(\tau) \left(\int_0^x \operatorname{erf}\left(\frac{\theta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) (x-\theta)^{\beta-1} d\theta \right) d\tau = \\ & \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \mu(\tau) J(t, \tau, x; \beta) d\tau, \end{aligned}$$

мұндағы (1)

$$\begin{aligned} J(t, \tau, x; \beta) &= \int_0^x \operatorname{erf}\left(\frac{\theta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) (x-\theta)^{\beta-1} d\theta = \\ & \frac{x^{\beta+1}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} B(2, \beta) {}_3F_3 \left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{\beta+2}{2}, \frac{\beta+3}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{4(t-\tau)} \right) = \\ & \frac{x^{\beta+1} \Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi(t-\tau)} \Gamma(\beta+2)} {}_2F_2 \left(1, \frac{1}{2}; \frac{\beta+2}{2}, \frac{\beta+3}{2}; -\frac{x^2}{4(t-\tau)} \right), \end{aligned}$$

мұнда ${}_pF_q$ - жалпыланған гипергеометриялық тізбек (2). $x = \gamma(t)$ мәнінде (4) теңдеудің бөлшек туындысын алғаннан кейін, есебіміз келесі интегралдық теңдеуге келтірілді:

$$\mu(t) + \lambda \int_0^t K_\beta(t, \tau)\mu(\tau)d\tau = f_2(t), \quad (5)$$

мұндағы

$$K_\beta(t, \tau) = \frac{(\gamma(t))^{\beta+1}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}\Gamma(\beta+2)} {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{\beta+2}{2}, \frac{\beta+3}{2}; -\frac{(\gamma(t))^2}{4(t-\tau)}\right) \quad (6)$$

$$f_2(t) = I_{0x}^\beta f_1(x, t)|_{x=\gamma(t)} \quad (7)$$

Мұндағы ${}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; z)$ - барлық шектелген z мәндері үшін жинақталатын жалпыланған гипергеометриялық қатар. Шектік мәндерінде ядроның мәнін есептейік.

I. $\beta = 0$ Шеттік есеп (1) келесідей жазылады:

$$\begin{aligned} u_t - u_x x + \lambda \mu(t) &= f(x, t), \\ u|_{x=0} &= 0; u|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

мұндағы $\mu(t) = I_{0x}^0(u(x, t))|_{x=\gamma(t)} = u(\gamma(t); \tau)$.

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau + f_1(x, t) \quad (8)$$

Есепке интеграл операторын қолданғанда I_{0x}^0 және $x = \gamma(t)$ болғанда:

$$\mu(t) + \lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau = f_2(t), \quad (9)$$

мұндағы

$$f_2(t) = f_1(\gamma(t), t).$$

(6) теңдеуінің шегін алғанда:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0+0} K_\beta(t, \tau) = \frac{\gamma(t)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}\Gamma(2)} {}_2F_2\left(1, \frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; -\frac{(\gamma(t))^2}{4(t-\tau)}\right) = \frac{\gamma(t)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{(\gamma(t))^2}{4(t-\tau)}\right)$$

мұндағы,

$${}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2z} \operatorname{erf}(z).$$

Сонда,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0+0} K_\beta(t, \tau) = \frac{\gamma(t)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \frac{\sqrt{\pi}2\sqrt{t-\tau}}{2\gamma(t)} \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma(t)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma(t)}{2\sqrt{t-\tau}}\right).$$

Сонда шыққан шегіміз (9) шегіне сәйкес келеді.

II. $\beta = 1$. Осы жағдайда:

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} + \lambda\mu(t) &= f(x, t), \\u|_{x=0} &= 0; \quad u|_{t=0} = 0,\end{aligned}$$

мұндағы

$$\mu(t) = I_{0x}^1(u(x, t))|_{x=\gamma(t)} = \int_0^x u(\theta, t) d\theta|_{x=\gamma(t)}, \quad (10)$$

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau + f_1(x, t). \quad (11)$$

I_{0x}^1 интеграл операторын қолданар және $x = \gamma(t)$ алмасуының алдында, (10) теңдеуіндегі $\mu(t)$ интегралын есептеп аламыз:

$$\begin{aligned}I_{0x}^1 \left\{ \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau \right\} &= \int_0^x \left(\int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{\theta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau \right) d\theta = \\ \int_0^t \mu(\tau) \left(\int_0^x \operatorname{erf}\left(\frac{\theta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) d\theta \right) d\tau &= \frac{x^2}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} {}_2F_2\left(1, \frac{1}{2}; 2, \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\end{aligned}$$

Сонда теңдеуіміз келесі түрде жазылады:

$$\mu(t) + \lambda \int_0^t \frac{\gamma^2(t)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} {}_2F_2\left(1, \frac{1}{2}; 2, \frac{3}{2}; -\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) = f_2(t) \quad (12)$$

(6) және (7) теңдеулеріндегі ядроның шегі (12) теңдеудің оң жағын береді.

Әдебиеттер тізімі

- [1] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. In Integrals and series (p. 91). Physical and mathematical literature, Moscow, (2003).
- [2] Luke Y. Special mathematical functions and their approximations (p. 270), Academic press, New York, 1975.

ЖАЛПЫЛАНҒАН ЛОКАЛЬДЫ МОРРИ ТИПТІ КЕҢІСТІГІНДЕГІ О'NEIL ТЕҢСІЗДІГІ

Канкенова А.М.¹, Нурсултанов Е.Д.²

¹Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, Астана, Қазақстан

¹E-mail: ayagoz.zhantakbayeva@yandex.ru

²М.В. Ломоносов атындағы ММУҚФ

²E-mail: er-nurs@yandex.ru