

Айталық, $x, y \in [e]_\sigma$ болсын. Онда 1) сәйкес $x, y \in [e]_\sigma \Rightarrow (e\sigma x) \& (e\sigma y) \Rightarrow ((e * e)\sigma(x * y))$, яғни, $e\sigma(x * y)$ және сол себепті $(x * y) \in [e]_\sigma$. Сонымен, а.1) пункті дәлелденді; а.2) пункті осыған ұқсас 2)-ден алынады.

б) Дәлелдеу қарапайым қамтылу әдісімен жүргізіледі.

$[a]_\sigma \subseteq (a * [e]_\sigma)$ қамтылуын дәлелдейік.

Айталық, $x \in [a]_\sigma$, яғни, $a\sigma x$. σ қатынасы рефлексивті болғандықтан, онда $a'\sigma a'$.

$a\sigma x$ және $a'\sigma a'$ -тен 1) импликацияны қолдану арқылы $(a' * a)\sigma(a' * x)$ немесе $e\sigma(a' * x)$ аламыз. Бұл бізге не $(a' * x) \in [e]_\sigma$, не $x \in a * [e]_\sigma$ береді. Кері қамтылу осыған ұқсас тексеріледі.

Айталық, енді $G_1 = \langle G_1; \cdot; e_1 \rangle$ және $G_2 = \langle G_2; \cdot; e_2 \rangle$ екі группасы және G_1 группасының G_2 группасына гомоморфты бейнелеуі φ берілсін. Онда теңбейнелілік қатынасы P_φ G_1 жиынындағы конгруэнция болады және әрі қарай дәстүрлі түрде группалардың гомоморфизмі туралы бірінші теорема дәлелденеді.

References

1. Kargaplov M., Merzlyakov I. Basic theory of groups. — M.: Science, 1982. — P. 288.
2. Mal'cev A.I. Algebraic system. — M.: Science, 1970. — P. 392.
3. Goncharov S.S., Ershov U.L., Samokhvalov K.F. Introduction to logic and methodology of science. — M.: Interpraks, 1994. — P. 255.

УДК 517.927.25

О неустойчивости свойств базисности корневых функций возмущенной задачи Самарского-Ионкина

On non-stability of properties of basisness of one type of problems Samarski-Ionkin on the eigenvalues with nonlocal perturbation of boundary conditions

Иманбаев Н.С.

Международный Казахско-Турецкий университет им. Х.А.Ясави, Шымкент (E-mail: imanbaevnur@mail.ru)

Біршама қобалжуы бар алғашқы оператордың базистік қасиеттерінің сақталуы туралы сұрақ қазіргі кезде өзекті болып табылады. Мақалада қобалжуы шеттік шарттармен берілген екінші ретті дифференциалдық теңдеудің спектралдық есебінің сипаттамалық анықтаушы қобалжуы емес спектралдық Самарский-Ионкин есебінің сипаттамалық анықтаушынан тәуелді екендігі дәлелденген. Интегралдық қобалжуы шеттік шарты бар есептің өзіндік функцияларының жүйесі үшін Рисс базистігі қасиеттерінің тұрақсыздығы көрсетілген.

The question about conservation properties of basisness of source operator at presence of a certain indignation it is enough actual. In given work is proved that characteristic determinant of the spectral problem for differential equation of the second order with outraged boundary condition is depending of characteristic determinant of nonindignant spectral problem of Samarski-Ionkin. Non-stability of properties of Riss basisness systems of proper functions of problem under integral indignation of the boundary condition is shown.

Хорошо известно, что система собственных функций оператора, заданного формально самосопряженным дифференциальным выражением, с произвольными самосопряженными краевыми условиями, обеспечивающими дискретный спектр, образует ортонормированный базис пространства L_2 . Во многих работах исследовался вопрос о сохранении свойств базисности при некотором (слабом в

определенном смысле) возмущении исходного оператора. Например, для случая самосопряженного исходного оператора аналогичный вопрос исследовался в [1–3], а для несамосопряженного — в [4].

В [9] исследовались базисные свойства корневых функций спектральной задачи:

$$\ell(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) - u'(1) = 0, \quad U_2(u) \equiv u(0) = \int_0^1 \overline{p(x)} \mu(x) dx, \quad p(x) \in L_2(0,1).$$

Если $p(x) \equiv 0$, то эта задача называется задачей Самарского-Ионкина [4].

В настоящей работе рассматривается спектральная задача

$$\ell(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) - u'(1) = \int_0^1 \overline{p(x)} \mu(x) dx, \quad p(x) \in L_2(0,1), \tag{2}$$

$$U_2(u) \equiv u(0) = 0. \tag{3}$$

Вопрос о базисности собственных и присоединенных функций (СиПФ) оператора с более общими интегральными краевыми условиями положительно решен в [5], где доказана базисность Рисса со скобками при условии регулярности, по Биркгофу [6; 66–67], краевых условий невозмущенной задачи, а при дополнительном предположении усиленной регулярности — базисность Рисса. В нашем случае невозмущенные краевые условия (2), (3) (когда $p(x) \equiv 0$) являются регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями. Поэтому из [5] следует, что система СиПФ задачи (1)–(3) образует базис Рисса со скобками, а по вопросу базисности Рисса требуется дополнительное исследование. В настоящей работе мы построим характеристический определитель спектральной задачи (1)–(3). На основании полученной формулы делаются выводы о неустойчивости свойств базисности Рисса системы собственных функций задачи при интегральном возмущении краевого условия.

Одной из особенностей рассматриваемой задачи является то, что сопряженной к (1)–(3) является спектральная задача для нагруженного дифференциального уравнения

$$\ell^*(v) = -v''(x) + p(x)v(0) = \bar{\lambda}v(x), \quad V_1(v) \equiv v'(1) = 0, \quad V_2(v) \equiv v(0) - v(1) = 0. \tag{4}$$

Построим сначала характеристический определитель спектральной задачи. Представляя общее решение уравнения (1) при $\lambda \neq 0$ по формуле $u(x, \lambda) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$ и удовлетворяя его краевым условиям (2), (3), получаем линейную систему относительно коэффициентов C_k :

$$\begin{cases} \left[\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p(x)} \cos \sqrt{\lambda}x dx \right] C_1 + \left[\sqrt{\lambda} (1 - \cos \sqrt{\lambda}) - \int_0^1 \overline{p(x)} \sin \sqrt{\lambda}x dx \right] C_2 = 0, \\ C_1 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Ее определитель и будет характеристическим определителем задачи (1)–(3):

$$\Delta_1(\lambda) = \sqrt{\lambda} (1 - \cos \sqrt{\lambda}) - \int_0^1 \overline{p(x)} \sin \sqrt{\lambda}x dx. \tag{6}$$

При $p(x) = 0$ получается характеристический определитель невозмущенной задачи (1)–(3). Обозначим его через $\Delta_0(\lambda) = \sqrt{\lambda} (1 - \cos \sqrt{\lambda})$. Число $\lambda_0^0 = 0$ является однократным собственным значением невозмущенной задачи (1)–(3), а $u_0(x) = +\sqrt{3}x$ — соответствующей собственной функцией. Остальные собственные значения невозмущенной задачи (1)–(3) являются двукратными: $\lambda_k^0 = (2k\pi)^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$. При этом $u_{k0}^0 = \sqrt{2} \sin 2k\pi x$ — соответствующие им собственные, а $u_{k1}^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} x \cos 2k\pi x$ — присоединённые функции. С учетом условия биортогональности $(u_{k1}^0, v_{k1}^0) = 1$ имеем $v_{k1}^0 = 4\sqrt{2} \cos 2k\pi x$ — собственную и $v_{k0}^0 = 2\sqrt{2} (1-x) \sin 2k\pi x$ — присоединенную функции сопряженной задачи к задаче Самарского–Ионкина. Система $\{v_{k0}^0, v_{k1}^0\}$ образует базис Рисса в $L_2(0,1)$ [4].

Функцию $p(x)$ представим в виде биортогонального разложения в ряд Фурье по системе $\{v_{k0}^0, v_{k1}^0\}$:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k0} v_{k0}^0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k1} v_{k1}^0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k0} 2\sqrt{2}(1-x)\sin 2k\pi x + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k1} 4\sqrt{2} \cos 2k\pi x. \quad (7)$$

Используя (7), найдем более удобное представление определителя $\Delta_1(\lambda)$. Для этого сначала вычислим интеграл, входящий в (6). Несложные вычисления показывают, что

$$\int_0^1 \overline{p(x)} \sin \sqrt{\lambda} x dx = 2\sqrt{2\lambda} \left[1 - \cos \sqrt{\lambda} \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2k\pi \overline{a_{k0}}}{[\lambda - (2k\pi)^2]^2} + \frac{2\overline{a_{k1}}}{\lambda - (2k\pi)^2} \right] \right].$$

Используя полученное, определитель (6) стандартными преобразованиями приводится к виду

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \cdot A(\lambda), \text{ где } A(\lambda) = \left[1 - 4\sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\overline{\pi a_{k0}} \frac{k}{[\lambda - (2k\pi)^2]^2} + \overline{a_{k1}} \frac{k}{\lambda - (2k\pi)^2} \right) \right]. \quad (8)$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Характеристический определитель спектральной задачи (1)–(3) с возмущенными краевыми условиями представим в виде (8), где $\Delta_0(\lambda)$ — характеристический определитель невозмущенной спектральной задачи Самарского-Ионкина, a_{k0}, a_{k1} — коэффициенты Фурье биортогонального разложения (7) функции $p(x)$ по системе СиПФ сопряженной невозмущенной спектральной задачи Самарского-Ионкина.

Функция $A(\lambda)$ из (8) имеет полюса второго и первого порядков в точках $\lambda = \lambda_k^0$, а функция $\Delta_0(\lambda)$ имеет нули второго порядка в этих же точках. Поэтому функция $\Delta_1(\lambda)$, представленная по формуле (8), является целой аналитической функцией переменного λ .

Если при некотором индексе j коэффициенты разложения (7) $a_{j0} = 0, a_{j1} = 0$, тогда $\lambda_j^1 = \lambda_j^0$ является двукратным собственным значением возмущенной задачи (1)–(3). Если же $a_{j0} = 0, a_{j1} \neq 0$, то $\lambda_j^1 = \lambda_j^0$ является однократным собственным значением задачи (1)–(3).

Более просто характеристический определитель (8) выглядит в случае, когда $p(x)$ представляется в виде (7) с конечной первой суммой. То есть когда существует такой номер N , что $\overline{a_{k0}} = 0, \overline{a_{k1}} = 0$ для всех $k > N$. В этом случае формула (8) принимает вид

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \left[1 - 4\sqrt{2} \sum_{k=1}^N \left(\overline{\pi a_{k0}} \frac{k}{[\lambda - (2k\pi)^2]^2} + \overline{a_{k1}} \frac{k}{\lambda - (2k\pi)^2} \right) \right]. \quad (9)$$

Из этого частного случая формулы (8) несложно обосновать следующее

Следствие 1. Для любых наперед заданных чисел — комплексного $\hat{\lambda}$ и натурального \hat{m} всегда существует такая функция $p(x)$, что $\hat{\lambda}$ будет являться собственным значением задачи (1)–(3) кратности \hat{m} .

Из анализа формулы (9) легко видеть, что $\Delta_1(\lambda_k^0) = 0$ для всех $k > N$. То есть все собственные значения $\lambda_k^0, k > N$, невозмущенной задачи Самарского-Ионкина являются собственными значениями возмущенной спектральной задачи (1)–(3). Также нетрудно убедиться, что сохраняется и кратность собственных значений $\lambda_k^0, k > N$.

Более того, из условия ортогональности $p(x) \perp u_{j_0}^0, p(x) \perp u_{j_1}^0$ при всех $j > N$ следует, что в этом случае $\int_0^1 \overline{p(x)} u_{j_0}^0(x) dx = \int_0^1 \overline{p(x)} u_{j_1}^0(x) dx = 0$. Поэтому собственные $u_{j_0}^0(x)$ и присоединенные $u_{j_1}^0(x)$ функции невозмущенной задачи Самарского-Ионкина при всех $j > N$ удовлетворяют краевым условиям (2), (3) и, следовательно, являются собственными и присоединенными функциями возмущенной задачи (1)–(3). Значит, в этом случае системы СиПФ возмущенной задачи (1)–(3) и СиПФ невозмущенной задачи Самарского-Ионкина (образующая базис Рисса) отличаются друг от друга лишь по конечному числу первых членов. Следовательно, система СиПФ возмущенной задачи (1)–(3) также образует базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Так как множество функций $p(x)$, представимых в виде конечного ряда (7), является плотным в $L_2(0,1)$, то таким образом доказана

Теорема 2. Множество функций $p(x) \in L_2(0,1)$ таких, что система СиПФ возмущенной задачи (1)–(3) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, является плотным в $L_2(0,1)$.

Покажем теперь, что свойство базисности системы СиПФ возмущенной задачи (1)–(3) является неустойчивым при сколь угодно малом интегральном возмущении краевого условия (2). Имеет место

Теорема 3. Множество функций $p(x) \in L_2(0,1)$ таких, что система СиПФ возмущенной задачи (1)–(3) не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$, является плотным в $L_2(0,1)$.

Доказательство. Очевидно, что множество функций $p(x) \in L_2(0,1)$, представимых в виде ряда (7), коэффициенты которого асимптотически (т.е. начиная с некоторого номера) обладают свойством $a_{k_0} = 0, a_{k_1} \neq 0$, будет плотным в $L_2(0,1)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что для таких функций $p(x)$ система СиПФ задачи не образует обычного базиса.

Пусть j — достаточно большой номер, такой, что $a_{j_0} = 0, a_{j_1} \neq 0$. Тогда из (8) нетрудно видеть, что $\lambda_j^0 = (2j\pi)^2$ является однократным собственным значением задачи (1)–(3). Непосредственным вычислением легко получить, что соответствующей этому значению собственной функцией спектральной задачи (1)–(3) является $u_{j_0}(x) = \sqrt{2} \sin 2j\pi x$ и $\|u_{j_0}(x)\|^2 = 1$.

Найдем собственную функцию сопряженной задачи (4), соответствующую собственному значению $\bar{\lambda}_j^0 = (2j\pi)^2$. Представляя общее решение нагруженного дифференциального уравнения из (4) при $\bar{\lambda} \neq 0$ по формуле

$$v(x) = C_1 \cos \sqrt{\bar{\lambda}} x + C_2 \sin \sqrt{\bar{\lambda}} x + v(0) \int_0^x p(\xi) \frac{\sin(\sqrt{\bar{\lambda}}(x-\xi)) d\xi}{\sqrt{\bar{\lambda}}}$$

и удовлетворяя его краевым условиям из (4), получаем линейную систему относительно коэффициентов C_k :

$$\begin{cases} \left[-\sqrt{\bar{\lambda}} \sin \sqrt{\bar{\lambda}} + \sqrt{\bar{\lambda}} \int_0^1 p(\xi) \cos \sqrt{\bar{\lambda}}(1-\xi) d\xi \right] C_1 + \sqrt{\bar{\lambda}} \cos \sqrt{\bar{\lambda}} C_2 = 0, \\ \left[1 - \cos \sqrt{\bar{\lambda}} - \int_0^1 p(\xi) \sin \sqrt{\bar{\lambda}}(1-\xi) d\xi \right] C_1 - \sin \sqrt{\bar{\lambda}} C_2 = 0. \end{cases}$$

При $\bar{\lambda} = \lambda_j^0 = (2j\pi)^2$ имеем

$$\begin{cases} C_1 \int_0^1 p(\xi) \cos 2j\pi \xi d\xi + C_2 = 0, \\ C_1 \int_0^1 p(\xi) \sin 2j\pi \xi d\xi = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Вычисление интегралов, входящих в (10), дает:

$$\int_0^1 p(\xi) \cos 2j\pi\xi d\xi = 2\sqrt{2a_{j1}} + \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{\sqrt{2}}{\pi} a_{k1} \frac{k}{k^2 - j^2} \text{ при } j > N;$$

$$\int_0^1 p(\xi) \sin 2j\pi\xi d\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} a_{j0} = 0, \text{ при } j > N.$$

Из теоремы Юнга [8, теорема 276, с. 240] следует, что $\lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{k=1, k \neq j}^{\infty} \frac{a_{k1}}{j^2 - k^2} = O\left(\frac{1}{j^2}\right)$. Из системы (10), выражая C_2 через C_1 , получим $C_2 = -C_1 \left[2\sqrt{2a_{j1}} + O\left(\frac{1}{j^2}\right) \right]$ при $j > N$. Поэтому для всех $j > N$ при $a_{j0} = 0, a_{j1} \neq 0$ собственная функция сопряженной задачи (4) имеет вид:

$$v_{j0}(x) = C_1 \left(\cos 2j\pi x - \left[2\sqrt{2a_{j1}} + O\left(\frac{1}{j^2}\right) \right] \sin 2j\pi x + \int_0^x p(\xi) \frac{\sin(2j\pi(x-\xi)) d\xi}{2j\pi} \right).$$

Константу C_1 выбираем из условия биортогональности $(u_{j0}(x), v_{j0}(x)) = 1$. Тогда имеем

$$C_{1j} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left[2\sqrt{2a_{j1}} + O\left(\frac{1}{j^2}\right) \right] + \int_0^1 \sqrt{2} \sin 2j\pi x dx \int_0^x p(\xi) \frac{\sin(2j\pi(x-\xi)) d\xi}{2j\pi} \right) = 1.$$

Используя неравенство Гёльдера для интегрального слагаемого, при $j \rightarrow \infty$ получим оценку:

$$\left| \int_0^1 \sqrt{2} \sin 2j\pi x dx \int_0^x p(\xi) \frac{\sin(2j\pi(x-\xi)) d\xi}{2j\pi} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}\pi j} \sqrt{\int_0^1 |p(\xi)|^2 d\xi} = O\left(\frac{1}{j}\right).$$

Тогда $C_{1j} \left[\sqrt{2a_{j1}} + O\left(\frac{1}{j}\right) \right] = 1$. Поэтому

$$C_{1j} = \frac{1}{\sqrt{2a_{j1}} + O\left(\frac{1}{j}\right)} \rightarrow \infty \text{ при } j \rightarrow \infty,$$

так как коэффициенты Фурье принадлежат классу $a_{j1} \in l_2$. Оценивая $v_{j0}(x)$ по норме $L_2(0,1)$, получим:

$$\begin{aligned} \|v_{j0}\| &\geq C_{1j} \|\cos 2j\pi x\| - C_{1j} \left\| \left[2\sqrt{2a_{j1}} + O\left(\frac{1}{j^2}\right) \right] \sin 2j\pi x + \int_0^x p(\xi) \frac{\sin(2j\pi(x-\xi)) d\xi}{2j\pi} \right\| \\ &\geq \frac{C_{1j}}{\sqrt{2}} \left[1 - \left(2a_{j1} + O\left(\frac{1}{j^2}\right) \right) + O\left(\frac{1}{j}\right) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{j0}\| \cdot \|v_{j0}\| = \infty$. То есть не выполнено условие равномерной минимальности [7; 66] системы СиПФ, и, следовательно, она не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$. Теорема 3 доказана.

Так как сопряженные операторы одновременно обладают свойством базисности Рисса корневых функций, то отсюда получаем

Следствие 2. Множество P функций $p(x) \in L_2(0,1)$, для которых система СиПФ задачи (4) для нагруженного дифференциального уравнения образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, всюду плотно в $L_2(0,1)$. Множество $L_2(0,1) \setminus P$ также всюду плотно в $L_2(0,1)$.

Результаты настоящей работы, в отличие от [5], демонстрируют неустойчивость свойств базисности корневых функций задачи при интегральном возмущении краевых условий, являющихся регулярными, но не усиленно регулярными.

Автор выражает благодарность профессорам М.А.Садыбекову и А.М.Сарсенби за плодотворное обсуждение результатов.

References

1. *Markus A.S.* On decomposition on root vector of weakly outraged self-adjoint operator // Reports AN USSR. — 1962. — Vol. 142. № 3. — P. 538–541.
2. *Kerimov N.B., Mamedov H.R.* On Riss basisness of root functions of some regular boundary problems // Matem. notes. — 1998. — Vol. 64. — Iss.4. — P. 448–563.
3. *Makin A.S.* On nonlocal indignation periodic problem on proper values // Different equations. — 2006. — Vol. 42. — № 4. — P. 560–562.
4. *Ilin V.A., Krickov L.V.* The properties of the spectral decompositions, answering to non-self-adjoint operators // Functional analysis // The totals of the science and technology. Ser. modern. math. and its app. Th. review. — Vol. 96. — M.: VINITI. — 2006. — P. 5–105.
5. *Shkalikov A.A.* On basisness of proper functions of common differential operator with integral boundary condition // Bulletin of MGU. The Mathematics and mechanics. — 1982. — № 6. — P. 12–21.
6. *Naymark M.A.* The linear differential operators. — M., 1969.
7. The functional analysis (Ed. by S.G.Kreyna). — M., 1972.
8. *Hardi G.G., Littlivud Dzh.E.* Inequality. — M.: FL, 1948. — 456 p.
9. *Sadybekov M.A., Imanbaev N.S.* The base properties of root functions of outraged problem of Samarski-Ionkin // Bulletin of Academic innovational university. — Shymkent, 2011. — № 1 (001). — P. 196–201.