

Отметим, что при  $s(x) \equiv 1$  и  $r(x) \equiv 0$  аналогичные утверждения были получены в работах [1, 2] для случаев уравнения Штурма-Лиувилля и Шрёдингера с положительным потенциалом. А когда  $s(x) = \rho(x) \equiv 1$ , такой результат установлен в [3].

### Список использованной литературы

1. Гриншпун Э.З., Отелбаев М. Гладкость решения уравнения Штурма-Лиувилля в  $L_1(-\infty, \infty)$  // Известия АН КазССР. Серия физико-математическая. – 1984. – № 5. – С. 26–29.
2. Ойнаров Р.О. О разделимости оператора Шрёдингера в пространстве суммируемых функций // Доклады АН СССР. – 1985. – Т. 285, № 5. – С. 1062–1064.
3. Ospanov K.N.  $L_1$ -maximal regularity for quasilinear second order differential equation with damped term // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2015. – № 39. – P. 1–9.

## КРИТЕРИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ $l(\cdot) - A$ С ОПЕРАТОРОМ ТРИКОМИ А

Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д., Султангазиева Ж.Б., Кунтуарова А.Д.

Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан

E-mail: [koshanov@list.ru](mailto:koshanov@list.ru)

1. В функциональном пространстве  $L_2(0, T)$  рассмотрим оператор  $B$ , порожденный дифференциальным выражением

$$l(w) \equiv \frac{d^n w}{dt^n} + p_1(t) \frac{d^{n-1} w}{dt^{n-1}} + \dots + p_n(t) w(t), \quad 0 < t < T \quad (1)$$

с регулярными краевыми условиями

$$\sum_{k=0}^{n-1} [\alpha_{kj} w^{(k)}(0) + \beta_{kj} w^{(k)}(T)] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

где  $p_j(t) \in C^{(n-j)}[0, T]$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**Требование I.** Предположим, что область определения оператора  $B$  задается регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями [1]. Иначе говоря, в случае нечетного  $n = 2r - 1$  следующие два определителя  $\theta_0, \theta_1$  отличны от нуля; в случае четного  $n = 2r$  следующие два определителя  $\theta_{-1}, \theta_1$  отличны от нуля.

Сопряженный оператор  $B^*$  задается дифференциальным выражением

$$B^*R(t) = l^+(R), \quad 0 < t < T$$

и областью определения

$$D(B^*) = \{R \in W_2^n[0, T] : V_1(R) = 0, \dots, V_n(R) = 0\}.$$

В работе [1] доказано следующее утверждение.

**Теорема 1 [1].** Пусть область определения оператора  $B$  задается регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями. Тогда область определения оператора сопряженного  $B^*$  задается также регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями.

Нам потребуется также следующее утверждение [3].

**Теорема 2 [3].** Пусть оператор  $B$  порожден регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями. Тогда система собственных и присоединенных функций оператора  $B$  является полной системой в пространстве  $L_2(0, T)$ .

Применяя теорему 1 и теорему 2 к сопряженному оператору  $B^*$ , можем сформулировать утверждение.

**Теорема 3.** Пусть выполнены требование I. Тогда система собственных и присоединенных функций оператора  $B^*$  полна в пространстве  $L_2(0, T)$ .

2. Пусть  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  - конечная область, ограниченная при  $y > 0$  кривой Ляпунова  $\sigma$ , оканчивающейся в окрестности точек  $O(0,0)$  и  $B(1,0)$  малыми дугами "нормальной кривой"  $\sigma_0$ , а при  $y < 0$  - характеристиками  $OC: x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = 0$ ,  $BC: x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = 1$  уравнения

$$Av = uv_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) = f(x, y). \quad (3)$$

**Задача Т.** Найти в  $\Omega$  решение уравнения (3), удовлетворяющие условию

$$u(x, y; t)|_{\sigma_0} = 0, \quad \sigma_0: (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{4}{9}y^3 = \frac{1}{4}, \quad (4)$$

$$x^{5/6}D_{0+}^{1/6}(u(\chi_0(x))x^{-2/3}) + (1-x)^{5/6}D_{1-}^{1/6}(u(\chi_1(x))(1-x)^{-2/3}) = 0, \quad (5)$$

где

$$u(\chi_0(x)) = u\left(x, -\left[\frac{3x}{2}\right]^{2/3}\right), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

$$u(\chi_1(x)) = u\left(x, -\left[\frac{3(1-x)}{2}\right]^{2/3}\right), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

Здесь граничные условия задаются с помощью дробных производных Римана-Лиувилля [2]

$$D_{0+}^{1/6}g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1/6}} dt,$$

$$D_{1-}^{1/6}g(x) = -\frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{g(t)}{(t-x)^{1/6}} dt.$$

Оператор, соответствующий краевой задаче  $T$  обозначим через  $A$ . Собственные значения оператора  $A$  будем нумеровать парой целочисленных индексов  $\eta_m$ . Собственные функции оператора  $A$  обозначим через  $v_m(x, y)$  соответствующих собственным значением  $\eta_m$ .

В работе [4] доказано следующее утверждение.

**Теорема 4 [4].** Оператор  $A$  является самосопряженным в пространстве  $L_2(\Omega)$ .

Как следствие данной теоремы 4 заключаем, что собственные функций  $\{v_m(x, y), m = 1, 2, \dots\}$  оператора  $A$  образуют полную систему функций в  $L_2(\Omega)$ .

3. Пусть  $\Omega$  - конечная область из предыдущего пункта. В области  $Q = \Omega \times (0, T)$  рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^n u(x, y; t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^n p_j(t) \frac{\partial^{n-j} u(x, y; t)}{\partial t^{n-j}} = y \frac{\partial^2 u(x, y; t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y; t)}{\partial y^2} + f(x, y; t), \quad (x, y) \in \Omega, \quad 0 < t < T \quad (6)$$

с краевыми условиями по  $t$

$$U_v(u(x, y; \cdot)) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, n, \quad (x, y) \in \Omega \quad (7)$$

и с условиями по  $(x, y)$

$$u(x, y; t)|_{\sigma_0} = 0, \quad \sigma_0: (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{4}{9}y^3 = \frac{1}{4}, \quad (8)$$

$$x^{5/6}D_{0+}^{5/6}(u(\chi_0(x); t)x^{-2/3}) + (1-x)^{5/6}D_{1-}^{5/6}(u(\chi_1(x); t)(1-x)^{-2/3}) = 0, \quad (9)$$

где

$$u(\chi_0(x); t) = u\left(x, -\left[\frac{3x}{2}\right]^{2/3}; t\right), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

$$u(\chi_1(x); t) = u\left(x, -\left[\frac{3(1-x)}{2}\right]^{2/3}; t\right), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad 0 < t < T.$$

Операторная запись вышеприведенной задачи (6)-(9) имеет вид

$$Bu = Au(x, y; t) + f(x, y; t), \quad (x, y; t) \in Q. \quad (10)$$

Здесь оператор  $B$  действует по переменной  $t$  и его свойства приведены в пункте 1. Оператор  $A$  действует по переменным  $(x, y)$  и его спектральные свойства приведены в пункте 2.

**Теорема 5.** Пусть выполнено требование I. Тогда однородное операторное уравнение

$$Bu = Au \quad (11)$$

имеет только тривиальное решение  $u \in D(B) \cap D(A)$  тогда и только тогда, когда

$$\sigma(B) \cap \sigma(A) \neq \emptyset, \quad (12)$$

где  $\sigma(B)$  и  $\sigma(A)$  - спектры операторов  $B$  и  $A$  соответственно.

### Список использованной литературы

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. 1969. Наука, Москва. 528 с.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of fractional differential equations. 2006. Elsevier. 541 p.
3. Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Матем. 1964. № 2. С. 82-93.
4. Кальменов Т.Ш. О самосопряженных краевых задачах для уравнения Трикоми // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, №1. С. 66-75.

## КОЭРЦИТИВНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Оспанов М.Н.

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан,

E-mail: [myrzan66@mail.ru](mailto:myrzan66@mail.ru)

Пусть  $\bar{\Omega} = [0, \omega] \times (-\infty, +\infty)$ . Рассмотрим псевдопараболическое уравнение третьего порядка

$$u_{xtt} = a_0(x, t)u_x + a_1(x, t)u_{tt} + a_2(x, t)u + f(x, t) \quad (1)$$

где функции  $a_i(x, t) (i = \overline{0, 2}), f(x, t)$  предполагаются непрерывными и, вообще говоря, неограниченными на  $\bar{\Omega}$ .

Через  $C_*(\bar{\Omega}, R)$  обозначим пространство ограниченных функций, непрерывных по  $t \in R$  при  $x \in [0, \omega]$  и равномерно относительно  $t \in R$  непрерывных по  $x \in [0, \omega]$ .

Пусть  $\|V(x, \cdot)\|_1 = \sup_{t \in R} \|V(x, t)\|$ , где  $\|V(x, t)\| = \max_{i=\overline{1, n}} |V_i(x, t)|$ .

Исследуются свойства решения  $u(x, t)$  уравнения (1), удовлетворяющего условиям  $u(0, t) = \psi(t), u(x, t), u_x(x, t), u_{tt}(x, t), u_{xtt}(x, t) \in C_*(\bar{\Omega}, R)$ , (2)

Положим  $P_{\alpha, \beta}(x, t) = \frac{\alpha(x, t)}{\sqrt{\beta(x, t)}}, \theta(x, t) = \frac{1}{d} \int_t^{t+d} a_1(x, \tau) d\tau$ .

Справедлива

**Теорема 1.** Пусть функции  $a_i(x, t) (i = \overline{0, 2})$  уравнения (1) непрерывны на  $\bar{\Omega}$ ,  $\psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi}$  непрерывны и ограничены на  $R$  и выполнены условия:

- a)  $a_0(x, t) \geq \gamma > 0, \gamma - \text{const}$ ;
- b)  $\frac{a_0(x, t)}{a_0(x, \bar{t})} \leq c$  при  $t, \bar{t} \in R: |t - \bar{t}| < d, c, d - \text{const}$ ;
- c) для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $\delta > 0$ , такое, что для всех  $t$  из  $R$  и  $x', x'' \in [0, \omega]: |x' - x''| < \delta$  выполнено неравенство  $\left| \frac{a_0(x', t) - a_0(x'', t)}{a_0(x'', t)} \right| < \varepsilon$ ;
- d)  $P_{a_1, a_0}(x, t), P_{a_2, a_0}(x, t), P_{f, a_0}(x, t) \in C_*(\bar{\Omega}, R)$ .
- e)  $f(x, t), \sqrt{\theta(x, t)}\psi(t), \sqrt{\theta(x, t)}\dot{\psi}(t) \in C_*(\bar{\Omega}, R^2)$

Тогда существует единственное решение  $u(x, t)$  задачи (1), (2) и причем  $u_{xtt} \in C_*(\bar{\Omega}, R)$  и справедлива оценка

$$\|u_{xtt}\|_1 + \|a_0 u_x\|_1 + \|a_1 u_{tt}\|_1 + \|a_2 u\|_1 \leq C.$$

Здесь  $C$  зависит от норм функций  $f, \psi$ , констант  $\gamma, c, d, \varepsilon$ .

Работа поддержана проектом AP08856281 Комитета науки министерства образования и науки Республики Казахстан.