УДК 517.928

Е.Д.Нургабылов, Д.Н.Нургабыл

Жетысуский государственный университет им. И.Жансугурова, Талдыкорган (E-mail:kebek.kz@mail.ru)

Об одном явлении граничного скачка сингулярно возмущенной краевой задачи

В статье предложен алгоритм построения аналитического представления решения сингулярно возмущенной краевой задачи. Доказана теорема существования и единственности решения краевой задачи. Найдено асимптотическое представление решения краевой задачи. Сформулированы правила выбора условий для вырожденных уравнений. Определены величины граничных скачков и рост производных по малому параметру.

Ключевые слова: возмущенная краевая задача, асимптотическое представление, теорема существования и единственности решения, явления граничного скачка, малый параметр.

Постановка задачи. В [1, 2] было исследовано асимптотическое поведение решения сингулярно возмущенной краевой задачи с начальными скачками в случае, когда уравнение

$$\mu^3 + a(t)\mu^2 = 0$$

имеет корни $\mu_{1,2} = 0,\ \mu_3 = -a(t) < 0.$ Этот случай называется устойчивым. Случай, когда дополнительное характеристическое уравнение наряду с $\mu = 0$ имеет корни $\operatorname{Re}\mu < 0, \operatorname{Re}\mu > 0,$ называется условно устойчивым [3].

В данной статье исследуется новое явление, явление граничных скачков краевой задачи для дифференциальных уравнений условно устойчивого типа с малым параметром при старшей производной. Такое исследование не было проведено.

Итак, рассмотрим краевую задачу

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y''' + b(t)y' + c(t)y = F(t); \tag{1}$$

$$y'(0,\varepsilon) = a_1,\quad y(1,\varepsilon) = a_2,\quad y'(1,\varepsilon) = a_3, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $a_1, a_2, a_3 - const.$

Предположим, что:

$$1)\ b(t), c(t) \in C^3([0,1]),\ F(t) \in C^1([0,1]);\quad -c(t) > 0 \text{ при } t \in [0,1];$$

$$2)\ a_1 - \frac{c(0)}{b(0)}a_2 \exp\left(\int_0^1 \frac{c(x)}{b(x)}dx\right) + \frac{c(0)}{b(0)}\int_0^1 \frac{F(s)}{b(s)}\exp\left(\int_0^s \frac{c(x)}{b(x)}dx\right)ds + \frac{F(0)}{b(0)} \neq 0;$$

$$3)\ a_3 B(1) + a_2 C(1) - F(1) \neq 0.$$

Очевидно, при такой постановке задачи дополнительное характеристическое уравнение $\mu^3 + b(t)\mu = 0$ имеет корни $\mu_1 = 0;\ \mu_2 = -\sqrt{b(t)};\ \mu_3 = \sqrt{b(t)}$.

Наша цель — разработать общий метод исследования асимптотического поведения решения сингулярно возмущенной краевой задачи с граничными скачками.

Фундаментальная система решений. Так же, как и в [1, 2], убеждаемся, что однородное уравнение

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y''' + b(t)y' + c(t)y = 0 \tag{3}$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет фундаментальную систему решений $y_1(t,\varepsilon), y_2(t,\varepsilon), y_3(t,\varepsilon),$ достаточно гладких и удовлетворяющих на $[0,1]$ соотношениям $y_1^{(q)}(t,\varepsilon) = u_1^{(q)}(t) + O(\sqrt{\varepsilon});$

$$y_2^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}^q}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \mu_2(x)dx\right)[u_2(t)\mu_2^q(t) + O(\sqrt{\varepsilon})]; \tag{4}$$

$$y_3^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}^q}\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1 \mu_3(x)dx\right)[u_3(t)\mu_3^q(t) + O(\sqrt{\varepsilon})],\quad q = 0,1,2,$$

где $u_k(t)$ — функции, определяемые из линейных дифференциальных уравнений первого порядка. В частности, $u_1(t)=\exp\left(-\int_0^t \frac{c(x)}{b(x)}dx\right)$. Для определителя Вронского $W(t,\varepsilon)$ фундаментальной системы решений $y_1(t,\varepsilon), y_2(t,\varepsilon), y_3(t,\varepsilon)$ уравнения (3) в силу (4) справедлива

$$W(t,\varepsilon)=\frac{u_1(s)u_2(s)u_3(s)}{\sqrt{\varepsilon}^3}e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\int_0^s \mu_2(x)dx+\int_1^s \mu_3(x)dx\right)}\mu_2(s)\mu_3(s)(\mu_3(s)-\mu_2(s))(1+O(\sqrt{\varepsilon}))\neq 0. \quad (5)$$

Построение вспомогательных функций. Следуя работам [4], введем начальную и граничные функции.

Определение. Функция $K(t,s,\varepsilon)$, определенная при $0\le s,t\le 1$, называется начальной функцией уравнения (3), если она по t удовлетворяет однородному уравнению (3), и при $t=s$ — начальным условиям: $K^{(j)}(s,s,\varepsilon)=0$; $j=\overline{0,n-2}$; $K^{(n-1)}(s,s,\varepsilon)=1$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1). Тогда при достаточно малых ε начальная функция $K(t,s,\varepsilon)$ при $0\le s,\ t\le 1$ существует, единственна и выражается формулой $K(t,s,\varepsilon)=W(t,s,\varepsilon)/W(s,\varepsilon)$, где $W(t,s,\varepsilon)$ — определитель 3-го порядка, получаемый из вронскиана $W(s,\varepsilon)$ заменой 3-й строки на фундаментальную систему решений $y_1(t,\varepsilon), y_2(t,\varepsilon), y_3(t,\varepsilon)$ уравнения (3).

Очевидно, начальная функция $K(t,s,\varepsilon)$ не зависит от выбора фундаментальной системы решений уравнения (3). Разложим функцию $K(t,s,\varepsilon)$ в виде суммы $K(t,s,\varepsilon)=K_0(s,s,\varepsilon)+K_1(s,s,\varepsilon)$:

$$K_0(t,s,\varepsilon)=\frac{P_0(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)};\quad K_1(t,s,\varepsilon)=\frac{P_1(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)}, \quad (6)$$

где $P_0(t,s,\varepsilon)$, $P_1(t,s,\varepsilon)$ — определители, которые получаются из $W(s,\varepsilon)$ заменой 3-й строки строками $y_1(t,\varepsilon)$, $y_2(t,\varepsilon)$, 0; 0, 0, $y_3(t,\varepsilon)$ соответственно.

Заметим, что $K_0(t,s,\varepsilon)$, $K_1(t,s,\varepsilon)$ являются непрерывными функциями t и s вместе с производными до 3-го порядка включительно и как функции переменной t удовлетворяют однородному уравнению (3).

Из (6) с учетом (4) и (5) для $K_0^{(q)}(t,s,\varepsilon)$ и $K_1^{(q)}(t,s,\varepsilon)$ получаем следующие асимптотические формулы при $\varepsilon\to 0$:

$$K_0^{(q)}(t,s,\varepsilon)=\varepsilon\left(\frac{u_1^{(q)}(t)}{u_1(s)b(s)}-\frac{u_2(t)\mu_2^q(t)\exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_s^t \mu_2(x)dx\right)}{\sqrt{\varepsilon}^q u_2(s)\mu_2(s)(\mu_3(s)-\mu_2(s))}+O\left(\sqrt{\varepsilon}+\frac{\sqrt{\varepsilon}e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_s^t \mu_2(x)dx}}{\sqrt{\varepsilon}^q}\right)\right);$$

$$K_1^{(q)}(t,s,\varepsilon)=\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}^q}\frac{u_3(t)\mu_3^q(t)e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^s \mu_3(x)dx}}{u_3(s)\mu_3(s)(\mu_3(s)-\mu_2(s))}+O\left(\sqrt{\varepsilon}+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}^q}e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^s \mu_3(x)dx}\right)\right). \quad (7)$$

Введем в рассмотрение граничные функции [3]:

$$\Phi_i(t,\varepsilon)=\frac{J_i(t,\varepsilon)}{J(\varepsilon)},\ i=1,2,3, \quad (8)$$

где $J(\varepsilon)$ — определитель, элементы которого составлены на основе фундаментальной системы решений уравнения (3), причем

$$J(\varepsilon)=\begin{vmatrix} y_1'(0,\varepsilon) & y_2'(0,\varepsilon) & y_3'(0,\varepsilon)\\ y_1(1,\varepsilon) & y_2(1,\varepsilon) & y_3(1,\varepsilon)\\ y_1'(1,\varepsilon) & y_2'(1,\varepsilon) & y_3'(1,\varepsilon)\end{vmatrix}=-\frac{\mu_2(0)\mu_3(1)}{(\sqrt{\varepsilon})^2}u_3(1)u_2(0)u_1(1)(1+O(\sqrt{\varepsilon}))\neq 0, \quad (9)$$

$J_i(t,\varepsilon)$ — определитель, полученный из $J(\varepsilon)$ заменой i-й строки на строку $y_1(t,\varepsilon),\ y_2(t,\varepsilon),\ y_3(t,\varepsilon)$. Заметим, что граничные функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$ $(i=1,2,3)$ не зависят от выбора фундаментальной системы решений уравнения (3).

Принимая во внимание (9) и раскладывая определители $J_i(t,\varepsilon)$ по элементам i-й строки, из (8) получаем следующие асимптотические формулы при $\varepsilon\to 0$:

$$\Phi_1^{(q)}(t,\varepsilon)=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}^{q}}\frac{u_2(t)\mu_2^q(t)}{u_2(0)\mu_2(0)}e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\mu_2(x)dx}-$$
$$-\frac{\sqrt{\varepsilon}^2}{\sqrt{\varepsilon}^{q}}\frac{u_1'(1)u_2(t)\mu_2^q(t)}{u_1(1)u_2(0)\mu_2(0)\mu_3(1)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(x)dx}+O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}^3}{\sqrt{\varepsilon}^{q}}e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\mu_2(x)dx}\right);$$
$$\Phi_2^{(q)}(t,\varepsilon)=\frac{u_1^{(q)}}{u_1(1)}-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{(\sqrt{\varepsilon})^q}\cdot\frac{u_2(t)\mu_2^q(t)}{u_2(0)\mu_2(0)}\cdot\frac{u_1'(0)}{u_3(1)}\cdot e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\mu_2(x)dx}-\tag{10}$$
$$-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}^{q}}\frac{u_1'(1)u_3(t)\mu_3^q(t)e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1\mu_3(x)dx}}{u_1(1)u_3(1)\mu_3(1)}+O\left(\sqrt{\varepsilon}+\frac{(\sqrt{\varepsilon})^2e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\mu_2(x)dx}}{\sqrt{\varepsilon}^{q}}+\frac{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^2e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1\mu_3(x)dx}}{\sqrt{\varepsilon}^{q}}\right)\Bigg];$$
$$\Phi_3^{(q)}(t,\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\Bigg[\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}^{q}}\frac{u_3(t)\mu_3^q(t)}{u_3(1)\mu_3(1)}\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1\mu_3(x)dx\right)+$$
$$+\frac{u_1^{(q)}(t)}{u_1(1)\mu_3(1)}-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}^{q}}\frac{u_1(0)u_2(t)\mu_2^q(t)}{u_1(1)\mu_3(1)u_2(0)\mu_2(0)}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\mu_2(x)dx\right)+$$
$$+O\left(\sqrt{\varepsilon}+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}^{q}}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx}+\frac{\sqrt{\varepsilon}^2}{\sqrt{\varepsilon}^{q}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(x)dx}\right).$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1)–3). Тогда неоднородная краевая задача (1), (2) имеет единственное решение, которое выражается формулой

$$y(t,\varepsilon)=a_1\Phi_1(t,\varepsilon)+a_2\Phi_2(t,\varepsilon)+a_3\Phi_3(t,\varepsilon)+\Phi_1(t,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1K_1(0,s,\varepsilon)F(s)ds-$$
$$-\Phi_2(t,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1K_0(1,s,\varepsilon)F(s)ds-\Phi_3(t,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1K_0'(1,s,\varepsilon)F(s)ds+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^tK_0(t,s,\varepsilon)F(s)ds+\frac{1}{\varepsilon}\int_1^tK_1(t,s,\varepsilon)F(s)ds.\tag{11}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы непосредственной проверкой достаточно убедиться, что функция, заданная по формуле (11), удовлетворяет всем условиям определения решения краевой задачи (1), (2). Ее единственность следует из (9). Теорема доказана.

Рассмотрим формулу (11). Учитывая (7), (10), получим для (11) на отрезке $0\le t\le 1$ следующее асимптотическое представление:

$$y^{(q)}(t,\varepsilon)=\int_0^t\frac{u_1^{(q)}(t)F(s)ds}{b(s)u_1(s)}+a_2\frac{u_1^{(q)}(t)}{u_1(1)}-\frac{u_1^{(q)}(t)}{u_1(1)}\cdot\int_0^1\frac{u_1(1)F(s)}{u_1(s)b(s)}ds+$$
$$+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{(\sqrt{\varepsilon})^q}F(t)\left(\frac{\mu_2^q(t)}{\mu_2^2(t)}-\frac{\mu_3^q(t)}{\mu_3^2(t)}\right)\cdot\frac{1}{\mu_3(t)-\mu_2(t)}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}^{q}}\frac{u_2(t)\mu_2^q(t)}{u_2(0)\mu_2(0)}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\mu_2dx\right)\times$$
$$\times\left[-\frac{F(0)}{\mu_2(0)\left(\mu_3(0)-\mu_2(0)\right)}+a_1-a_2\frac{u_1'(0)}{u_3(1)}+\frac{F(0)}{\mu_3(0)\left(\mu_3(0)-\mu_2(0)\right)}+\frac{u_1'(0)}{u_3(1)}\int_0^1\frac{u_1(1)F(s)}{u_1(s)b(s)}ds\right]+$$
$$+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}^{q}}\frac{u_3(t)\mu_3^q(t)}{u_3(1)\mu_3(1)}\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1\mu_3(x)dx\right)\times\tag{12}$$

$$\times\left[\frac{F(1)}{\mu_3(1)\left(\mu_3(1)-\mu_2(1)\right)}-a_2\frac{u_1'(1)}{u_1(1)}+a_3-\frac{u_1'(1)}{u_1(1)}\int_0^1\frac{u_1(1)F(s)}{u_1(s)b(s)}ds-\right.$$

$$\left.-\int_0^1\frac{u_1'(1)F(s)}{u_1(s)b(s)}ds-\frac{F(1)}{\mu_2(1)\left(\mu_3(1)-\mu_2(1)\right)}\right]+O\left(\sqrt{\varepsilon}+\frac{\sqrt{\varepsilon}^2}{\sqrt{\varepsilon}^q}\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\mu_2(x)dx}+\frac{\sqrt{\varepsilon}^2}{\sqrt{\varepsilon}^q}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1\mu_3(x)dx}\right).$$

Теперь определим вырожденную задачу. Из (12) приходим к выводу, что начальное условие для решения вырожденного уравнения можно получить из (1), (2) в виде

$$b(t)\overline{y}'(t)+c(t)\overline{y}=F(t),\ \overline{y}(1)=a_2. \tag{13}$$

Решение задачи (13) представимо в виде $\overline{y}(t)=a_2\exp\left(-\int_1^t\frac{c(x)}{b(x)}dx\right)+\int_t^1\frac{F(s)}{b(s)}\exp\left(-\int_s^t\frac{c(x)}{b(x)}dx\right)ds$, или то же самое:

$$\overline{y}(t)=a_2\frac{u_1(t)}{u_1(1)}+\int_1^t\frac{u_1(t)}{u_1(s)}\frac{F(s)}{b(s)}ds. \tag{14}$$

Тогда, в силу условия 2) на основании (13) и (14), получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}y(t,\varepsilon)=\overline{y}(t);\quad 0\le t\le 1;\quad \lim_{\varepsilon\to 0}y'(t,\varepsilon)=\overline{y}'(t);\quad 0<t<1;$$

$$\Delta_0=y'(0,\varepsilon)-\overline{y}'(0)=a_1-\frac{c(0)}{b(0)}a_2e^{\int_0^1\frac{c(x)}{b(x)}dx}+\frac{F(0)}{b(0)}+\frac{c(0)}{b(0)}\int_0^1\frac{F(s)}{b(s)}e^{\int_0^s\frac{c(x)}{b(x)}dx}ds\ne 0,$$

$$\Delta_1=y'(1,\varepsilon)-\overline{y}'(1)=a_3-\frac{F(1)}{b(1)}+\frac{c(1)}{b(1)}a_2\ne 0,\quad y''(1,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right),\ y''(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Отсюда следует, что в точках $t=0,\ t=1$ решение задачи (1), (2) обладает явлением граничных скачков первого порядка, что является одной из особенностей исследуемой задачи.

Таким образом, построено аналитическое представление решения, доказана теорема о существовании и единственности решения, найдены асимптотические оценки решения сингулярно возмущенной краевой задачи (1), (2). Сформулировано правило выбора граничных условий для вырожденного уравнения, установлено наличие неравномерной сходимости, определены величины граничных скачков и рост производных по малому параметру.

Список литературы

1 *Kasymov K.A., Nurgabul D.N.* Asymptotic Estimates of the Solution of a Singularly Perturbed Boundary Value Problem with an Initial Jump for Linear Differential Equations // Differential Equations. — 2004. — Vol. 40. — № 5. — P. 641–651.

2 *Касымов К.А., Нургабыл Д.Н.* Асимптотическое поведение решений линейных сингулярно возмущенных общих неразделенных краевых задач, имеющих начальный скачок // Украинский математический журнал, 2003. — Т. 55. — № 11. — С. 1496–1508.

3 *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. — М.: Изд-во МГУ, 1978. — С. 106.

4 *Нургабыл Д.Н.* Построение решения сингулярно возмущенной краевой задачи, имеющей начальный скачок // Вестн. Кыргыз. гос. Нац. ун-та. — 2001. — Т. 3. — № 6. — С. 173–177.

Е.Д.Нұрғабылов, Д.Н.Нұрғабыл

Ерекше ауытқыған шекаралық есептің шекаралық секіріс құбылысы туралы

Мақалада ерекше ауытқыған шекаралық есеп шешімінің аналитикалық берілімін құрудың алгоритмі ұсынылған. Шекаралық есеп шешімінің барлығы және жалғыздығы туралы теорема дәлелденген. Шекаралық есеп шешімінің асимптотикалық кескіндемесі табылған. Ауытқымаған теңдеулер шарттарын таңдаудың ережесі тұжырымдалған. Шекаралық секіріс шамасы және туындының кішкене парметрі бойынша өсуі анықталған.

E.D.Nurgabylov, D.N.Nurgabyl

About the phenomenon of boundary jump of singular Perturbed Boundary Value Problem

Boundary Value Problem. The theorem of existence and uniqueness of the solution of a Boundary Value Problem. Asymptotic submission of the solution of a Boundary Value Problem is found. It is formulated rules of a choice of conditions for the degenerate equations. Sizes of boundary jumps and growth of derivatives are determined by small parameter.

References

1 Kasymov K.A., Nurgabul D.N. *Differential Equations*. MAIK Nauka / Interperiodica. Russia, 2004. 40, 5, p. 641–651.

2 Kasymov K., Nurgabyl D.N. *Ukrainian Mathematical Journal*, Kiev, 2003, 55, 11, p. 1496–1508.

3 Vasilyeva A.B., Butuzov V.F. *It is singular perturbed equations in critical cases*, Moscow: Moscow State University publ. house, 1978, p. 106.

4 Nurgabyl D.N. *Bull. of Kirghiz State National University*, 2001, 3, 6, p. 173–177.

УДК 004.738.5:37

Н.В.Попова, К.М.Базикова, Ж.Т.Есендаулетова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail:dandn@mail.ru)

Разработка и применение электронного учебника по дисциплине «Исследование операций»

В статье рассмотрено создание и использование на практике электронного учебника. В ней исследуются возможности средств современных информационных технологий, условия, необходимые для их успешного использования, рассмотрено и проанализировано прикладное программное обеспечение, необходимое для создания и дальнейшего использования электронных учебников. Кроме этого, описаны все этапы создания подобных электронных ресурсов на примере конкретного электронного учебника.

Ключевые слова: электронный учебник, языки программирования, мультимедийные средства, гипертекстовый документ, линейное программирование.

Высококвалифицированные и конкурентоспособные специалисты востребованы во всех областях профессиональной деятельности, поэтому проблемам образования уделяется большое внимание. Государственная программа развития образования Республики Казахстан на 2011–2020 годы предусматривает обеспечение доступа каждого из участников образовательного процесса к современным образовательным ресурсам и технологиям [1]. Внедрение электронного обучения на всех уровнях образования стоит на одном уровне с такими задачами, как интеграция национальной системы образования в мировое образовательное пространство и создание условий для автоматизации учебного процесса. Применение электронного обучения ставит своей целью повышение качества обучения, эффективности управления образованием и информационной интеграции с внешней средой. Планируется развитие электронных образовательных ресурсов, создаваемых педагогами и преподавателями организаций среднего, технического и профессионального образования. Электронные образовательные ресурсы разрабатываются для методического обеспечения дисциплин на всех уровнях образова-