

А.М.Омаров

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

**ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ С УЧЕТОМ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ФАКТОРОВ**

*Мақалада жаппай қызмет ету теориясына негізделген жоспарлау есептерін шешу әдістері қарастырылған. Кездейсоқтық фактор ретінде кіріс ағын уақыты, қызмет ету уақыты және қызмет ету аппараттар саны алынған бірнеше есептер келтірілген. Осы кездейсоқтық факторлар нақты жағдайларда тиімді шешімді таңдауға елеулі әсер етеді.*

*In article are considered methods of the decision of the problems of the planning, founded on queueing theory. The broughted row of the problems, where casual factor are time entering flow, time of the service and amount servicing device. These are a casual factors in determined situation greatly influence upon trade-off.*

При работе автомобильного транспорта роль случайных факторов весьма велика. Изменение погодных условий влияет на скорость движения подвижного состава. От случайных факторов зависят возврат автомобилей с линии по технической неисправности, расход запасных частей за определенный период времени. Число водителей, не вышедших на работу по болезни, также является случайным фактором. Таким образом, многие транспортные процессы, техническое обслуживание и ремонт подвижного состава зависят от случайных явлений, которые вызываются различными факторами. Если знать закономерности появления случайных явлений, то станет возможным учитывать их в плановых расчетах и тем самым значительно повышать их точность. В последние годы большое развитие и широкое практическое распространение при решении транспортных задач с учетом случайных факторов получила теория массового обслуживания [1]. Данная теория направлена на решение задач организации и планирования экономических процессов, в которых, с одной стороны, постоянно в случайные промежутки времени возникает потребность выполнения каких-либо работ или услуг, а с другой — происходит постоянное удовлетворение этих требований, т.е. выполнение работ. При этом время, необходимое для выполнения каждого такого требования, может быть случайной величиной.

Основным объектом изучения теории массового обслуживания является ситуация, когда имеется необходимость в обслуживании большого количества однородных требований, которое может быть обеспечено одним и тем же средством. Требование — это запрос на удовлетворение какой-либо потребности со стороны различных объектов, а удовлетворение этой потребности называется обслуживанием. Средства, с помощью которых можно осуществить данное обслуживание, называются обслуживающими аппаратами или устройствами, а совокупность однородных аппаратов, способных выполнить данное требование, называется обслуживающей системой. Далее, те требования, которые поступают в данную систему, относятся к входящему потоку требований, а те, которые покидают систему, а среди них могут быть и необслуженные, образуют выходящий поток. Общая схема систем массового обслуживания образует следующую цепочку: «входящий поток–аппараты–выходящий поток».

С массовым обслуживанием на автомобильном транспорте связаны многие процессы. В качестве примеров можно указать такие, как прием заявок на перевозку грузов, обслуживание населения автомобилями-такси, текущий ремонт автомобилей, организация технической и скорой помощи и многое другое. Во всех этих процессах имеют место случайные факторы. Так, например, возникновение требований на текущий ремонт автомобиля всегда является случайным, так как в один момент времени их может быть больше, а в другой — меньше, хотя в среднем за определенное время их число возможно будет постоянным. Случайным будет и время, затрачиваемое на текущий ремонт каждого автомобиля, поскольку оно зависит от того, какая неисправность явилась причиной появления требования на текущий ремонт, какова квалификация рабочего, выполняющего этот ремонт, и других факторов.

Из данного примера видно, что в большинстве задач массового обслуживания входящий поток требований или заявок на текущий ремонт зависит не от воли человека, а от ряда случайных факторов, что также относится и ко времени обслуживания. Поэтому эти величины обычно описываются с помощью вероятностных характеристик.

От человека зависит организация системы обслуживания, а именно: каким образом распределить поступающие заявки между обслуживающими аппаратами, какое количество этих аппаратов необходимо выделить для данного обслуживания, каким образом их сгруппировать. Все эти факторы в конечном итоге влияют на качество функционирования системы обслуживания.

Например, техническое обслуживание подвижного состава на автопредприятии можно организовать силами комплексных бригад, когда отдельные группы автомобилей проходят в этих бригадах все виды технического обслуживания. Вместе с тем возможна организация технического обслуживания автомобилей специализированными бригадами рабочих, каждая из которых выполняет определенный вид технического обслуживания для всего подвижного состава. От этого будет зависеть, насколько будет загружена работой каждая бригада, какое количество времени автомобили будут находиться в простое и так далее, т.е. качество работы этих бригад.

Целью изучения всех процессов массового обслуживания является обеспечение эффективной работы, которая в каждом случае имеет свой конкретный смысл. Она должна определяться не качественно, а количественно, т.е. определенным числом, что требует математического представления каждого процесса массового обслуживания.

При решении задач с помощью теории массового обслуживания учитываются два случайных фактора — время поступления требований в систему и время обслуживания каждого требования.

Пусть случайный процесс поступления заявок на обслуживание описывается некоторой функцией  $X(t)$ , определяющей число поступающих в систему требований за промежуток времени  $(0, t)$ . Например, после начала работы бригады по текущему ремонту заявка на ремонт автомобиля может поступить не сразу, а через некоторый промежуток времени, причем за каждый промежуток времени  $(0, t)$  может поступить и 0, и  $k$  требований. Количество заявок всегда будет выражаться целым числом. Очевидно и то, что число поступивших требований зависит от величины промежутка времени  $(0, t)$ .

В теории массового обслуживания, как правило, рассматривают простейший поток требований, т.е. обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия. Если имеется простейший поток заявок, то их число за промежуток времени  $(0, t)$  распределяется по известному закону Пуассона

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

где  $P_k(t)$  — вероятность поступления  $k$  требований за время  $(0, t)$ ;  $\lambda$  — параметр потока, т.е. среднее число требований за единицу времени.

Использование только этой зависимости может дать много ценного для организации перевозок. Например, нужно организовать стоянку автомобилей-такси около магазина. Считается, что простой такси на стоянке не должен превышать 10 мин. Наблюдения показали, что в среднем за этот промежуток времени к этой стоянке подходят 3 пассажира. Необходимо определить, какое количество такси должно размещаться на этой стоянке. Для этого нужно по приведенной выше формуле рассчитать, какова вероятность появления  $k$  пассажиров на стоянке такси за 10 мин при параметре простейшего потока  $\lambda = 3$ , а  $t = 1$ , так как в качестве промежутка времени принимается один 10-минутный интервал. В этом случае

$$P_k(1) = \frac{(3 \cdot 1)^k}{k!} e^{-3 \cdot 1} = \frac{3^k}{k!} 0,0498.$$

Числовые значения вероятности  $P_k(1)$  при различных значениях  $k$  составят

$k$ .....	0	1	2	3	4	5
$P_k(1)$ .....	0,0408	0,1494	0,2241	0,2242	0,1680	0,1008

Из этих данных видно, что наибольшая вероятность соответствует появлению двух или трех пассажиров, и так как эта вероятность почти одинакова, то желательно организовать стоянку только на два автомобиля, особенно если число такси не удовлетворяет общую потребность в них.

Наибольшую роль при решении задач массового обслуживания играет время обслуживания, которое также является случайной величиной. Без специального обследования нельзя заранее сказать, какому закону распределения будет подчиняться время обслуживания. Во многих практических случаях оно подчиняется показательному закону распределения, при котором

$$f(t) = 1 - e^{-at},$$

где  $\alpha$  — величина, обратная времени обслуживания, т.е.  $1/\alpha$  является средним временем обслуживания. Например, если среднее время обслуживания равно 2 ч, то  $\alpha = 1/2 = 0,5$ .

Функция  $f(t)$  показывает, какова вероятность того, что время обслуживания не превысит некоторую величину  $t$ .

Теория массового обслуживания в ее математической части занята выводом расчетных формул для тех или иных характеристик функционирования систем массового обслуживания. Этими формулами, как готовыми выводами, можно воспользоваться для решения определенных задач организации и планирования работы автопредприятия. Рассмотрим следующий пример.

На автомагистрали проектируется станция технического обслуживания автомобилей индивидуальных владельцев. Требуется определить, какое количество моечных постов необходимо иметь на этой станции, если известно, что станция будет работать 16 ч в сутки. В среднем за каждый час по магистрали проходит 12 автомобилей, нуждающихся в мойке. Среднее время мойки одного автомобиля равно 10 мин. Оплата за мойку автомобиля — 1000 тг, а содержание одного поста в сутки составляет 33 тысячи тг.

Обычно при решении такой задачи рассуждают следующим образом. Мойка автомобиля длится 10 мин, значит, за один час на одном посту будет обслужено 6 автомобилей. Поскольку требуется в час обслужить 12 автомобилей, то необходимо иметь на станции два поста мойки. Однако при таком рассуждении совершенно не учитывается случайный характер данного процесса обслуживания, так как автомобили могут следовать по магистрали не строго через каждые 5 минут, и время их мойки в зависимости от загрязнения может колебаться около 10 мин. Если в момент прибытия автомобиля на станцию все моечные посты будут заняты, то его владелец не будет ждать своей очереди и станция потеряет клиента, что впоследствии скажется на бизнесе владельца данной станции. Однако при проектировании станции можно предусмотреть любое количество моечных постов, и тогда есть большая вероятность того, что каждый автомобиль будет вовремя обслужен.

Таким образом, данный пример относится к типу систем массового обслуживания с неограниченным числом аппаратов обслуживания и возможными потерями заявок на обслуживание.

Критерием качества функционирования такого типа систем обслуживания иногда принимается вероятность занятости всех аппаратов обслуживания или отказа в обслуживании в момент поступления очередного требования на обслуживание, которая рассчитывается по формуле

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^n \frac{1}{n!}}{\sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^m},$$

где  $P_n$  — вероятность занятости всех аппаратов или отказа в обслуживании;  $n$  — число обслуживающих аппаратов;  $m$  — количество заявок на обслуживание.

Так как здесь одновременно могут обслуживаться  $n$  требований и 10 мин составляют  $1/6$  часа, то  $n = m$ ,  $\lambda = 12$  и  $\alpha = 1/(1/6) = 6$ .

Вычислим  $P_n$  при наличии на станции двух моечных постов

$$P_2 = \frac{\left(\frac{12}{6}\right)^2 \frac{1}{2!}}{\sum_{m=0}^2 \frac{1}{m!} \left(\frac{12}{6}\right)^m} = \frac{2^2}{2! \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!}\right)} = \frac{4}{10} = 0,4.$$

Таким образом, при наличии двух моечных постов вероятность отказа составляет 0,4, т.е. из 100 проходящих по магистрали автомобилей 40 найдут посты занятыми и уедут, а 60 машин будут обслужены. В силу того, что за один час по магистрали в среднем проходит 12 автомобилей, а станция будет работать 16 часов в день, то общее число обслуженных автомобилей за сутки составит  $115(12 \times 16 \times 0,6)$  из общего числа проходящих автомобилей за это время, которое равно  $192(12 \times 16)$ . Таким образом, 77 ( $192 - 115$ ) автомобилей не будет обслужено.

Если рассчитывать количество обслуживаемых автомобилей за сутки по той же формуле для различного числа моечных постов и определить сумму доходов из расчета оплаты за мойку одного автомобиля в размере 1000 тенге и сумму расходов из расчета 33 тысячи тенге на каждый пост в сутки, то получим данные, которые приведены в следующей таблице.

Т а б л и ц а 1

## Зависимость доходов и расходов от количества моечных постов

Число моечных постов, $n$	Вероятность занятости всех постов, $P_n$	Доход, тыс. тг	Расход, тыс. тг	Прибыль (+), убыток (-), тыс. тг
2	0,4	115	66	+49
3	0,21	151	99	+52
4	0,096	173	132	+41
5	0,037	186	165	+21
6	0,001	192	198	-6

Из таблицы видно, что с экономической точки зрения оптимально иметь три, а не два моечных поста.

Данную систему массового обслуживания можно проверить, взяв за основу другой критерий — среднее число занятых обслуживанием аппаратов, что в рассматриваемом примере соответствует средней занятости моечных постов. Расчет производится по формуле

$$M = \frac{\lambda}{\alpha} (1 - P_n),$$

где  $M$  — математическое ожидание одновременно занятых аппаратов;  $P_n$  — вероятность того, что все обслуживающие аппараты свободны;  $n$  — число обслуживающих аппаратов.

Соответствующие расчеты по этой формуле для рассматриваемого примера приведены в следующей таблице.

Т а б л и ц а 2

## Средняя загруженность одного моечного поста

Число моечных постов, $n$	Математическое ожидание числа одновременно занятых постов, $M$	Средняя загруженность одного поста, $M/n$	Число моечных постов, $n$	Математическое ожидание числа одновременно занятых постов, $M$	Средняя загруженность одного поста, $M/n$
2	1,20	0,60	4	1,81	0,45
3	1,59	0,53	5	1,93	0,39

В данном примере рассмотрен один тип систем массового обслуживания, а именно: с неограниченным числом аппаратов обслуживания и потерями заявок на обслуживание.

В теории массового обслуживания рассматриваются и другие типы систем обслуживания заявок. Так, если заранее известно максимальное число одновременно возможных заявок на обслуживание, то такая система является системой массового обслуживания с ограниченным входящим потоком требований. Например, число автомобилей, выходящих из строя, ни в коем случае не может превзойти общего их количества на данном автопредприятии.

В ряде случаев могут быть системы массового обслуживания с ограниченным числом аппаратов обслуживания. Например, на автозаправочной станции число бензоколонок является определенным, а при организации заправки автомобилей бензином это является решающим фактором.

Иногда в системе массового обслуживания необходимо учитывать приоритетность обслуживания определенных требований. Тогда такая система относится к типу систем с приоритетами. Например, таким приоритетом могут пользоваться автобусы с пассажирами при их обслуживании на автозаправочной станции, т.е. их заправка топливом должна производиться вне очереди.

Для всех указанных ранее и других типов систем массового обслуживания разработаны соответствующие методы определения различных показателей, характеризующих процесс обслуживания, что дает возможность находить наиболее эффективную организацию этих процессов [2]. При этом выбор показателей указанной эффективности имеет важнейшее значение в каждом конкретном случае, в зависимости от типа системы обслуживания и целей, которые преследуются решением.

Наиболее часто в качестве критериев — показателей эффективности работы систем массового обслуживания используются следующие: среднее время ожидания требованием начала обслуживания или время нахождения его в системе обслуживания; средний размер очереди на обслуживание; вероятность того, что в системе обслуживания будет находиться определенное количество заявок; сред-

нее число аппаратов, занятых или свободных от обслуживания и т.д. Однако наиболее целесообразно использовать экономические показатели, которые дают обобщенную характеристику производственных процессов.

Иногда при планировании и организации производственных процессов необходимо учитывать значительно больше случайных факторов. В этом случае хорошие результаты могут быть получены с помощью методов факторного анализа.

#### Список литературы

1. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. — М.: Наука, 1969. — 256 с.
2. Кожин А.П. Математические методы в планировании и управлении грузовыми перевозками. — М.: Высш. шк., 1991. — 296 с.

ЭОЖ 510.67

А.Е.Сланбекова<sup>1</sup>, Ш.К.Каменова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Е.А.Бекетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті;

<sup>2</sup>№ 4 орта мектебі, Қарағанды

#### АЛГЕБРАЛЫҚ СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ТЕНДЕУЛЕРДІ ШЕШУДЕ ҚОЛДАНЫЛАТЫН ПРОГРАММАЛАУ ТІЛДЕРІН ТАЛДАУ

*Рассмотрены численные методы решения нелинейных уравнений, приведены программы вычисления корней нелинейных уравнений на языке Turbo Pascal и Фортран, дан сравнительный анализ изученных методов и программ.*

*Present work explains numerical methods of solving nonlinear equations. Contains Turbo Pascal and Fortran programs for calculation solutions of nonlinear equations and benchmark analysis of these methods and programs.*

Осы жұмыстың мақсаты — алгебралық және трансценденттік теңдеулерді жуықтап шешу әдістерін табу. Бұл әдістермен шешудің Turbo Pascal және Фортран тілдерінде бағдарламасын жасап, есептеулерді құрып, оларды салыстырып талдау.

Жұмыстың негізгі түсініктерін қарастырайық.

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

теңдеуі берілген болсын, мұндағы  $f(x)$  функциясы кейбір  $a < x < b$  аралығында анықталған және үздіксіз.  $x = \xi$  әрбір мағынасында (1) теңдеудің түбірі немесе  $f(x)$  функциясының нөлі деп аталады.

Егер  $f(x)$  функциясы көпмүшелік болса, онда (1) теңдеуді алгебралық деп атайды, ал  $f(x)$  функциясын тригонометриялық, логарифмдік т.б. функциялар енетін болса, онда (1) теңдеуді трансценденттік деп атайды [1].

Функцияны нольге айналдыратын кез келген  $x$  мәнін (1) теңдеудің түбірі деп атайды [1]. (1) теңдеудің дәл түбірін дербес жағдайда ғана табуға болады. Сондықтан (1) түрдегі теңдеуді сандық шешу тәсілдерімен жасауға болады. Ол тәсіл көмегімен (1) теңдеудің шешімін жуықтап табу мүмкіндігі туады.

Бұл жағдайда екі есепті шешуге тура келеді [2]:

- 1) түбірді оқшаулау, яғни теңдеудің бір ғана түбірін қамтитын жеткілікті түрде кішкене интервалды анықтау;
- 2) түбірді берілген дәлдікпен анықтау.

(1) теңдеудің нақты түбірі жататын облысты анықтауда егер белгілі бір кесіндінің екі шеткі нүктелерінде әртанбалы мәндер қабылдайтын болса, онда бұл кесіндіде  $f(x) = 0$  функциясының ең болмағанда бір түбірі болатын қасиетіне сүйенеміз.