

**О гладкости решения некоторых краевых задач
с граничными операторами дробного порядка в классах Никольского**

**Smoothness of solutions of certain boundary value problems
with fractional order boundary operators in classes Nikolsky**

Торекбек Б.Т.

Международный Казахско-Турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан (e-mail: berik_mktu@mail.ru)

Мақалада гармониялық функциялар класында кейбір бөлшек ретті интегралды-дифференциалдық операторлар қарастырылды. Осы операторлардың қолданылуы ретінде Лаплас теңдеуі үшін шекаралық шартында бөлшек ретті интегралды-дифференциалдық операторлары қатысқан шеттік есептер зерттелген. Есептер шешімдерінің Никольский класында тегістігі туралы теоремалар дәлелденген. Қарастырылған есептер Лаплас теңдеуі үшін белгілі болған Дирихле және Нейман есептерін жалпылайды.

In this paper, some integro-differential operators of fractional order in the class of harmonic functions. As an application of these operators are studied, two boundary value problems for Laplace equation with the operator of fractional integro-differentiation in the boundary condition. We prove theorems on the smoothness of the solution of these problems in classes of Nikol'skii. Considered problem generalizes the well-known Dirichlet and Neumann problems for Laplace equation.

Пусть $\Omega = \{x \in R^2 : |x| < 1\}$ — единичный круг, $\partial\Omega = \{x \in R^2 : |x| = 1\}$ — окружность. Пусть далее $u(x)$ — гармоническая функция в круге Ω , $r = |x|$, $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$, $0 < \alpha < 1$. Рассмотрим операторы

$$D^\alpha[u](r, \varphi) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} u(\tau, \varphi) d\tau,$$

$$D_*^\alpha[u](r, \varphi) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} u'(\tau, \varphi) d\tau,$$

где D^α называется оператором дифференцирования α -го порядка в смысле Римана–Лиувилля, а D_*^α — оператором дифференцирования α -го порядка в смысле Капуто (см. [1]). Пусть $0 < \alpha_j < 1$, $j = 1, 2, \dots, m$. Введем обозначения:

$$B[u](x) \equiv B^{\alpha_1}[u](x) = r^{\alpha_1} D^{\alpha_1}[u](x), \quad B_*[u](x) \equiv B_*^{\alpha_1}[u](x) = r^{\alpha_1} D_*^{\alpha_1}[u](x),$$

$$B^m[u](x) \equiv B^{\alpha_1, \dots, \alpha_m}[u](x) = B^{\alpha_m}[\dots B^{\alpha_1}[u](x)], \quad B_*^m[u](x) \equiv B_*^{\alpha_1, \dots, \alpha_m}[u](x) = B_*^{\alpha_m}[\dots B_*^{\alpha_1}[u](x)].$$

Операторы B^m , B_*^m и некоторые их свойства изучались в работах [2–3].

Постановка и решение основных задач. Рассмотрим в области Ω следующую краевую задачу:

$$\Delta u(r, \varphi) = 0, \quad (r, \varphi) \in \Omega, \quad (1)$$

$$B[u](r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (2)$$

где B — один из операторов B^m или B_*^m .

Для изучения задачи (1), (2) введем пространство решений. Для любого $\eta > 0$ обозначим $\Omega_\eta = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \eta\}$. Пусть $l = 0, 1, \dots$, $0 < \lambda < 1$. Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу $H_{p, x_1}^{l+\lambda}(\Omega)$ по переменной x_1 , если $f(x)$ и несмешанные производные $\frac{\partial^k f}{\partial x_1^k}$ порядков $k = 1, 2, \dots, l$ принадлежат классу $L_p(\Omega)$ и имеет место оценка

$$\|f_{x_1}^{(l)}(x_1 + h, x_2) - f_{x_1}^{(l)}(x_1, x_2)\|_{L_p(\Omega)} = \left(\iint_{\partial\Omega} |f_{x_1}^{(l)}(x_1 + h, x_2) - f_{x_1}^{(l)}(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}} \leq C|h|^\lambda, \quad |h| < \eta. \quad (3)$$

Аналогично определяется класс $H_{p,x_2}^{l+\lambda}(\Omega)$ по переменной x_2 . Далее, если функция $f(x)$ принадлежит классам $H_{p,x_1}^{l+\lambda}(\Omega)$ и $H_{p,x_2}^{l+\lambda}(\Omega)$ одновременно, то будем говорить, что она принадлежит классу $H_p^{l+\lambda}(\Omega)$. Класс $H_p^{l+\lambda}(\Pi)$ периодических функций определяется аналогично. В этом случае $\Omega = \Omega_\Pi = \Pi$, где $\Pi = \{0 \leq x_1, x_2 \leq T\}$ и T — период по x_1 и x_2 .

В зависимости от свойств решений мы будем изучать задачу (1), (2) в следующих постановках.

Задача 1. Найти гармоническую в области Ω функцию $u(r, \varphi)$ из класса $C^2(\Omega) \cap H_p^\lambda(\Omega)$ такую, что $B^m[u](r, \varphi) \in H_p^\lambda(\Omega)$ и удовлетворяющую условию (2) в смысле сходимости L_2 .

Задача 2. Найти гармоническую в области Ω функцию $u(r, \varphi)$ из класса $C^2(\Omega) \cap H_p^\lambda(\Omega)$ такую, что $B_*^m[u](r, \varphi) \in H_p^\lambda(\Omega)$ и удовлетворяющую условию (2) в смысле сходимости L_2 .

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $0 < \lambda < 1$, $0 < \alpha_j < 1$, $\gamma = \sum_{j=1}^m \alpha_j$, $1 \leq p \leq \infty$, $\lambda + \gamma + \frac{1}{p}$ нецелое. Тогда, если $f(\varphi) \in H_p^\lambda(0, \pi)$, то решение задачи 1 существует единственно и принадлежит классу $H_p^{\lambda+\gamma+\frac{1}{p}}(\Omega)$.

Теорема 2. Пусть $0 < \lambda < 1$, $0 < \alpha_j < 1$, $\gamma = \sum_{j=1}^m \alpha_j$, $1 \leq p \leq \infty$, $\lambda + \gamma + \frac{1}{p}$ нецелое и $f(\varphi) \in H_p^\lambda(0, \pi)$. Тогда для разрешимости задачи 2 необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = 0. \quad (4)$$

Если решение задачи существует, то оно единственно, с точностью до постоянного слагаемого, и принадлежит классу $H_p^{\lambda+\gamma+\frac{1}{p}}(\Omega)$.

Отметим, что аналогичные результаты с операторами дробного порядка при $m=1$ получены в работах [4–5].

Заметим также, что аналогичные задачи с оператором дробного дифференцирования в смысле Адамара-Маршо изучались в работах [6–7].

Некоторые свойства периодических функций. Для наших дальнейших исследований необходимо изучить некоторые свойства периодических функций в R .

Пусть $f(t)$ — 2π периодическая функция и

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) + \frac{\alpha_0}{2} \quad (5)$$

ее ряд Фурье. Определим функцию

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k,m}^{-1} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) + \gamma_{0,m}^{-1} \frac{\alpha_0}{2}, \quad (6)$$

где коэффициенты $\gamma_{k,m}$ определяются равенством

$$\gamma_{k,m} = \frac{\Gamma^m(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha_1)\Gamma(k+1-\alpha_2)\dots\Gamma(k+1-\alpha_m)}. \quad (7)$$

Докажем некоторые неравенства, справедливые для последовательности чисел $\mu_k = \gamma_{k,m}^{-1}$.

Обозначим $\Delta\mu_k = \mu_k - \mu_{k+1}$, $\Delta^2\mu_k = \Delta\mu_k - \Delta\mu_{k+1} = \mu_k - 2\mu_{k+1} + \mu_{k+2}$.

Лемма 1. Пусть $0 < \alpha_j < 1$, $j=1, 2, \dots, m$, и последовательность чисел $\mu_k = \gamma_{k,m}^{-1}$ определяется по формуле (7).

Тогда для любых $k=1, 2, \dots$ справедливы неравенства

$$\mu_k \leq Ck^{-\gamma}, \quad (8)$$

$$k\Delta\mu_k \leq Ck^{-\gamma}, \quad (9)$$

$$(k+1)\Delta^2\mu_k \leq Ck^{-\gamma}, \tag{10}$$

где C — постоянная, значение которой нас в дальнейшем не интересует.

Доказательство. Оценим μ_k . Если $0 < \alpha_j < 1$, то известно следующее неравенство (см. [8]):

$$\frac{(1-\alpha_j)(2-\alpha_j)\dots(k-\alpha_j)}{k!} \leq Ck^{-\alpha_j}. \tag{11}$$

Используя равенство (7) для μ_k , имеем: $\mu_k = \frac{\Gamma(k+1-\alpha_1)}{\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(k+1-\alpha_2)}{\Gamma(k+1)} \dots \frac{\Gamma(k+1-\alpha_m)}{\Gamma(k+1)}$. Далее, в силу свойства гамма-функции $\Gamma(k+1-\alpha_j) = (k-\alpha_j)(k-1-\alpha_j)\dots(1-\alpha_j)\Gamma(1-\alpha_j)$, $j=1,2,\dots,m$ и используя равенство (11), получаем $\mu_k \leq Ck^{-\alpha_1}k^{-\alpha_2}\dots k^{-\alpha_m} = ck^{-\gamma}$. Оценим $\Delta\mu_k$:

$$\begin{aligned} k\Delta\mu_k &= k(\mu_k - \mu_{k+1}) = k \left[\mu_k - \mu_k \frac{(k+1-\alpha_1)\dots(k+1-\alpha_m)}{(k+1)^m} \right] = \\ &= k\mu_k \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha_1}{k+1}\right) \left(1 - \frac{\alpha_2}{k+1}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha_m}{k+1}\right) \right]. \end{aligned}$$

Пусть $\alpha_* = \max \alpha_j$. Тогда $1 - \frac{\alpha_j}{k+1} \geq 1 - \frac{\alpha_*}{k+1}$, $j=1,2,\dots,m$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 1 - \left(1 - \frac{\alpha_1}{k+1}\right) \left(1 - \frac{\alpha_2}{k+1}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha_j}{k+1}\right) &\leq 1 - \left(1 - \frac{\alpha_*}{k+1}\right)^m = \\ &= \frac{\alpha_*}{k+1} - \frac{\alpha_*^2}{(k+1)^2} + \dots + (-1)^m \frac{\alpha_*^m}{(k+1)^m} \leq \frac{C}{k+1}. \end{aligned}$$

$$k\mu_k \leq Ck^{-\gamma} \frac{k}{k+1} \leq Ck^{-\gamma}.$$

Остается доказать неравенство (10). По определению

$$\begin{aligned} (k+1)\Delta^2\mu_k &= (k+1) \left[\mu_k - 2\mu_k \frac{(k+1-\alpha_1)\dots(k+1-\alpha_m)}{(k+1)^m} + \right. \\ &\quad \left. + \mu_k \frac{(k+1-\alpha_1)\dots(k+1-\alpha_m)}{(k+1)^m} \frac{(k+2-\alpha_1)\dots(k+2-\alpha_m)}{(k+2)^m} \right] = \\ &= (k+1)\mu_k \left[1 - 2 \frac{(k+1-\alpha_1)\dots(k+1-\alpha_m)}{(k+1)^m} + \frac{(k+1-\alpha_1)\dots(k+1-\alpha_m)}{(k+1)^m} \frac{(k+2-\alpha_1)\dots(k+2-\alpha_m)}{(k+2)^m} \right] = \\ &= (k+1)\mu_k \left[1 - 2 \left(1 - \frac{\alpha_1}{k+1}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha_m}{k+1}\right) + \left(1 - \frac{\alpha_1}{k+1}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha_m}{k+1}\right) \left(1 - \frac{\alpha_1}{k+2}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha_m}{k+2}\right) \right] = \\ &= (k+1)\mu_k \left\{ 1 - 2 \left[1 - \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_m}{k+1} + \dots + \frac{\alpha_1 \dots \alpha_m}{(k+1)^m} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[1 - \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_m}{k+1} + \dots + \frac{\alpha_1 \dots \alpha_m}{(k+1)^m} \right] \left[1 - \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_m}{k+2} + \dots + \frac{\alpha_1 \dots \alpha_m}{(k+2)^m} \right] \right\} = \\ &= (k+1)\mu_k \left\{ \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_m}{k+1} - \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_m}{k+2} + 2 \frac{\alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_{m-1}\alpha_m}{(k+1)^2} + \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_m}{(k+1)(k+2)} + \dots \right\} \leq Ck^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть $f(t)$ — 2π периодическая функция и $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) + \frac{\alpha_0}{2}$ — ее ряд Фурье.

Определим функцию $g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k,m}^{-1} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) + \gamma_{0,m} \frac{\alpha_0}{2}$, где последовательность чисел $\gamma_{k,m}$

определяется по формуле (7). Обозначим через $\sigma_k(t)$ и $\sigma_k^*(t)$ суммы Фейера для функции $f(t)$ и $g(t)$ соответственно.

Известно следующее утверждение (см. [9]).

Лемма 2. Пусть $0 < \lambda < 1$, $1 \leq p \leq \infty$. Для того чтобы функция $f(t)$ принадлежала классу $H_p^\lambda(0, \pi)$, необходимо, чтобы

$$\|f(t) - \sigma_k(t)\|_p \leq Ck^{-\lambda}, \quad (12)$$

и достаточно, чтобы

$$\|\sigma_{2^k}(t) - \sigma_{2^{k-1}}(t)\|_p \leq C2^{-k\lambda}, \quad k=1, 2, \dots \quad (13)$$

Следующие утверждения относятся к гладкости функции $g(t)$.

Лемма 3. Пусть $0 < \lambda < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \alpha_j < 1$, $j=1, 2, \dots, m$, $\gamma = \sum_{j=1}^m \alpha_j$, $\lambda + \gamma$ — нецелое. Тогда, если $f(t) \in H_p^\lambda(0, 2\pi)$, то выполняется неравенство

$$\|\sigma_{2^k}^*(t) - \sigma_{2^{k-1}}^*(t)\|_p \leq C2^{-k(\lambda+\gamma)}, \quad k=1, 2, \dots \quad (14)$$

Доказательство. Пусть $l > m$ и $m \rightarrow \infty$.

Оценим $\|\sigma_l^*(t) - \sigma_m^*(t)\|_p$. Для удобства в дальнейшем индекс p в норме будем опускать. С помощью преобразования Абеля (см. [9]) имеем:

$$\begin{aligned} \|\sigma_l^*(t) - \sigma_m^*(t)\| &\leq \sum_{p=n+1}^l \left[\frac{1}{m+1} - \frac{1}{l+1} \right] p(p+1) \|\sigma_p - f\| \Delta^2 \mu_p + \\ &+ \frac{2}{m+1} \sum_{p=n+1}^l (p+1) \|\sigma_p - f\| \Delta^2 \mu_p + \frac{2}{l+1} \sum_{p=n+1}^{l-1} (p+1) \|\sigma_p - f\| \Delta^2 \mu_{p+1} + \\ &+ \frac{2}{m+1} \sum_{p=n+1}^l (p+1) \|\sigma_p - f\| \Delta \mu_{p+1} + \|\sigma_l - f\| \mu_l + \|\sigma_m - f\| \mu_m + \\ &+ \|\sigma_l - f\| \Delta \mu_l + \|\sigma_m - f\| \Delta^2 \mu_m. \end{aligned} \quad (15)$$

Члены правой части равенства (15) в направлении слева направо обозначим через K_i ($i=1, 2, \dots, 8$). Так как для μ_k справедливы оценки (8)–(10), то при $i=5, \dots, 8$ члены K_i будут порядка $C(m^{-\gamma-\lambda})$. Действительно, покажем это, например, для K_8 . В силу неравенства (10) $\|\sigma_m - f\| \leq C \cdot m^{-\lambda}$. Далее, в силу неравенства (8), $\Delta^2 \mu_m \leq \Delta \mu_m \leq \mu_m \leq C \cdot m^{-\gamma}$. Следовательно, $K_8 \leq C \cdot m^{-\gamma-\lambda}$. Оценим K_4 . Из неравенства (7) следует:

$$\begin{aligned} K_4 &\leq \frac{C}{m+1} \sum_{p=n+1}^{m-1} (p+1)^{-\gamma-\lambda} \leq C \cdot m^{-\gamma-\lambda}, \\ \sum_{p=n+1}^{m-1} (p+1)^{-\gamma-\lambda} &= \frac{1}{(n+1)^{\gamma+\lambda}} + \frac{1}{(n+2)^{\gamma+\lambda}} + \dots + \frac{1}{m^{\gamma+\lambda}} = \\ &= \frac{1}{m^{\gamma+\lambda}} \left[1 + \frac{m^{\gamma+\lambda}}{(m-1)^{\gamma+\lambda}} + \dots + \frac{m^{\gamma+\lambda}}{(n+2)^{\gamma+\lambda}} + \frac{m^{\gamma+\lambda}}{(n+1)^{\gamma+\lambda}} \right] = \\ &= \frac{1}{m^{\gamma+\lambda}} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{m-1}\right)^{\gamma+\lambda} + \left(1 - \frac{2}{m-2}\right)^{\gamma+\lambda} + \dots + \left(1 - \frac{k}{m-k}\right)^{\gamma+\lambda} \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{m^{\gamma+\lambda}} \sum_{p=0}^{m-1} 1 = \frac{m-1}{m^{\gamma+\lambda}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow K_4 \leq C \cdot m^{-\gamma-\lambda}. \end{aligned}$$

Аналогично для K_3 имеем $K_3 \leq Cm^{-\gamma-\lambda}$. Далее для K_2 , в силу неравенства (12), получим $K_2 \leq C \sum_{p=m+1}^l (p+1)p^{-\lambda} \Delta^2 \mu_p$. Но в силу неравенства $(p+1)\Delta^2 \mu_p \leq Cp^{-\gamma}$ для K_2 получаем $K_2 \leq Cm^{-\gamma-\lambda}$.

И, наконец, оценим K_1 для случая $m = 2^{k-1}$ и $l = 2^k$, где $k = 1, 2, \dots$. В этом случае $\frac{1}{m+1} - \frac{1}{l+1} \leq \frac{1}{2^k}$, и

поэтому $K_1 \leq \frac{C}{2^k} \sum_{p=m+1}^{2^k} p(p+1) \|\sigma_p - f\| \Delta^2 \mu_p \leq \frac{C}{2^k} \sum_{p=m+1}^{2^k} (p+1)^{-\lambda-\gamma} \leq C2^{-k(\lambda+\gamma)}$. Таким образом, $\|\sigma_{2^k}^*(t) - \sigma_{2^{k-1}}^*(t)\| \leq C2^{-k(\lambda+\gamma)}$, $k = 1, 2, \dots$. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $0 < \lambda < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = 1, 2, \dots, m$, $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ и $\lambda + \gamma$ нецелое.

Тогда, если $f \in H_p^\lambda(0, 2\pi)$, то $g \in H_p^{\lambda+\gamma}(0, 2\pi)$.

Доказательство. Положим $Q_0(t) = \sigma_1^*(t)$, $Q_k(t) = \sigma_{2^k}^*(t) - \sigma_{2^{k-1}}^*(t)$. В силу леммы 2 справедливо неравенство (13). Тогда для $Q_k(t)$ получаем $\|Q_k(t)\| \leq C2^{-k(\lambda+\gamma)}$, $k = 1, 2, \dots$, и поэтому функцию $g(t)$ можно представить в виде $g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t)$. Далее, если $n = [\gamma]$, то для функции $g^{(n)}(t)$ имеем:

$$g^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^{(n)}(t). \tag{16}$$

Используя для функции $Q_k^{(n)}(t)$ неравенство Бернштейна (см.[10]) $\|Q_k^{(n)}(t)\| \leq C2^{-k(\lambda+\{\gamma\})}$, $k = 1, 2, \dots$, $\{\gamma\}$ — дробная часть γ , получаем, что ряд (16) сходится в метрике пространства L_p . Таким образом, дифференцирование закончено. Остается определить, какому классу принадлежит функция $g^{(n)}(t)$. Обозначим $\sigma_k^{(n)}(t)$ — сумму Фейера для функции $g^{(n)}(t)$. Как и в предыдущей лемме, можно показать, что для функции $\sigma_k^{(n)}(t)$ справедливы неравенства

$$\|\sigma_{2^k}^{(n)}(t) - \sigma_{2^{k-1}}^{(n)}(t)\| \leq C2^{-k(\lambda+\{\gamma\})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда по утверждению леммы 2 функция $g^{(n)}(t)$ принадлежит классу $H_p^{\lambda+\{\gamma\}}$, а это, по определению, означает, что $g(t) \in H_p^{\lambda+\gamma}(0, 2\pi)$. Лемма доказана.

Пусть $v(r, \varphi)$ — решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta v(r, \varphi) = 0, & (r, \varphi) \in \Omega, \\ v(r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi), & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \tag{17}$$

Приведем известное утверждение [11], определяющее гладкость решения задачи (17).

Лемма 5. Пусть $\delta > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $\delta + \frac{1}{p}$ нецелое. Тогда если $f(\varphi) \in H_p^\delta(0, 2\pi)$, то

$$v(r, \varphi) \in H_p^{\delta+\frac{1}{p}}(\Omega).$$

Доказательства основных утверждений

Доказательство теоремы 1.

Пусть $u(r, \varphi)$ — решение задачи 1. Представим ее в виде

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \tag{18}$$

К функции (18) формально применим оператор B^m . Так как

$$B^m[r^k] = \frac{\Gamma^m(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha_1) \dots \Gamma(k+1-\alpha_m)} r^k = \gamma_{k,m} r^k,$$

то

$$B^m[u](r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k,m} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \tag{19}$$

Пусть $f(\varphi)$ — достаточно гладкая функция, которая разлагается в ряд Фурье:

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi), \quad (20)$$

где

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos k\theta d\theta, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin k\theta d\theta. \quad (21)$$

Используя граничное условие, получаем: $B^m[u](r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi)$. В силу этого равенства, сравнивая ряды (19) и (20) для всех $k = 0, 1, \dots$, получаем:

$$a_k = \gamma_{k,m}^{-1} \alpha_k, \quad b_k = \gamma_{k,m}^{-1} \beta_k. \quad (22)$$

Подставляя полученные коэффициенты в ряд (19), для решения задачи 1 получим следующее выражение:

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \gamma_{k,m}^{-1} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi). \quad (23)$$

Из представления (23) следует, что функция $u(r, \varphi)$ является решением задачи Дирихле (17) с граничным значением $g(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k,m}^{-1} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi)$. Если $f(\varphi) \in H_p^\lambda(0, 2\pi)$, то по лемме 4

$g(\varphi) \in H_p^{\lambda+\gamma}$. Тогда, в силу утверждения леммы 5, $u(r, \varphi)$ принадлежит классу $H_p^{\lambda+\gamma+\frac{1}{p}}(\Omega)$.

Единственность решения задачи следует из единственности решения задачи Дирихле. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2

Решение задачи 2 будем искать в виде ряда (18). Так как $B_*^m[1] = 0$ и $B_*^m[r^k] = \gamma_{k,m} r^k$, $k = 1, 2, \dots$, то для неизвестных коэффициентов a_k и b_k получаем равенство (22). Причем необходимо выполнение условия $\alpha_0 = 0$. Данное условие эквивалентно условию (4). Далее, существование и гладкость решения доказываются аналогично доказательству теоремы 1. Теорема 2 доказана.

References

1. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integrals and derivatives of fractional order and some applications. — Minsk, Nauka i tehnika, 1987. — 668 p.
2. Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. Some integro-differential operators on a class of harmonic functions and their application // Proceedings of the Chelyabinsk scientific center. — Chelyabinsk, 2010. — № 1 (47). — P. 1–9.
3. Torebek B.T., Turmetov B. Kh. On the solvability of some problems for the Laplace equation // Mathematical journal. — Almaty, 2010. — Vol. 10. — № 1 (35). — P. 93–103.
4. Turmetov B. Kh. On Smoothness of a Solution to a Boundary Value Problem with Fractional Order Boundary Operator // Matematicheskiye trudi. — Novosibirsk, 2004. — Vol. 7. — № 1. — P. 189–199.
5. Turmetov B. Kh. On a boundary problem for a harmonic equation // Differential Equations. — Minsk. — 1996. — Vol. 32. — № 8. — P. 1089–1092.
6. Turmetov B.H., Ilyasova M. On the smoothness of solutions of a boundary value problem in classes of Nikol'skii. Proceedings of the International scientific-practical conference «Kazakhstan in the new world and the problems of National Education, on the 10th anniversary of the University» Syrdaria (May 16–18, 2008). — Shymkent. — Vol. III. — P. 239–242.
7. Ilyasova M. On the smoothness of solutions of a boundary problem with boundary operator Hadamard-March // Vestn. KarGU. Ser. Mathematic. — Karaganda, 2008. — № 3 (51). — P. 40–44.
8. Bari N.K. Trigonometric series. — M.: Fizmatgiz, 1961. — 936 p.
9. Konyushkov A.A. Lipschitz's classes // Izvestya AN SSSR. Ser. mat. — 1957. — Vol. 21. — P. 423–448.
10. Zygmund A. Trigonometric series. — M.: Mir, 1965. — 538 p.
11. Bugrov Y.S. Properties of polyharmonic functions // Izvestya AN USSR. Ser. Mathematic. — 1958. — Vol. 22. — № 4. — P. 491–514.