ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

Есенбаева Г.А., Есбаев А.Н., Сәрсенбек Ә.Ж.

Карагандинский государственный университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

Назарбаев Интеллектуальная школа, Астана, Казахстан

E-mail: esenbaevagulsima@mail.ru

Интегральные преобразования эффективно используются в различных областях точных наук, в том числе и в задачах механики, таких как динамические задачи для упругого пространства, задачи динамики жидкости и ее взаимодействия с упругими телами, задачи колебательных процессов и т.д.

Уравнение, определяющее распространение упругих волн в призматическом стержне, продольное перемещение точек которого не зависит от координат в его поперечном сечении, а продольная жесткость - та же, что и в статике, имеет вид [1]

$$\rho F u_{tt} - EFu_{xx} = Q(t,x),$$

где u - перемещение, F - площадь поперечного сечения, Q - внешняя продольная нагрузка.

В простейших случаях, как в задаче продольных колебаний стержня, моделируемой уравнениями

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = Q(t,x), \quad u_x(t,0) = 0, \quad u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x), \quad 0 < t, x < \infty,$$

при применении интегрального $\cos$-преобразования решение можно получить в явном аналитическом виде

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(|x-at|)\right] + \frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at} \psi(z)dz - sign(x-at)\int_0^{|x-at|}\psi(z)dz\right] +$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \left[\int_0^{x+a(t-\tau)} Q(\tau,z)dz - sign(x-a(t-\tau))\int_0^{|x-a(t-\tau)|} Q(\tau,z)dz\right].$$

Плоская задача о продольных нестационарных деформациях пластины определяется уравнениями [1]

$$v_{tt} - v_{xx} - (1-2c^2)w_x = Q_0, \; w_{tt} - c^2 w_{xx} + 3w + 3(1-2c^2)v_x = 0, \; Q_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} Q(t,x,y)dy, \; c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

где v, w - скорости волн в сплошной среде, μ - постоянная Ляме.

Учитывая, что осредненные по сечению продольные напряжения σ_{xx} определяются равенством

$$\sigma_{xx} = v_{xx} + (1-2c^2)w,$$

для бесконечной пластины при $Q_0 = 2\delta(x)$, что соответствует сжатию правой части пластины ($x > 0$) единичной силой и растяжению с той же силой левой части ($x < 0$), то после применения преобразования Лапласа по t и преобразования Фурье по x [2] и использования асимптотических представлений при обращении, получаем

$$\sigma_{xx} \approx -\frac{1}{3} + \int_0^{\eta} Ai(\tau)d\tau - J_0\left(\sqrt{6\frac{1-d^2}{1-c^2}t(t-x)}\right), \; \eta = (x-ct)\left[\frac{t}{6}\left(1 + c^2 - d^2 - \frac{c^2}{d^2}\right)\right]^{-\frac{1}{3}}, \; d^2 = \frac{E}{(1-v^2)\rho},$$

где $Ai(\tau)$ - функция Эри, $J_0(z)$ - функция Бесселя.

Довольно часто наиболее эффективным для решения многомерных задач механики является совместное применение аналитических (например, интегральных преобразований) и численных методов, при этом возможно получить результат там, где каждый из них в отдельности практически бессилен.

Список использованных источников

1. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1968. – 403 с.
2. *Князев П.Н.* Интегральные преобразования. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 200 с.