УДК 517.96

Б.Т.Калимбетов, Б.И.Ескараева, М.А.Темирбеков

Международный казахско-турецкий университет им. К.А.Ясави, Туркестан
(E-mail: bkalimbetov@mail.ru)

Математическое описание внутреннего пограничного слоя для нелинейной интегро-дифференциальной системы

В статье исследована задача пограничного слоя для слабо нелинейной интегро-дифференциальной системы типа Вольтерра со спектральными особенностями ядра и при наличии нулевых точек спектра предельного оператора. Произведена регуляризация исходной задачи, доказана однозначная разрешимость итерационных задач. Обоснован асимптотический характер формальных решений.

Ключевые слова: пограничный слой, сингулярно возмущенная задача, регуляризация, асимптотический ряд, интегральный оператор, резонансный случай, формальные решения, итерационная задача.

Введение

В гидродинамике известно, что если при описании движения потока с малой вязкостью предельное решение уравнения Навье-Стокса (вязкость положена равной нулю) разрывно, то при описании движения всего потока возникает явление внутреннего пограничного слоя. Если обычный пограничный слой появляется в окрестности границ за счет трения потока о границы, то внутренний пограничный слой возникает по другим причинам. Математическое объяснение этой причины изложено в монографии С.А.Ломова и И.С.Ломова. В ней пояснено, что если предельное решение разрывно в какой-то точке или на линии, то «правая часть» (или «неоднородность») не принадлежит области значений предельного оператора задачи. Однако при ненулевой вязкости этого разрыва нет. Следовательно, «течение» должно быть таким, чтобы оно имело возможность стремиться к разрывному. Это возможно только за счет неравномерного перехода с участием вязкости в окрестности той точки или линии, где происходит разрыв [1].

В настоящей работе математическое описание внутреннего пограничного слоя будет изучено в случае, когда интегральный оператор интегро-дифференциального уравнения содержит быстроизменяющееся ядро, которое порождает внутренний пограничный слой.

Рассматривается нелинейная система

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=A(t)y+\int_0^t exp\left(\varepsilon^{-1}\int_s^t \mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)y(s,\varepsilon)ds+\varepsilon f(y,t)+h(t),\ y(0,\varepsilon)=y^0, t\in[0,T], \qquad (1)$$

где $A(t), K(t,s)$ — матрицы-функции размерности $(n\times n)$; $h(t)=\{h_1,...,h_n\}$ — известная вектор-функция; $y^0\in\mathbb{C}^n$ — постоянный вектор; $\mu(t)\in C^\infty[0,T]$ — скалярная функция; $f(y,t)$ — многочлен по y, при следующих предположениях:

1) $A(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^{n^2})$; $h(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^n)$; $K(t,s)\in C^\infty(0\le s\le t\le T,\mathbb{C}^{n^2})$;
$f(y,t)$ многочлен по y:

$$f(y,t)=\sum_{0\le|m|\le l} f^{(m)}(t)y^m$$

с коэффициентами $f^{(m)}(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^n)$; $0\le|m|\le l<\infty$;

2) спектр $\{\lambda_j(t)\}$ матрицы $A(t)$ удовлетворяет требованиям:

а) $\lambda_i(t)\ne 0,\ i=\overline{1,n}$; б) $\lambda_i(t)\ne\lambda_j(t),\ i\ne j,\ i,j=\overline{1,p},\ p<n$;

в) $\lambda_j(t)\equiv 0,\ j=\overline{p+1,n}$; г) $Re\lambda_i(t)\le 0,\ i=\overline{1,p}$;

3) $\lambda_{n+1}(t)\equiv\mu(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{R}^1),\ \lambda_{n+1}(t)\ne\lambda_j(t),\ j=\overline{1,n}$;

Репозиторий КарГУ

4) равенство $(m,\lambda(t)) \equiv m_1\lambda_1(t)+\ldots+m_p\lambda_p(t)+m_{n+1}\lambda_{n+1}(t)=\lambda_j(t)$ ($|m|\geq 2$ и $j=\{1,\ldots,p,n+1\}$) либо не имеет места ни при каком $t\in[0,T]$, либо выполняется при всех $t\in[0,T]$.

Регуляризация задачи

Введем регуляризирующие переменные [2]:

$$\tau_i=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_i(\theta)d\theta \equiv \frac{\varphi_i(t)}{\varepsilon},\ i=\overline{1,p};\ \tau_{n+1}=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu(\theta)d\theta \equiv \frac{\varphi_{n+1}(t)}{\varepsilon}.$$

Вместо искомой функции $y(t,\varepsilon)$ задачи (1) рассмотрим функцию $\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$ большего числа переменных $\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)\big|_{\tau=\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}} \equiv y(t,\varepsilon)$, где $\tau=(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p,\tau_{n+1})$, $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_p,\varphi_{n+1})$. Тогда для функции $\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$ естественно поставить следующую задачу:

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}+D_\lambda\tilde{y}=A(t)\tilde{y}+\int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)\tilde{y}\left(s,\varepsilon^{-1}\varphi(s),\varepsilon\right)ds+h(t),\ \tilde{y}(0,0,\varepsilon)=y^0, \qquad (2)$$

где $D_\lambda \equiv \lambda_1(t)\frac{\partial}{\partial\tau_1}+\ldots+\lambda_p(t)\frac{\partial}{\partial\tau_p}+\lambda_{n+1}(t)\frac{\partial}{\partial\tau_{n+1}}$.

Однако задача (2) еще не является «расширенной» по отношению к исходной (1), так как в ней не произведена регуляризация интегрального члена:

$$I\tilde{y}(t,\varepsilon)=\int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)\tilde{y}\left(s,\varepsilon^{-1}\varphi\left(s\right),\varepsilon\right)ds.$$

Для этой цели необходимо ввести класс M_ε, асимптотически инвариантный (при $\varepsilon\to+0$) относительно оператора I. В линейном случае в качестве такого класса выступает пространство вектор-функций, «натянутых» на единицу, и экспоненты $exp(\varepsilon^{-1}\varphi_i(t))$, порождаемой спектром $\{\lambda_i(t)\}$ предельного оператора $A(t)$. В нелинейном случае это пространство должно быть существенно расширено, так как нелинейность $f(y,t)$ индуцирует в решениях сингулярно возмущенных задач экспоненты $exp(\varepsilon^{-1}(m,\lambda(t))$ измерения $|m|=m_1+m_2+\ldots+m_p+m_{n+1}$ выше первого (см., напр., [3]).

Введем следующие определения.

Определение 1. Задачу (1) назовем нерезонансной, если существует целочисленный вектор $m\equiv|m_1,m_2,\ldots,m_p|$ с $|m|\geq 2$ такой, что при некоторых $i\in\{1,2,\ldots\}$ имеет место тождество

$$(m,\lambda(t)) \neq \lambda_i(t),\ |m|\geq 2,\ \ i=\overline{1,p}\ ,\ \forall t\in[0,T].$$

Определение 2. Будем говорить, что функция $f=(f_1(y,t),f_2(y,t),\ldots,f_n(y,t))$ есть функция класса Ω, если каждая ее компонента разлагается в ряд

$$f_i(y,t)=\sum_{|m|\geq 0} f_i^{(m)}(t)(y-\varphi(t))^m \equiv \sum_{m_1+m_2+\ldots+m_n=0} f_i^{(m_1,\ldots,m_n)}(t)(y-\varphi_1(t))^{m_1}\ldots(y-\varphi_n(t))^{m_n},$$

в котором $f_i^{(m)}(t)\in C^\infty[0,T]$, $|m|\ \geq\ 0$, и сходится абсолютно и равномерно по $t\in[0,T]$ в полицилиндре $\Pi=\{y:|y_i-\varphi_i(t)|<R,\ i=\overline{1,p}\ ,\ \forall t\in[0,T]\}$, где $R>0$ – постоянная*.

Определение 3. Будем говорить, что функция $y(t,\tau)$ принадлежит классу U, если она представляется в виде суммы

$$y(t,\tau)=y_0(t)+\sum_{1\leq|m|\leq N} y^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}\ \ (N=N_y<\infty) \qquad (3)$$

*) точнее, $f(y,t)\in\Omega$, если $f_i(y-\varphi(t))=\sum_{|m|\geq 0} f_i^{(m)}(t)y^m$ сходится абсолютно и равномерно по $t\in[0,T]$ в области $\Pi=\{y:|y_i|<R,\ i=\overline{1,p}\}$, где $R>0$ — постоянная.

Репозиторий КарГУ

с коэффициентами $y^{(0)}(t), y^{(m)}(t) \in C^{\infty}([0,T],\mathbb{C}^n)$, не содержащими резонансных экспонент, т.е. таких экспонент $exp(m,\tau)$ измерение $|m| \geq 2$, для которых при некоторых $j = \{1,2,\ldots,n+1\}$ и $t \in [0,T]$ выполняется неравенство $(m,\lambda(t)) \equiv m_1\lambda_1(t) + \ldots + m_p\lambda_p(t) + m_{n+1}\lambda_{n+1}(t) \neq \lambda_i(t)$ (факт отсутствия в (3) резонансных экспонент отмечен штрихом над суммой).

В качестве класса M_ε возьмем пространство U при $\tau = \varphi(t)/\varepsilon$. Ниже будет показано, что образ $Iy(t,\tau)$ произвольного элемента класса M_ε разлагается в ряд по степеням ε, сходящийся асимптотически при $\varepsilon \to +0$. Это и будет означать, что класс M_ε асимптотически инвариантен относительно интегрального оператора I.

Подставляя (3) в интегральный оператор I, будем иметь

$$Iy(t,\tau) = \sum_{1\leq|m|\leq N} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{n+1}(x)dx} \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (m-e_{n+1},\lambda(x))dx} K^{(m)}(t,s)ds + e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{n+1}(x)dx} \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{n+1}(x)dx} K^{(0)}(t,s)ds, \quad (4)$$

где обозначено $K^{(m)}(t,s) \equiv K(t,s)y^{(m)}(s)$, $m \geq 0$. Покажем, что стоящие здесь интегралы

$$I^{(m)}(t,\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{n+1}(x)dx} \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (m-e_{n+1},\lambda(x))dx} K^{(m)}(t,s)ds, \quad (5)$$

где $|m| \geq 0$, $m \neq e_{n+1}$, разлагаются в асимптотические ряды по степеням ε. Сначала заметим, что при указанных в (4) мультииндексах m выражение $(m-e_{n+1},\lambda(t))$ не обращается в нуль на отрезке $[0,T]$. При $m=0$ и $m=e_i$ $(i \neq n+1)$ это вытекает из описанных выше условий 2), 3). При $|m| \geq 2$ в сумме (3) отсутствуют резонансные экспоненты, а значит, $(m-e_{n+1},\lambda(t)) \equiv (m,\lambda(t)) - \lambda_{n+1}(t) \neq 0$.

Указанное неравенство позволяет применить в (5) операцию интегрирования по частям:

$$I^{(m)}(t,\varepsilon) = \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{n+1}(x)dx} \int_0^t \frac{K^{(m)}(t,s)}{(m-e_{n+1},\lambda(s))} de^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (m-e_{n+1},\lambda(x))dx} =$$

$$= \varepsilon\left[\frac{K^{(m)}(t,t)}{(m-e_{n+1},\lambda(t))} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (m,\lambda(x))dx}\right] - \left[\frac{K^{(m)}(t,0)}{(m-e_{n+1},\lambda(0))} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{n+1}(x)dx}\right] - \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{n+1}(x)dx} \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (m-e_{n+1},\lambda(x))dx} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{K^{(m)}(t,s)}{(m-e_{n+1},\lambda(s))}\right)ds.$$

Продолжая этот процесс, далее получим ряд

$$I^{(m)}(t,\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \varepsilon^{\nu+1} [\left(I_m^{\nu} K^{(m)}(t,s)\right)_{s=t} \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (m,\lambda(x))dx} - \left(I_m^{\nu} K^{(m)}(t,s)\right)_{s=0} \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda(x)dx}] \quad \left(|m| \geq 0,\ m \neq e_{n+1}\right), \quad (6)$$

где введены операторы

$$I_m^0 = \frac{1}{(m-e_{n+1},\lambda(s))};\ I_m^{\nu} = \frac{1}{(m-e_{n+1},\lambda(s))} \frac{\partial}{\partial s} I_m^{\nu-1},\ (\nu \geq 1).$$

В силу условий 1)–3) ряды, стоящие в правой части (6), будут асимптотически сходиться (при $\varepsilon \to +0$) к интегралам $I^{(m)}(t,\varepsilon)$. Но тогда из (5) следует, что образ $Iy(t,\tau)_{\tau=\varphi(t)/\varepsilon}$ интегрального оператора I системы (1) разлагается в асимптотический ряд

$$Iy(t,\tau) = e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{n+1}(x)dx} \int_0^t K^{(e_{n+1})}(t,s)ds +$$

$$+ \sum_{0\leq|m|\leq N,\, m\neq e_{n+1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \varepsilon^{\nu+1} \left[\left(I_m^{\nu} K^{(m)}(t,s)\right)_{s=t} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (m,\lambda(x))dx} - \left(I_m^{\nu} K^{(m)}(t,s)\right)_{s=0} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{n+1}(x)dx}\right].$$

Тем самым показано, что класс M_ε асимптотически инвариантен относительно интегрального оператора I.

Если теперь $\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$ — непрерывная по $(t,\tau) \in [0,T] \times \Pi$, где $\Pi = \{\tau:\ Re\tau_i \leq 0,\ i = \overline{1,n+1}\}$ вектор–функция, разлагающаяся в ряд

Репозиторий КарГУ

$$\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k(t,\tau)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\left(\sum_{0\le|m|\le N_k}y^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}\right),\tag{7}$$

сходящийся асимптотически (при $\varepsilon\to+0$) равномерно по $(t,\tau)\in[0,T]\times\Pi$, то его образ $I\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$ будет, очевидно, также представляться асимптотическим рядом (при $\varepsilon\to+0$). Это позволяет получить окончательное расширение интегрального оператора I следующим образом.

Для произвольного элемента (3) пространства U можно записать, что

$$Iy(t,\tau)=R_0y(t,\tau)+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(R_{\nu+1}y(t,\tau)\right)\cdot\varepsilon^{\nu+1},$$

где через R_ν обозначены операторы (действующие в U), определяемые формулами

$$R_0y(t,\tau)=e^{\tau_{n+1}}\int_0^t K^{(e_{n+1})}(t,s)ds;$$

$$R_{\nu+1}y(t,\tau)=(-1)^\nu\sum_{0\le|m|\le N,\ m\ne e_{n+1}}[\left(I_m^\nu K^{(m)}(t,s)\right)_{s=t}\cdot e^{(m,\tau)}-\left(I_m^\nu K^{(m)}(t,s)\right)_{s=0}\cdot e^{\tau_{n+1}},\ \left(\nu\ge1,\quad\tau=\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right).$$

С учетом этих формул результат подстановки ряда (7) в интеграл $I\tilde{y}$ можно записать в виде:

$$I\tilde{y}=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{s=1,r-s\ge0}^{r}R_{r-s}y_s(t,\tau)_{|\tau=\varepsilon^{-1}\varphi(t)}.$$

Формальным расширением оператора I назовем оператор

$$\tilde{I}\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)\equiv\tilde{I}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k(t,\tau)\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{s=1,r-s\ge0}^{r}R_{r-s}y_s(t,\tau)\Big|_{\tau=\varepsilon^{-1}\varphi(t)}.$$

Хотя этот оператор $\tilde{I}$ определен формально, его сужение $\tilde{I}\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)\big|_{\tau=\varepsilon^{-1}\varphi(t)}$ на функциях $y(t,\tau,\varepsilon)\in C^\infty([0,T]\times\Pi)$, представимых рядами (7) (сходящийся при $\varepsilon\to+0$ равномерно по (t,τ)), имеет вполне конкретный смысл:

$$\tilde{I}\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)\big|_{\tau=\varepsilon^{-1}\varphi(t)}=I\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon).$$

Это равенство означает, что сужение (при $\tau=\varphi(t)/\varepsilon$) образа функции $\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$ расширенного оператора $\tilde{I}$ является асимптотическим рядом, сходящимся при $\varepsilon\to+0$ к функции $I\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$.

Теперь можно записать в окончательной форме систему, расширенную по отношению к исходной системе (1). Она имеет вид:

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}+L_0\tilde{y}-\tilde{I}\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)-\varepsilon f(\tilde{y},t)=h(t);\ \ \tilde{y}(0,0,\varepsilon)=y^0,\tag{8}$$

где $L_0\equiv D_\lambda-A(t)=\lambda_1(t)\dfrac{\partial}{\partial\tau_1}+...+\lambda_p(t)\dfrac{\partial}{\partial\tau_p}+\lambda_{n+1}(t)\dfrac{\partial}{\partial\tau_{n+1}}-A(t)$. Это расширение определено, по крайней мере в классе рядов (7), сходящихся асимптотически при $\varepsilon\to+0$ (равномерно по $(t,\tau)\in[0,T]\times\Pi$), где $\Pi=\{\tau:Re\tau_j\le0,\ \ j=\overline{1,p}\}$, что вполне достаточно для развития алгоритма построения асимптотического решения исходной задачи (1).

Разрешимость итерационных задач

Будем определять решение задачи (8) в виде (7). Для коэффициентов этого ряда получим следующие задачи:

$$Ly_0(t,\tau)\equiv L_0y_0-R_0y_0=h(t),\ \ y_0(0,0)=y^0;\tag{9_0}$$

$$Ly_1(t,\tau)=-\frac{\partial y_0}{\partial t}+\hat{f}(y_0(t,\tau),t)+R_1y_0,\ \ y_1(0,0)=0;\tag{9_1}$$

$$Ly_2(t,\tau)=-\frac{\partial y_1}{\partial t}+\frac{\partial f(\widehat{y_0,t})}{\partial y}y_1+R_1y_1+R_2y_0,\ \ y_2(0,0)=0.\tag{9_2}$$

Репозиторий КарГУ

Здесь значком «^» обозначена операция вложения, ставящая в соответствие произвольной сумме

$$z(t,\tau)=\sum_{|m|\geq 0}^{N} z^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}\equiv\sum_{|m|\geq 0}^{N} z^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}+\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{|m^j|\geq 2;(m^j,\lambda(t))\equiv\lambda_j(t)} z^{(m^j)}(t)e^{\tau_j}$$

(в которой могут присутствовать резонансные экспоненты) элемент $\tilde{z}(t,\tau)$ пространства U, вычисляемый следующим образом:

$$\tilde{z}(t,\tau)=\sum_{|m|\geq 0}^{N} z^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}+\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{|m^j|\geq 2;(m^j,\lambda(t))\equiv\lambda_j(t)} z^{(m^j)}(t)e^{(m^j,\tau)}.$$

Решение задачи (9_0) определяем в виде элемента пространства U:

$$y_0(t,\tau)=\sum_{0\geq|m|\geq N_0}^{N} y_0^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9_0) и приравнивая отдельно свободные члены и коэффициенты при одинаковых экспонентах, получим системы:

$$-A(t)y_0^{(0)}(t)=h(t); \tag{11}$$

$$\left[\lambda_s(t)I-A(t)\right]y_0^{e_i}(t)=0,\quad s=\overline{1,n},\qquad i=\overline{1,p}; \tag{12}$$

$$\left[\lambda_{n+1}(t)I-A(t)\right]y_0^{e_{n+1}}(t)-\int_0^t K(t,s)y_0^{e_{n+1}}(s)ds=0; \tag{13}$$

$$\left[(m,\lambda(t))I-A(t)\right]y_0^{(m)}(t)=0,\quad |m|\geq 2,\ (m,\lambda(t))\neq\lambda_j(t),\ j=\overline{1,n}. \tag{14}$$

Поскольку $\lambda_{n+1}(t)\neq\lambda_j(t),\ j=\overline{1,n},\ det\left[(m,\lambda(t))I-A(t)\right]\neq 0,\ |m|\geq 2,$ то системы (13) и (14) имеют тривиальные решения: $y_0^{e_{n+1}}(t)\equiv 0,\quad y_0^{(m)}(t)\equiv 0,\ |m|\geq 2.$

Для вычисления решения системы (12) сделаем в ней преобразование:

$$y_s(t)=C(t)\xi(t)\equiv\sum_{s=1}^{n}\xi_s(t)c_s(t), \tag{15}$$

где $\xi=\{\xi_1,...,\xi_n\}$ — новый неизвестный вектор; $C(t)=(c_1,...,c_n)$ — матрица из столбцов c_k, являющихся собственными векторами оператора $A(t)$. Подставляя (15) в систему (12), будем иметь:

$$\left[\lambda_s(t)I-A(t)\right]C(t)\xi(t)=0.$$

Умножая левую часть этого равенства на матрицу $C^{-1}(t)$ и учитывая, что $C^{-1}(t)A(t)C(t)=diag\left(\lambda_1,...,\lambda_n\right)$, будем иметь:

$$\left[\lambda_s(t)I-\Lambda(t)\right]\xi=0.$$

Учитывая, что $\lambda_j(t)\equiv 0,\ j=\overline{p+1,n},$ запишем покомпонентно в виде

$$\begin{gathered}
(\lambda_s(t)-\lambda_1(t))\xi_1(t)=0;\\
\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\
(\lambda_s(t)-\lambda_{s-1}(t))\xi_{s-1}(t)=0;\\
0\cdot\xi_s(t)=0,\\
(\lambda_s(t)-\lambda_{s+1}(t))\xi_{s+1}(t)=0;\\
\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\
(\lambda_s(t)-\lambda_p(t))\xi_p(t)=0;\\
\lambda_s(t)\xi_{p+1}(t)=0;\\
\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\
\lambda_s(t)\xi_n(t)=0.
\end{gathered} \tag{16}$$

Последние $(n-p)$ компоненты системы (16) имеют решения в классе $C^{\infty}[0,T]$ вида

$$y_0^{e_j}(t)\equiv 0,\quad j=\overline{p+1,n}.$$

Первые p компоненты системы (16) имеют решения вида

$$y_0^{e_i}(t)=\alpha_0^{e_i}(t)c_i(t),\ i=\overline{1,p},$$

Репозиторий КарГУ

где $\alpha_0^{e_i}(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^1)$ — пока произвольные функции. При этом решение (10) системы (9_0) записывается в форме:

$$y_0(t,\tau)=\sum_{i=1}^{p}\ \alpha_0^{e_i}(t)c_i(t)e^{\tau_i}. \tag{17}$$

Подчиняя его начальному условию, $y_0(0,0)=y^0$, найдем, что

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_0^{e_i}(0)c_i(0)=y^0,$$

откуда (умножая скалярно обе части на $d_i(0)$) вычислим

$$\alpha_0^{e_i}(0)\ =\ <y^0,d_i(0)>,\quad i=\overline{1,p}. \tag{18}$$

Перейдем теперь к задаче (9_1). Подставляя в нее решение (17) системы (9_0), будем иметь:

$$Ly_1(t,\tau)=-\sum_{i=1}^{n}\left(\dot\alpha_0^{e_i}(t)c_i(t)+\alpha_0^{e_i}(t)\dot c_i(t)\right)e^{\tau_i}+\ \sum_{i=1}^{n}f^{e_i}\left(\alpha_0^{e_1},\alpha_0^{e_2},\ldots,\alpha_0^{e_p},t\right)e^{\tau_i}+$$

$$+\sum_{|m|\ge 2;\ (m,\lambda(t))\equiv\lambda_i(t),\ i=\overline{1,p}}f^{(m)}\left(\alpha_0^{e_1},\alpha_0^{e_2},\ldots,\alpha_0^{e_p},t\right)e^{(m,\tau)}+f_0(t)-\left(I_0^0K(t,s)y_0^{(0)}(s)\right)_{s=t}-\left(I_0^0K(t,s)y_0^{(0)}(s)\right)_{s=0}\cdot e^{\tau_{n+1}}+$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\left[\left(I_{e_i}^0K(t,s)\alpha_0^{e_i}(s)c_i(s)\right)_{s=t}e^{\tau_i}+f^{e_{n+1}}\left(\alpha_0^{e_1},\alpha_0^{e_2},\ldots,\alpha_0^{e_p},t\right)e^{\tau_{n+1}}-\left(I_{e_i}^0K(t,s)\alpha_0^{e_i}(s)c_i(s)\right)_{s=0}\cdot e^{\tau_{n+1}}\right],$$

где учтено, что

$$y_0((t,\tau),t)=f_0(t)+\sum_{i=1}^{p}f^{e_i}(\alpha_0^{e_1},\ldots,\alpha_0^{e_p},t)e^{\tau_i}+\sum_{|m|\ge 2:(m,\lambda(t))\ne\lambda_i(t),i=\overline{1,p}}^{p}f^{(m)}(\alpha_0^{e_1},\ldots,\alpha_0^{e_p},t)e^{(m,\tau)};$$

$$R_1y(t,\tau)=\sum_{0\le|m|\le N,m\ne e_{n+1}}^{p}\left[(I_m^0(K(t,s)y^{(m)}(s)))_{s=t}e^{(m,\tau)}-(I_m^0(K(t,s)y^{(m)}(s)))_{s=0}e^{\tau_{n+1}}\right].$$

Определяя решение системы (9_1) в виде суммы

$$y_1(t,\tau)=\sum_{|m|\ge 0}y_1^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}, \tag{19}$$

получим следующие системы для коэффициентов $y_1^{(m)}(t)$:

$$-A(t)y_1^{(0)}(t)=f_0(t)+\left(I_0^0K(t,s)y_0^{(0)}(s)\right)_{s=t}; \tag{20}$$

$$\left[\lambda_i(t)I-A(t)\right]y_1^{e_i}(t)=-\dot\alpha_0^{e_i}(t)c_i(t)-\alpha_0^{e_i}(t)\dot c_i(t)+$$

$$+\left(I_{e_i}^0K(t,s)\alpha_0^{e_i}(s)c_i(s)\right)_{s=t}+f^{e_i}\left(\alpha_0^{e_1},\alpha_0^{e_2},\ldots,\alpha_0^{e_p},t\right),\quad i=\overline{1,p}; \tag{21}$$

$$\left[\lambda_{n+1}(t)I-A(t)\right]y_1^{e_{n+1}}(t)-\int_0^t K(t,s)y_1^{e_{n+1}}(s)ds=-\left(I_0^0K(t,s)y_0^{(0)}(s)\right)_{s=0}-$$

$$-\sum_{i=1}^{p}\left[\left(I_{e_i}^0K(t,s)\alpha_0^{e_i}(s)c_i(s)\right)_{s=0}+f^{e_{n+1}}\left(\alpha_0^{e_1},\alpha_0^{e_2},\ldots,\alpha_0^{e_p},t\right)\right],\quad i=\overline{1,p}; \tag{22}$$

$$\left[(m,\lambda(t))I-A(t)\right]y_1^{(m)}(t)=f^{(m)}\left(\alpha_0^{e_1},\alpha_0^{e_2},\ldots,\alpha_0^{e_p},t\right),\ |m|\ge 2,\ \ (m,\lambda(t))\ne\lambda_j(t),\ j=\overline{1,n}. \tag{23}$$

Как и в предыдущем случае, устанавливаем, что системы (22), (23) имеют единственные решения в классе $C^\infty([0,T],\mathbb{C}^1)$. Для разрешимости системы (21) в указанном классе необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\langle-\dot\alpha_0^{e_i}(t)c_i(t)-\alpha_0^{e_i}(t)\dot c_i(t)+\frac{K(t,t)\alpha_0^{e_i}(t)}{\lambda_i(t)-\lambda_{n+1}(t)}c_i(t)+f^{e_i}(\alpha_0^{e_1},\alpha_0^{e_2},\ldots,\alpha_0^{e_p},t),d_i(t)\right\rangle=0,\ i=\overline{p+1,n}. \tag{24}$$

Из этих тождеств выводим систему дифференциальных уравнений относительно функций $\alpha_{p+1}(t),\alpha_{p+2}(t),\ldots,\alpha_n(t)$. Предположим, что предельная система $0=A(t)\overline{y}+h(t)$ имеет единственное решение $(\alpha_{p+1}(t),\alpha_{p+2}(t),\ldots,\alpha_n(t))$ в классе $C^\infty([0,T],\mathbb{C}^{n-p})$. Тогда тождество (24) и начальное условие (18) удовлетворяются. Кроме того, мы построим предельное решение (4) и сделаем все наши рассуж-

Репозиторий КарГУ

дения законными. Так как функция $f(y,t)$ принадлежит классу U, то разложение ее в степенной ряд в окрестности точки (4) возможно по определению класса Ω (см. определение 2). Условия же (24) приводят к линейной системе дифференциальных уравнений относительно функций $\alpha_{p+1}(t),\alpha_{p+2}(t),\ldots,\alpha_n(t)$, которые имеют начальные значения (18). Эти уравнения всегда разрешимы в классе $C^{\infty}([0,T],\mathbb{C}^p)$. Значит, мы найдем все функции $\alpha_i(t)$ в решении (17) однозначным образом. Тем самым мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1)–3) и предельная система $0=A(t)\overline{y}+h(t)$ имеет решение. Тогда все итерационные задачи (9_0), (9_1), (9_2),… однозначно разрешимы в классе U (при их последовательном решении).

Замечание (о разрешимости промежуточных задач в резонансном случае). В резонансном случае система

$$\dot{\alpha}_0^{e_j}(t)=-\left[<\dot{c}_j(t),d_j(t)>-\frac{<K(t,t)c_j(t),d_j(t)>}{\lambda_j(t)-\lambda_{n+1}(t)}\right]\alpha_0^{e_j}(t)+<f^{e_j}(\alpha_0^{e_1},\ldots,\alpha_0^{e_n},t),d_j(t)>=0,\ \ j=\overline{1,n},\quad (25)$$

полученная из системы (24), является нелинейной системой дифференциальных уравнений, и, значит, ее разрешимость на отрезке $[0,T]$ не гарантирована. В связи с этим появляются дополнительные трудности выяснения вопроса о разрешимости. Однако система (25) будет иметь вид нормальной (по Брюно) формы, поэтому для исследования разрешимости системы (25) на отрезке $[0,T]$ можно использовать аппарат теории нормальных форм Брюно [4]. Из него следует, что если, например, ненулевые собственные значения матрицы $A(t)$ в некоторой точке $t^*\in[0,T]$ расположены по одну сторону от некоторой прямой σ, проходящей через нуль комплексной плоскости λ, и на ней нет точек $\lambda_j(t)$, то система является треугольной. В этом случае уравнение (25) последовательно интегрируется, а значит, их разрешимость на отрезке $[0,T]$ становится очевидной. В других случаях расположение спектра $\lambda_j(t)$ относительно мнимой оси треугольности системы (25) нарушается. Однако в любом случае существует некоторая бирациональная замена переменных, позволяющая понизить порядок системы и свести исследования проблемы разрешимости в целом к более простой системе дифференциальных уравнений. Мы не будем обсуждать здесь эту проблему.

Потребуем, чтобы система (25)–(18) имела решение в классе $C^{\infty}([0,T],\mathbb{C}^n)$. В этом случае функции $\alpha_0^{e_j}(t)$, входящие в решение (17) системы (9_0), будут полностью вычислены, а сама система (9_0) будет иметь единственное решение в пространстве U. При этом будет найдено решение (17) системы (9_1) с точностью до элементов ядра

$$\alpha_1^{e_1}(t)e^{\tau_1}+\ldots+\alpha_1^{e_p}(t)e^{\tau_p}.$$

Асимптотический характер формальных решений

Построив решения $y_0(t,\tau),\ldots,y_N(t,\tau)$ задач (9_0), (9_1), (9_2),… в пространстве U, составим частичную сумму $S_n(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k y_k(t,\tau)$. Обозначим сужение этой суммы при $\tau=\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}$ через $y_{\varepsilon N}(t)$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда функция $y_{\varepsilon N}(t)$ удовлетворяет задаче (1) с точностью до членов, содержащих ε^{N+1}, т.е.

$$\varepsilon\frac{dy_{\varepsilon N}(t)}{dt}=A(t)y_{\varepsilon N}(t)+\int_0^t exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)y_{\varepsilon N}(s,\varepsilon)ds+h(t)+\varepsilon f(y_{\varepsilon N},t)+\varepsilon^{N+1}R(t,\varepsilon),\ y_{\varepsilon N}(0)=y^0,$$

где $\|R(t,\varepsilon)\|_{C[0,T]}\le\overline{R}$, $\overline{R}>0$ — постоянная, не зависящая от $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, ε_0 достаточно мало.

Доказательство. Подставляя $y_0(t,\tau),\ldots,y_N(t,\tau)$ в первые N уравнений (9_0), (9_1), (9_2),…, получим тождества. Умножим их на $1,\varepsilon,\varepsilon^2,\ldots$ соответственно и сложим. Будем иметь:

Репозиторий КарГУ

$$L_0(y_0+\varepsilon y_1+\ldots+\varepsilon^N y_N)-R_0(y_0+\varepsilon y_1+\ldots+\varepsilon^N y_N)\equiv h(t)-\varepsilon\left(\frac{\partial y_0}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial y_1}{\partial t}+\ldots+\varepsilon^{N-1}\frac{\partial y_{N-1}}{\partial t}\right)+\varepsilon R_1 y_0+$$

$$+\varepsilon^2\left(R_1y_1+R_2y_0\right)+\ldots+\varepsilon^N\left(R_1y_{N-1}+\ldots+R_Ny_0\right)+\varepsilon\hat{f}(y_0,t)+\varepsilon^2\frac{\partial f(\widehat{y_0,t})}{\partial y}y_1+\ldots+\varepsilon^N\hat{P}_N(y_0,\ldots,y_{N-1},t).$$

Производя здесь сужение при $\tau=\varepsilon^{-1}\varphi(t)$, учтем, что выполняются тождества

$$\sum_{0\le|m|\le k} z^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}\Big|_{\tau=\varepsilon^{-1}\varphi(t)}\equiv\sum_{0\le|m|\le k}^{\wedge} z^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}\Big|_{\tau=\varepsilon^{-1}\varphi(t)};$$

$$L_0v(t,\tau,\varepsilon)\Big|_{\tau=\varepsilon^{-1}\varphi(t)}\equiv\varepsilon\frac{dv(t,\varepsilon^{-1}\varphi(t),\varepsilon)}{dt}-A(t)v(t,\varepsilon^{-1}\varphi(t),\varepsilon)-\varepsilon\frac{\partial v(t,\varepsilon^{-1}\varphi(t),\varepsilon)}{\partial t},$$

будем иметь

$$\varepsilon\frac{dy_{\varepsilon N}(t)}{dt}-A(t)y_{\varepsilon N}(t)=\varepsilon^{N+1}\frac{\partial y_N(t,\varepsilon^{-1}\varphi(t))}{\partial t}+h(t)+\sum_{r=0}^{N}\varepsilon^r\sum_{s=0,r-s\ge0}^{r}R_{r-s}y_s(t,\varphi)+$$

$$+\varepsilon\left[f(y_0,t)+\varepsilon\frac{\partial f(y_0,t)}{\partial y}y_1+\ldots+\varepsilon^{N-1}P_N(y_0,\ldots,y_{N-1},t)\right]$$

или

$$\varepsilon\frac{dy_{\varepsilon N}(t)}{dt}=A(t)y_{\varepsilon N}(t)+\int_0^t exp\left(\varepsilon^{-1}\int_s^t\mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)y_{\varepsilon N}(s)ds+\varepsilon f(y_{\varepsilon N}(t),t)+h(t)+\varepsilon^{N+1}\frac{\partial y_{\varepsilon N}(t,\varphi)}{\partial t}-$$

$$-\left[\int_0^t exp\left(\varepsilon^{-1}\int_s^t\mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)y_{\varepsilon N}(s)ds-\sum_{r=0}^{N}\varepsilon^r\sum_{s=0,r-s\ge0}^{r}R_{r-s}y_s(t,\varphi)\right]-$$

$$-\varepsilon\left[f(y_{\varepsilon N}(t),t)-f(y_0,t)-\frac{\partial f(y_0,t)}{\partial y}y_1-\ldots-\varepsilon^{N-1}P_N(y_0,\ldots,y_{N-1},t)\right].$$

По определению операторов R_k выражение в первой квадратной скобке последнего тождества представляется в виде $\varepsilon^{N+1}M_1(t,\varepsilon)$, а по построению задач (9_0), (9_1), (9_2),… выражение во второй квадратной скобке представляется в виде $\varepsilon^{N+1}M_2(t,\varepsilon)$, где $\|M_i\|_{C[0,T]}\le const, i=1,2.$ Обозначая $R(t,\varepsilon)\equiv M_1(t,\varepsilon)+M_2(t,\varepsilon)+\partial y_N(t,\varphi)/\partial t$, получим утверждение леммы.

При обосновании асимптотической сходимости формального решения $y_{\varepsilon N}(t)$ к точному $y(t,\varepsilon)$ используется следующее утверждение (см. [3]), касающееся разрешимости операторного уравнения

$$P_\varepsilon(u)\ =\ 0. \tag{26}$$

Теорема 2. Пусть оператор P_ε действует из банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2 и имеет на некотором шаре $\{\|u-u_0\|\le r\subset B_1\}$ две непрерывные производные. Пусть также существует оператор $\Gamma_\varepsilon\equiv\left[P'_\varepsilon(u_0)\right]^{-1}$ и выполнены условия

1) $\|\Gamma_\varepsilon\|\le c_1\varepsilon^{-k}$; 2) $\|P_\varepsilon(u_0)\|\le c_2\varepsilon^{-m}$ $(m\ >\ 2k)$; 3) $\|P''_\varepsilon(u)\|\le c_3$.

Тогда уравнение (26) имеет при достаточно малых $\varepsilon>0$ $(\varepsilon\in(0,\varepsilon_0])$ решение $u_*\in B_1$, удовлетворяющее неравенству

$$\|u_*-u_0\|_{B_1}\le ce^{m-k}.$$

Здесь c_1,c_2,c_3 и c — некоторые положительные постоянные, не зависящие от $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Кроме того, нам понадобится следующее вспомогательное утверждение об оценке решения интегро-дифференциальной системы:

$$\varepsilon\frac{dz}{dt}=\left[A(t)+\varepsilon B(t,\varepsilon)\right]z+\int_0^t exp\left(\varepsilon^{-1}\int_s^t\mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)z_{\varepsilon N}(s,\varepsilon)ds+H(t,\varepsilon),\ z(0,\varepsilon)=0. \tag{27}$$

Репозиторий КарГУ

Лемма 2. Пусть $A(t)\in C^1([0,T],\mathbb{C}^{n^2})$, $B(t,\varepsilon)\in C([0,T],\mathbb{C}^{n^2})$, $\|B(t,\varepsilon)\|_{C[0,T]}\le \overline{B}$, где $\overline{B}$ не зависит от $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $K(t,s)\in C^\infty(0\le s\le t\le T,\mathbb{C}^{n^2})$, $H(t,\varepsilon)\in C([0,T],\mathbb{C}^{n^2})$ при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$. Пусть, кроме того, спектр $\{\lambda_j(t)\}$ матрицы $A(t)$ лежит в полуплоскости $Re\lambda\le 0$ при каждом $t\in[0,T]$ и матрица $A(t)$ является матрицей простой структуры. Если спектральное значение $\mu(t)$ ядра интегрального оператора удовлетворяет требованиям

а) $Re\mu(t)<0\ \ \forall t\in[0,T]$; б) $\mu(t)\in C^1[0,T]$,

то решение $z(t,\varepsilon)$ задачи (27) при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0>0$ достаточно мало) удовлетворяет оценке

$$\|z(t,\varepsilon\|_{C[0,T]}\le\frac{c_0}{\varepsilon}\|H(t,\varepsilon)\|_{C[0,T]}.$$

Доказательство полностью повторяет обоснование аналогичного утверждения работы [5]. Проверим равномерную ограниченность фундаментальной матрицы решений $Y(t,s,\varepsilon)$ задачи

$$\varepsilon\frac{dY(t,s,\varepsilon)}{dt}=\left[A(t)+\varepsilon B(t,\varepsilon)\right]Y(t,s,\varepsilon),\ Y(s,s,\varepsilon)=I. \tag{28}$$

Сделав в (28) преобразование $Y=T(t)z$, приводящее матрицу $A(t)$ к диагональной форме: $T^{-1}(t)A(t)T(t)=\Lambda(t)\equiv diag(\lambda_1(t),\dots,\lambda_p(t))$, получим систему

$$\varepsilon\frac{dZ(t,s,\varepsilon)}{dt}=\Lambda(t)Z(t,s,\varepsilon)+\varepsilon T^{-1}(t)\left[B(t,\varepsilon)T(t)-T'(t)\right]Z(t,s,\varepsilon),\ Z(s,s,\varepsilon)=T^{-1}(s).$$

Перейдем к эквивалентной интегральной системе

$$Z(t,s,\varepsilon)=exp\left(\varepsilon^{-1}\int_s^t\Lambda(x)dx\right)T^{-1}(s)+\int_s^t exp\left(\varepsilon^{-1}\int_\xi^t\Lambda(x)dx\right)T^{-1}(\xi)\left[B(\xi,\varepsilon)T(\xi)-T'(\xi)\right]Z(\xi,s,\varepsilon)d\xi.$$

Отсюда и из того, что $Re\lambda_j(t)<0$ ($\forall t\in[0,T], j=\overline{1,n}$), получим

$$\|Z(t,s,\varepsilon)\|\le c_0+c_1\int_s^t\|Z(\xi,s,\varepsilon)\|d\xi,\quad 0\le s\le t\le T,$$

где $c_0=\max\limits_{0\le\xi\le T}\|T^{-1}(\xi)\|$, $c_1=\max\limits_{0\le\xi\le T}\|T^{-1}(\xi)\left[B(\xi,\varepsilon)T(\xi)-T'(\xi)\right]\|$.

Используя неравенство Гронуолла-Беллмана [6], будем иметь

$$\|Z(t,s,\varepsilon)\|\le c_0e^{c_1(t-s)}\le const,$$

при $0\le s\le t\le T$ и $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$. Равномерная ограниченность фундаментальной матрицы решений задачи (28) показана.

Перейдем теперь к доказательству основного результата.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1)–4) и задача (25), (18) разрешима в целом на отрезке $[0,T]$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ исходная задача (1) имеет в классе $C^1([0,T],\mathbb{C}^n)$ единственное решение $y(t,\varepsilon)$ и справедлива оценка

$$\|y(t,\varepsilon)-y_{\varepsilon N}(t)\|_{C[0,T]}\le C_N\varepsilon^{N+1}\ \ (N=0,1,\dots),$$

где постоянная $C>0$ не зависит от ε при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Доказательство. Применим теорему 2. В качестве оператора $P_\varepsilon(u)$ возьмем оператор

$$P_\varepsilon(u)\equiv\varepsilon\frac{du}{dt}-A(t)u+\int_0^t exp\left(\varepsilon^{-1}\int_s^t\mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)u(s,\varepsilon)ds-$$

$$-\varepsilon f(u+y^0,t)-A(t)y^0-\int_0^t exp\left(\varepsilon^{-1}\int_s^t\mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)y^0ds-h(t).$$

Этот оператор, очевидно, действует из банахова пространства $\dot{C}^1[0,T]=\left\{v(t)\in C^1[0,T]: v(0)=0\right\}$ в банахово пространство $C[0,T]$, в которых введены нормы

$$\|v(t)\|_{C[0,T]}=\max_{0\le s\le t\le T}|v(t)|,\quad \|v(t)\|_{\dot{C}^1[0,T]}=\|v(t)\|_{C[0,T]}+\|\dot{v}(t)\|_{C[0,T]}.$$

Репозиторий КарГУ

В качестве начального приближения u_0 возьмем функцию $u_0 = y_{\varepsilon N}(t) - y^0$. Согласно лемме 1 имеем $P_\varepsilon(u_0) = \varepsilon^{N+1} R(t,\varepsilon)$, где $\|R(t,\varepsilon\|_{C[0,T]} \le \overline{R}$. Следовательно, условие 2) теоремы 2 выполнено при $m = N+1$. Существование второй производной $P''(u)$ и ее непрерывность в шаре $\|u - u_0\| \le r$ очевидны, так как $f(u + y^0, t)$ — многочлен по u. Проверим теперь условие 1).

Оператор $P'_\varepsilon(u_0)$ имеет вид

$$P'_\varepsilon(u_0)v \equiv \varepsilon \frac{dv}{dt} - A(t)v + \int_0^t exp\left(\varepsilon^{-1}\int_s^t \mu(\theta)d\theta\right) K(t,s)v(s,\varepsilon)ds - \varepsilon \frac{\partial f(y_{\varepsilon N}(t),t)}{\partial y} v,$$

в чем легко убедиться, рассмотрев разность $P_\varepsilon(u_0 + g) - P_\varepsilon(u_0)$ и выделив в ней линейную относительно $g(t) \in \dot{C}^1[0,T]$ часть. Для оценки $\|\Gamma_\varepsilon\| \equiv \left\|(P'(u_0))^{-1}\right\|$ надо оценить норму решения уравнения

$$P'_\varepsilon(u_0)v = g(t), \tag{29}$$

где $g(t)$ — произвольный элемент пространства $C[0,T]$, а решение $v = v(t)$ ищется в пространстве $\dot{C}[0,T]$. Согласно лемме 2 для решения $v = v(t)$ справедлива оценка

$$\|v(t,\varepsilon)\|_{C[0,T]} \le \frac{c_0}{\varepsilon}\|g(t)\|_{C[0,T]}.$$

Используя уравнение (29), находим, что

$$\varepsilon\left\|\frac{dv}{dt}\right\|_{C[0,T]} \le \|A(t)\| \cdot \|v\|_{C[0,T]} + \max_{0\le s\le t\le T}\|K(t,s)\| \cdot \|v(t)\|_{C[0,T]} + \varepsilon \max_{0\le s\le t\le T}\left\|\frac{\partial f(y_{\varepsilon N}(t),t)}{\partial y}\right\| \cdot \|v\|_{C[0,T]} \le c_4\|v\|_{C[0,T]} \le \frac{c_4 c_0}{\varepsilon}\|g\|_{C[0,T]},$$

где постоянная $c_4 > 0$ не зависит от $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ при достаточно малых $\varepsilon_0 > 0$. Следовательно,

$$\|\Gamma_\varepsilon g\|_{\dot{C}[0,T]} = \|v(t,\varepsilon\|_{C[0,T]} + \left\|\frac{dv}{dt}\right\|_{C[0,T]} \le \frac{c_0}{\varepsilon}\|g\|_{C[0,T]} + \frac{c_0 c_4}{\varepsilon}\|g\|_{C[0,T]} \le \frac{c_5}{\varepsilon^2}\|g\|_{C[0,T]}.$$

Таким образом, $\|\Gamma_\varepsilon\| \le \frac{c_5}{\varepsilon^2}$, значит, условие 1) теоремы 2 выполнено. Поэтому уравнение (26) имеет единственное решение $u_*(t,\varepsilon) \in B_1$, причем имеет место оценка

$$\|u_* - u_0\|_{B_1} \le c\varepsilon^{m-k} = \overline{c}_{N-1} \cdot \varepsilon^{N+1},\ N > 3.$$

Отсюда следует, что задача (1) имеет единственное решение $y(t,\varepsilon) = u_*(t,\varepsilon) + y^0$ на отрезке $[0,T]$ и имеет место оценка

$$\|y(t,\varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t)\|_{C^1[0,T]} \le \overline{c}_{N-1} \cdot \varepsilon^{N+1},$$

а значит, для частичной суммы $y_{\varepsilon,N+2}(t)$ сужение ряда (7) будет иметь вид $\|y(t,\varepsilon) - y_{\varepsilon,N+2}(t)\|_{C[0,T]} \le \overline{c}_{N+1}\varepsilon^{N+1}$. Учитывая, что $y_{\varepsilon,N+2}(t) = y_{\varepsilon N}(t) + \varepsilon y_{\varepsilon,N+1}(t,\varphi) + \varepsilon^2 y_{\varepsilon,N+2}(t,\varphi)$, получим оценку

$$\|y(t,\varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t)\|_{C[0,T]} \le c_{N+1} \cdot \varepsilon^{N+1},\ N > 3.$$

Эта оценка верна при $N > 3$. Записав эту оценку при $N = 4$, будем иметь $(0 \le r \le 3)$

$$c_5 \cdot \varepsilon^5 \ge \|y(t,\varepsilon) - y_{\varepsilon 4}(t)\|_{C[0,T]} \equiv \|(y(t,\varepsilon) - y_{\varepsilon,3-r}(t)) - (y_{\varepsilon 4}(t) - y_{\varepsilon,3-r}(t))\|_{C[0,T]} \ge \|y(t,\varepsilon) - y_{\varepsilon,3-r}(t)\|_{C[0,T]} -$$
$$-\|y_{\varepsilon 4}(t) - y_{\varepsilon,3-r}(t)\|_{C[0,T]} \ge \|y(t,\varepsilon) - y_{\varepsilon,3-r}(t)\|_{C[0,T]} - \|\varepsilon^{(3-r)+1} y_{(3-r)+1}(t,\varphi) + \varepsilon^{(3-r)+2} y_{(3-r)+2}(t,\varphi) + \ldots + \varepsilon^4 y_4(t,\varphi)\|_{C[0,T]}.$$

Отсюда получим оценку $\|y(t,\varepsilon) - y_{\varepsilon,3-r}(t)\|_{C[0,T]} \le c_{4-r}\varepsilon^{(3-r)+1}$.

Теорема полностью доказана.

Список литературы

1 *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Изд-во МГУ, 2011. — С. 162.

2 *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 400 с.

Репозиторий КарГУ

3 *Сафонов В.Ф.* Метод регуляризации для сингулярно возмущенных систем нелинейных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1979. — Т. 43. — № 43. — С. 628–653.

4 *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979. — 254 с.

5 *Сафонов В.Ф., Туйчиев О.Д.* Регуляризация сингулярно возмущенных интегральных уравнений с быстро изменяющимся ядром // Дифференциальные уравнения. — 1997. — Т. 33. — № 9. — С. 1199–1211.

6 *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.

Б.Т.Қалымбетов, Б.И.Есқараева, М.А.Темірбеков

Сызықты емес интегро-дифференциалдық жүйе үшін ішкі шекаралық қабаттың математикалық сипатталуы

Мақалада ядросы спектралды ерекшелікті және шектік операторының спектрінде нолдік нүкте болатын әлсіз сызықты емес Вольтерра типіндегі интегро-дифференциалдық жүйе үшін шекаралық қабат есебі зерттелген. Бастапқы есептің регуляризациясы жасалған, итерациялық есептердің бірмәнді шешімділігі дәлелденген.

B.T.Kalimbetov, B.I.Yeskarayeva, M.A.Temirbekov

Mathematical description of the internal boundary layer for nonlinear integro-differential system

Mathematical description of the internal boundary layer for nonlinear integro-differential system. In this paper studies the problem of boundary layer for weakly nonlinear integro-differential system of Volterra type with the spectral singularities of the kernel and in the presence of zeros in spectrum of the limit operator. Made regularization of the original problem, the unique solvability of iterative problems. Justified asymptotic nature of formal solutions.

References

1 Lomov S.A., Lomov I.S. *Fundamentals of mathematical theory of the boundary layer*, Moscow: Publ. MSU, 2011, p. 162.

2 Lomov S.A. *Introduction to general theory of singular perturbations*, Moscow: Nauka, 1981, 400 p.

3 Safonov V.F. *Proceedings AN USSR*. series mathematics, 1979, 43, 43, p.628–653.

4 Bryuno A.D. *Local methods in nonlinear differential equations*, Moscow: Nauka, 1979, 254 p.

5 Safonov V.F., Tuiychiyev O.D. *Journal Differential equations*, 1997, 33, 9, p. 1199–1211.

6 Hartman F. *Ordinary differential equations*, Moscow: Mir, 1970, 720 p.

Репозиторий КарГУ