МАТЕМАТИКА

УДК 517.988.68+517.968.22

Определение диэлектрической проницаемости в околоскважинном пространстве

Definition permittivity in boreholes space

Ерденеева А.А.

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы (e-mail: er_aigul@mail.ru)

Мақалада ұңғыма жанындағы кеңістіктегі диэлектрлік өтімділікті анықтауға арналған электромагниттік шегеннің кері есебі қарастырылды. Катушка түріндегі зонд және айналмалы қабылдағышты қолданып, цилиндрлік-біртекті емес орта зерттелді. Оптимизациялық әдіс арқылы кері есепті шешудің дискретті аналогы жасалып, вертикалды-біртекті емес орта жағдайы сипатталды.

We consider the inverse problem of electromagnetic logging to determine the dielectric constant in the nearly chink space. We consider the cylindrically - a heterogeneous environment with the use of bobbin probe and the circular receiver. A discrete analogue of the optimization method for solving inverse problems. The case of vertically - a heterogeneous medium is considered.

Электромагнитный каротаж занимает важное место в общем комплексе геофизических методов исследования скважин. Наиболее исследованным как с практической, так и с математической точки зрения является случай периодически меняющихся во времени полей. Такие поля, создаваемые катушечными источниками малых размеров, используются как для определения проводимости (обычно на низких частотах), так и для нахождения диэлектрической проницаемости (на высоких частотах).

С появлением аппаратуры, способной регистрировать электромагнитное поле на очень коротких интервалах времени, несколько наносекунд (порядка 10^{-8} секунд), а также с развитием теории обратных задач изучение электромагнитных характеристик в околоскважинном пространстве становится актуальной задачей.

Идея электромагнитного каротажа состоит в следующем. Источник и приемник электромагнитного поля (зонд) помещают в скважину. Перемещая зонд вдоль скважины, измеряют электромагнитное поле и получают зависимость наблюдаемой величины от положения зонда относительно среды.

Количественные связи между наблюдаемым полем и электромагнитными характеристиками (электропроводность, диэлектрическая проницаемость) среды дают возможность определения свойств среды в околоскважинном пространстве.

Последнее представляет интерес при изучении нефтяных и газовых месторождений в проницаемых пластах (коллекторах). В силу избыточного давления фильтрат промывочной жидкости проникает в проницаемый пласт, в результате чего часть пластовой жидкости оттесняется и заменяется фильтратом промывочной. Это приводит к образованию зоны проникновения, электромагнитные свойства которой отличаются от свойств пласта и промывочной жидкости. Среда является неоднородной, и ее электропроводность и диэлектрическая проницаемость изменяются как вдоль скважины, так и в зависимости от расстояния до этой оси. Поэтому электромагнитное поле, возбуждаемое и измеряемое в скважине, содержит информацию не только о части среды, расположенной вокруг зонда, но и структуре исследуемого объема горных пород.

Каротажный зонд состоит из системы генераторных и приемных катушек, которые питаются переменным током заданной частоты. Будем считать, что ось скважины – прямая линия и ось катушки совпадает с этой линией. Тогда генераторная катушка моделируется осевым магнитным диполем. По принципу суперпозиции поле произвольной системы сторонних токов можно построить с помощью полей дипольных источников. Поэтому при решении прямой задачи в качестве источника возбуждения рассматриваем диполь, расположенный вдоль оси скважины.

На выходе приемных катушек измеряется э.д.с., которая зависит от тока генераторных катушек и распределения электромагнитного поля в окружающей среде. Считается, что поперечные размеры приемных катушек малы по сравнению с расстоянием до генераторных катушек. В осесимметричном случае изучение э.д.с на выходе прямой катушки эквивалентно изучению компоненты H_3 (координата x_3 направлена вдоль оси скважины) вектора магнитной напряженности H. Таким образом, в качестве генераторных катушек рассматривается магнитный диполь на оси скважины, а в качестве наблюдаемой величины – вертикальная компонента напряженности магнитного поля.

В качестве модели среды рассмотрим цилиндрически-слоистые среды, электромагнитные параметры которой зависят от расстояния до оси скважин координаты r — цилиндрической системы координат $\{r, \varphi, x_3\}$. Значения ε и σ считаем постоянными в каждом цилиндрическом слое, окружающем скважину, но они могут меняться от слоя к слою. Ось x_3 расположена по центру скважины и направлена вниз.

Процесс распространения электромагнитных волн в среде описывается системой уравнения Максвелла [1]

$$\begin{cases} rotH = \varepsilon \dfrac{\partial E}{\partial t} + \sigma E + j^{cm}, \\ rotE = -\mu \dfrac{\partial H}{\partial t}. \end{cases} \tag{1}$$

В качестве источника рассмотрим

$$j^{cm} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} g(x_1)\delta(x_3)\theta(t) = \gamma_2, \tag{2}$$

где $g(x_1)$; $\theta(t)$ — функции, описывающие распределение источника по переменным x_1, t соответственно.

Используя определения ротора, распишем систему уравнений Максвелла, окончательно получим систему из шести уравнений:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_1 + \sigma E_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} H_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} H_2;$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_2 + \sigma E_2 = -\frac{\partial}{\partial x_1} H_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} H_1 + \gamma_2;$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_3 + \sigma E_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} H_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} H_1;$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} H_1 = -\frac{\partial}{\partial x_2} E_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} E_2;$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} H_2 = -\frac{\partial}{\partial x_1} E_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} E_1;$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} H_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} E_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} E_1.$$

При наших предположениях в системе уравнений (1) ненулевыми останутся только три компоненты E_2, H_1, H_3, и при этом система будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t} E_2 + \dfrac{\partial}{\partial x_1} H_3 - \dfrac{\partial}{\partial x_3} H_1 + \sigma E_2 + g(x_1)\delta(x_3)\theta(t) = 0; \\ \mu \dfrac{\partial}{\partial t} H_1 - \dfrac{\partial}{\partial x_3} E_2 = 0; \\ \mu \dfrac{\partial}{\partial t} H_3 + \dfrac{\partial}{\partial x_1} E_2 = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

с начальными данными

$$E_2\big|_{t<0} = 0, \quad H_1\big|_{t<0} = 0, \quad H_3\big|_{t<0} = 0 \ldots \qquad (4)$$

Продифференцируем первое уравнение системы (3) по t, второе по x_3, третье по x_1 и, исключив компоненты H_1, H_3 из первого уравнения, используя две последние, получим:

$$\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_2 + \sigma \frac{\partial}{\partial t} E_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_1} E_2\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_3} E_2\right) + g(x_1)\delta(x_3)\theta'(t). \qquad (5)$$

Запишем уравнение (5) в цилиндрической системе координат, обозначив $\omega(r,\varphi,t) = E_2(x_1, x_3, t)$.

Перевод из декартовой системы координат в цилиндрическую осуществим по формулам

$$x_1 = r\cos\varphi; \quad x_2 = r\sin\varphi; \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Производные по переменным x_1, x_3 находятся по формулам

$$\frac{\partial E_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \omega}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1};$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \omega}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_3} + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}.$$

После проведения ряда преобразований, используя разложение поля E_2 в ряд Фурье по переменной x_3, получим:

$$E_\varphi = \frac{1}{2}\omega^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^k \cos\left(\frac{k\pi x_3}{A}\right), \qquad (6)$$

где

$$\omega^k(r,t) = \frac{1}{2}\int_0^A E_\varphi(r, x_3, t)\cos\left(\frac{k\pi x_3}{A}\right)dx_3, \quad k = 0,1,2,...$$

Таким образом, задачу (5) запишем в следующем виде:

$$\omega_{tt} - a\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\omega)}{\partial r}\right) + b\omega_t + d\omega + f = 0, \quad r \in (0, A), \quad t \in (0, T); \qquad (7)$$

$$\omega\big|_{t=0} = 0, \quad \omega\big|_{r=0} = 0, \quad \omega\big|_{r=A} = 0. \qquad (8)$$

Здесь $a(r) = \dfrac{1}{\varepsilon\mu}$; $b(r) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}$; $f(r,t) = \dfrac{1}{\varepsilon} p^k(r) g'(t)$; $d(r) = a(r)\left(\dfrac{\pi k}{A}\right)^2$; число A – максимальное расстояние, на которое может распространиться поле за время T от источника, сосредоточенного в области $|x_3| \le c_1$; $|r| \le c_1$; $A = \dfrac{T}{\sqrt{\varepsilon \min \mu}} T c_1$; $p^k(r)$ – коэффициент Фурье в разложении функции $g(x_1)\delta(x_3)$ в ряд, аналогичный (6).

Сформулируем постановку обратной задачи: определить $\varepsilon(r)$ при $r > r_0$ и $\omega(r,t)$ при $r > 0$, $t > 0$ из соотношений (7)-(8) по известной дополнительной информации

$$\omega(r_0,t)=q(t), \quad t>0, \tag{9}$$

при известных k, μ, $\sigma(r)$, $p^k(r)$, $q(t)$, $g_2(t)$ и $\varepsilon(r)$ при $r\le r_0$.

Решение обратной задачи находим оптимизационным методом [2]. Найти минимум функционала

$$J(\varepsilon)=\int_0^T\left[\omega(r_0,t;\varepsilon)-g_1(t)\right]^2 dt. \tag{10}$$

Для минимизации функционала (10) применим итерационный метод сопряженных градиентов. По некоторому заданному начальному приближению $\varepsilon_0(r)$ строится последовательность

$$\varepsilon_{n+1}(r)=\varepsilon_n(r)-\eta_n\chi_n(r), \tag{11}$$

где

$$\chi_0=\nabla J[\varepsilon_0], \quad \chi_n=\nabla J(\varepsilon_n)-\beta_n\chi_{n-1}, \quad n=1,2,...;$$

$$\beta_n=-\left\|\nabla J(\varepsilon_n)\right\|^2\Big/\left\|\nabla J(\varepsilon_{n-1})\right\|^2,$$

параметр η_n определяется из условий

$$\eta_n\le\frac{J(\varepsilon_n)}{\left\|\nabla J(\varepsilon_n)\right\|^2}; \quad J(\varepsilon_{n+1})\le J(\varepsilon_n).$$

Здесь $J^{'}$ – градиент функционала (10), он имеет вид

$$\nabla J(\varepsilon)(r)=\int_0^T\omega_{tt}(r,t)\psi(r,t)\,dt, \tag{12}$$

где $\psi(r,t)$ – решение следующей сопряженной задачи:

$$\varepsilon\psi_{tt}-\sigma\psi_t-\frac{r}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\psi\right)+\frac{\lambda^2}{\mu}\psi=0; \tag{13}$$

$$\psi\big|_{t=T}=0, \quad \psi_t\big|_{t=T}=0, \quad \psi\big|_{r=A}=0; \tag{14}$$

$$\psi_r\big|_{r=0}=2\left[\omega(r_0,t)-q(t)\right], \quad r\in(0,A), \quad t\in(0,T), \quad \lambda=\frac{k\pi}{A}. \tag{15}$$

Перейдем к описанию дискретного аналога оптимизационного метода по определению коэффициента $\varepsilon(r)$.

Пусть p_i – приближенное решение обратной задачи. Рассмотрим сеточную область $\Omega=\{(h_i,\tau k), \ i=0,N, \ k=0,2N\}$. Аппроксимируем задачу (7)-(8) разностной схемой

$$y_{\bar{t}t}+by_t+dy-a\left(\frac{1}{r}(ry)_{\bar r}\right)_r+f_i^k=0, \quad i=1,N, \quad k=\overline{2,2N}=M; \tag{16}$$

$$y_i^0=0, \quad y_0^k=0, \quad y_N^k=0, \quad y_0^k=y_1^k. \tag{17}$$

Пусть относительно решения прямой разностной задачи (16)-(17) известно дополнительная информация

$$y_0^k=q^k, \quad k=\overline{1,M}. \tag{18}$$

Рассмотрим дискретный аналог функционала

$$J[p]=\tau\sum_{k=1}^{M}\left[y_0^k\{p_i\}-q^k\right]^2. \tag{19}$$

Проводя аналогичные рассуждения, как в работах [3, 4], получим дискретный аналог градиента функционала (19), который примет вид

$$\nabla_h J[p]=\sigma\sum_{k=2}^{M}y_{\bar{t}t}\varphi^{k-1}+\left(y_i^{'}-y_i^0\right)\cdot\varphi^1. \tag{20}$$

Здесь φ_i^k есть решение следующей сопряженной задачи:

$$\varphi_{\bar{t}t} - b\varphi_t - ar\left(\frac{1}{r}\varphi_{\bar{r}}\right)_r + d\varphi = 0; \quad (21)$$

$$\varphi\big|_{t=T} = 0, \quad \varphi_t\big|_{t=T} = 0, \quad \varphi\big|_{r=A} = 0; \quad (22)$$

$$\varphi_r\big|_{r=0} = 2\left[y_0^k - f^k\right]. \quad (23)$$

Таким образом, итерационный метод решения обратной задачи можно осуществить по следующей схеме:

1. Задаем начальное приближение p_i^0.
2. Решая прямую задачу (16)-(17), находим $y^{(0)}\{r_i, t_k; p_i^{(0)}\}$.
3. Вычислив краевое условие (23), решая сопряженную задачу (21)-(23), находим $\varphi^{(0)}\{r_i, t_k; p_i^{(0)}\}$.
4. По формуле (20) вычисляем градиент $\nabla_h J\left[p_i^{(0)}\right]$.
5. По формуле (11) находим очередное приближение $p_i^{(n+1)}$.
6. Проверяем значение функционала (19); если он достигнут, то задача решена, если нет, то повторяем новое приближение по перечисленным шагам 1-6.

References

1. *Romanov V.G., Kabanikhin S.I.* Inverse GeOELeCTRiCS. — M.: Sciense, 1991. — 304 p.
2. *Samarskii A.A.* Theory of difference schemes. — M.: Sciense, 1997. — 656 p.
3. *Iskakov K.T., Oralbekova J.O.* Discrete analog of the optimization method for solving the inverse problem for the parabolic kinetic equation // Vestnik Karaganda Univ. Ser. Mathematics. — № 2 (58). — 2010.
4. *Yerdeneyeva A.A., Tyulepberdinova G.A.* Discrete analog of the optimization method for inverse problem of electrodynamicsomy in the quasistationary approximation // Vestnik Karaganda Univ. Ser. Mathematics. — № 2 (58) — 2010.

УДК 517.95

О спектральных вопросах и разрешимости одного особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода

About spectrum questions and about the solvability of one singular integral equation of Volterra of the second kind

Есбаев А.Н.[1], Рамазанов М.И.[2]

[1]*ИПК «Международная профильная академия «Туран-Профи», Астана;*
[2] *Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова*

Мақалада Меллин түрлендіру әдісімен Вольтеррдің екінші текті интегралдық теңдеуі зерттелген. Сәйкес келетін интегралдық операторының ядросына белгілі шарттар қойылған. Берілген теңдеудің шешілгіштік шарттарымен спектрі табыған.

In the given article the integral equation of Volterra of second kind with the given conditions, some properties of kernel of this equation, the spectrum and also the solution of study equation with the application of integral transformation of Mellin have been investigated.

Теория интегральных уравнений имеет широкую область применения и лежит в основании многих разделов теоретической и особенно прикладной науки. Вид интегрального уравнения тесно свя-