СЕМАНТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ПОЛИНОМИАЛЬНО ВЫЧИСЛИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Нечёсов А.В.
Институт математики им. Соболева, Новосибирск, Россия
Email: Nechesov@math.ncs.ru

В докладе рассматриваются вопросы существования полиномиально вычислимых представлений для базовых синтаксических конструкций логики предикатов первого порядка (ИП), а также для объектов семантического программирования (СП). Было показано, что для множества доказательств (как линейных, так и в виде дерева) в ИП, а также для множества L-формул и L-программ в СП существуют полиномиально вычислимые представления. Данные результаты могут быть полезны в высокоуровневых языках программирования, в искусственном интеллекте и робототехнике. Там, где требуется быстрый и четкий программный ответ на входящие данные.

Список используемой литературы:

1. Нечесов А. Некоторые вопросы полиномиально вычислимых представлений для порождающих грамматик и форм Бэкуса-Наура. Математические труды**2022**, Т.25, №1, С.134-151. *https://doi.org/10.33048/mattrudy.2022.25.106*
2. Goncharov, S.; Nechesov, A. Polynomial Analogue of Gandy's Fixed Point Theorem. Mathematics**2021**, 9, 2102. *https://doi.org/10.3390/math9172102*
3. Goncharov, S.; Nechesov, A. Solution of the Problem P = L. Mathematics**2022**, *10*, 113. *https://doi.org/10.3390/math10010113*
4. Goncharov, S. Conditional terms in semantic programming. Sib Math J***2017***, *58*, *794-800*https://doi.org/10.1134/S0037446617050068
5. Goncharov, S.; Sviridenko, D. Sigma-programming. American Mathematical Society, **1989**, 142, 101-121

КРИТЕРИЙ ВЫЧИСЛИМОСТИ P_ω-РАЗЛОЖИМОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

Хисамиев Н.Г. *, Тусупов Д.А. *, Тыныбекова С.Д.
Евразийсий национальный университет им. Л.Гумилева
E-mail: hisamiev@mail.ru, tussupov@mail.ru

Оба автора поддержаны грантом МОН РК AP08855497«Теоретико-модельные и алгоритмические свойства алгебраических структур»

Пусть группа

$$A = \{A_i | A_i \leq \langle Q, +, 0 \rangle, i \in \omega \},\qquad (1)$$

где $\langle Q, +, 0 \rangle$ - аддитивная группа множества всех рациональных чисел. Для любого элемента $a \in A \setminus \{0\}$введем следующие множества простых чисел, положив:

$$P_{<\omega}(a) \leftrightharpoons \left\{p \;\middle|\; A \vDash \exists \mathrm{n}(p) \exists a_{p,n(p)} \left(\left(p^{n(p)} a_{p,n(p)} = a\right) \& \;\; \forall\, x\, (p^{n(p)+1}\, x \neq a)\right)\right\},\qquad (2)$$

$$P_\omega(a) = \left\{p \;\middle|\; A \vDash \forall\, n\; \exists a_{p,n}\left(p^n a_{p,n} = a\right)\right\}.\qquad (3)$$

Пусть для любого элемента$a_i \in A_i \setminus \{o\}$ справедливы следующие условия:

a_1) множество $P_{<\omega}(a_i)$ конечно; (4)

a_2) *существует натуральное число N такое, что справедливы*:

a_{21}) мощность множества $P_\omega(a_i)$более N, (5)

α_{22}) для любых i, j, i$\neq j$ мощность множества $P_\omega(a_i) \cap P_\omega(a_j)$ (6)

не более N, где $a_i \in A_i \setminus \{o\}, a_j \in A_j \setminus \{o\}$.

Тогда группу A назовем $\langle P_\omega, N\rangle$ - разложимой.

Пусть на множестве $\omega = \{0,1,2,\dots\}$ определен предикат $D(i,p,n,x)$, i, n, x∈ω, p∈P, где P – множество всех простых чисел, удовлетворяющее следующим условиям:

$$1. \forall i\ \forall p\ \forall n\ \forall x_0 \forall x, \big((D(i,p,n,x_0) \& D(i,p,n,x_1)) \to x_0 = x_1\big). \quad (7)$$

$$2. \forall i\ \forall p\ \forall n\ \forall m\ \exists x_{i,p,n} \Big(\big(D(i,p,n,x_{i,p,n}) \& m < n\big) \to \exists x_{i,p,m(i,p)} D\big(i,p,m,x_{i,p,m(i.p)}\big)\Big). \quad (8)$$

Введем следующие множества, положив:

$$P_\omega(i) \leftrightharpoons \{P \mid \forall n\, \exists\, x_{i,p,n}\, D\big(i,p,n,x_{i,p,n}\big)\}, \quad (9)$$

$$P_{<\omega}(i) \leftrightharpoons \{\mathrm{p} \mid \exists \mathrm{n(i,p)}\ \exists\ \mathrm{x\_(i,p,n(i,p))}\ \ (\mathrm{n\_(i,p)} \geq 0\ \&\ \mathrm{D(i,p,n(i,p,n(i,p)),x\_(i,p,n(i,p)))}\ \&\ \forall \mathrm{x} \neg \mathrm{D(i,p,n(i,p)+1,x)})\ \}. \quad (10)$$

Пусть для этих множеств справедливы следующе условия:

α_1) *для любого* $i \in \omega$множества $P_{<\omega}(i)$ конечно;

α_2) существует такое число N∈ω, что справедливы:

α_{21}) для любых i, j $\in \omega$, $i \neq j$ мощность множества $P_\omega(i) \cap P_\omega(j)$не более N;

α_{22}) *для любого числа* i $\in \omega$ мощность множества $P_\omega(i)$ более числа N.

Тогда предикат D назовем$<p_\omega, N>$ - предикатом.

По $<p_\omega, N>$ - предикату $D(i,p,n,x)$ определим следующие группы, положив :

$$B_{i,p} \leftrightharpoons qr\,\langle\Big\{\frac{i}{p^n} \mid \exists x\ \mathrm{D(i,p,n,x)}, n, x \in \omega\Big\}, +, 0\,\rangle, \quad (11)$$

$$B_i \leftrightharpoons qr\{B_{i,p} \mid p \in P\}. \quad (12)$$

Лемма 1. Пусть группа A, определенная равенством (1), $<P_\omega, N>$ разложима. Тогда для любого i существует такой элемент $a_{i,\omega}$, что для любого простого числа p∈P справедлива эквивалентность:

$$p \in P_\omega(a_i) \Leftrightarrow \exists x\big(px = a_{i,\omega}\big), \quad (13)$$

где множество $P_\omega(a_i)$ определено равенством (3).

Доказательство. Пусть группа A, определенная равенством (1), $<p_\omega, N>$разложима. Тогда для элемента $a_i \in A_i \setminus \{o\}$ множество $P_{<\omega}(a_i)$ определено равенством (2), конечно. Пусть

$$P_{<\omega}(a_i) = \{p(i,0), \dots, p(i,m(i)-1)\}, \quad (14)$$

где $p(i,j)$- простые числа, $j < m(i)$. Отсюда и формулы (2) следует, что для любого $k < m(i)$существует число n(i, p(i,k)) такое, что истинна формула

$$\Big(\exists \mathrm{x(\ i,p(i,k),n(i,p(i,k)))}\big(\mathrm{p(i,k)^{n(i,p(i,k)}x(i,p(i,k),n(i,p(i,k)))}\big) = \mathrm{a_i}\ \&\ \forall \mathrm{x} \neg\big(\mathrm{p(i,k)^{n(i,p(i,k)+1}x = a_i}\big)\Big) \quad (15)$$

Отсюда и из (14) следует, что для любого $k < m(i)$существует элемент

$$a_{i,p(i,k)n(i,p(i,k))} = \frac{a_i}{p(i,k)^{n(i,p(i,k))}} \quad (16)$$

и не существует элемент x такой, что

$$p(i,k)^{n(i,p(i,k))+1}x = a_i \tag{17}$$

Пусть

$$\mathrm{r}(i) = p(i,0)^{n(i,p(i,0))} \dots p(i,m(i)-1)^{n(i,p(i,m(i)-1))}. \tag{18}$$

Отсюда и взаимной простоты чисел множества $P_{<\omega}(a_i)$, определенного равенством (14), следует, что существует элемент

$$a_{i,\omega} = \frac{a_i}{r(i)} \tag{19}$$

подгруппы A_i. Тогда для любого простого числа p справедлива эквивалентность (13). Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть для элемента $a_i \in A_i \setminus \{o\}$ и множества $P_\omega(a_i)$, определенное равенством (3), где $a = a_i$, справедливо равенство

$$P_\omega(a_i) = \emptyset.$$

Тогда группа A_i изоморфна циклической группе, порожденной элементом $a_{i,\omega}$, определенное равенством (19).

По $<p_\omega, N>$ - предикату $D(i,p,n,x)$, определенный условиями $\alpha_1), \alpha_2)$, введем следующие множества и группы, положив:

$$P_\omega(i) = \{p \mid \forall n\, \exists x_{i,p,n} D(i,p,n,x_{i,p,n})\}, \tag{20}$$

$$A_i(\leq N) = qr\left\{\frac{i}{p^n} \mid p \in P_\omega(i),\ \lceil P_\omega(i) \rceil \leq N\right\}, \tag{21}$$

$$A_i(> N) = qr\left\{\frac{i}{p^n} \mid p \in P_\omega(i),\ \lceil P_\omega(i) \rceil > N\right\}, \tag{22}$$

$$A(\leq N) \leftrightharpoons \bigoplus \{A_i(\leq N) \mid i \in \omega\}, \tag{23}$$

$$A(> N) \leftrightharpoons \bigoplus \{A_i(> N) \mid i \in \omega\}. \tag{24}$$

Теорема 1. Пусть абелева группа А, определенная равенством (1), $<p_\omega, N>$ - разложима. Тогда она вычислима, если и только если существует вычислимый $<p_\omega, N>$ - предикат D(i,p,n,x) такой, что группа А изоморфна группе $A(> N)$, определенной равенствами (20), (22), (24), где $p \in P$, $i, n, x \in \omega$, P – множество всех простых чисел, ω − множество всех натуральных чисел.

Из теоремы 1, где группа $A = \bigoplus \{A_{p(i)} \mid i \in \omega\}$ и $A_{p(i)}$ – аддитивная группа рациональных чисел, знаменателями которых являются степенями некоторого простого числа $p(i)$, и N=1, следует теорема, доказанная в [3].

Список использованной литературы

1. Мальцев А.И. О рекурсивных абелевых группах // Доклады АН СССР. 1962. Т 146, №5. С.1009-1012.

2. Khisssamiev N.G. Constructive abelian groups // Studies in Logic and the Foundation of Mathematics. Elsevier, 1998. V.139. P. 1177-1231.

3. Downey, R., Goncharov, S., Kach, A.M., Knight, J., Kudinov, O., Melnikov, A.G., Turetsky, D. Decidability and Computability of Certain Torsion-Free Abelian Groups // Notre Dame J. Formal Log. 2010. V. 51, C. 85-96.