УДК 517.9 (574)

М.С. Айтенова[1], Г.Ш. Искакова[2], К.К. Фазылов[3]

[1] *Карагандинский экономический университет Казпотребсоюза, Казахстан;*
[2] *Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова, Казахстан;*
[3] *Региональный культурно-образовательный центр, Морден, Канада*
(E-mail: abibekove@mail.ru)

Об оценке сверху функции распределения

При изучении эллиптических операторов возникает необходимость исследования вложения весовых пространств Соболева в пространство Лебега. Существует ряд численных характеристик для данных вложений, одной из которых являются аппроксимативные числа. В статье доказана оценка сверху функции распределения аппроксимативных чисел вложения весового пространства Соболева в пространство Лебега. Рассмотрены основные определения, связанные с понятием функции распределения аппроксимативных чисел, и для этой функции показаны оценки соответствующего оператора вложения. Данный результат может быть применен в исследовании спектральных свойств самосопряженных дифференциальных операторов.

Ключевые слова: аппроксимативные числа, функция распределения, характеристический размер, пространство Соболева, пространство Лебега, открытые кубы, весовая функция.

Введение

В работе дается оценка сверху функции распределения аппроксимативных чисел вложения пространства $W_p^l(v)$ в L_p.

Приведем основные определения и обозначения. Через $W_p^l(v)$ будем обозначать пополнение $C_\infty^0(R^n)$ бесконечно дифференцируемых финитных функций в R^n с заданной следующей нормой:

$$\|u\|_{W_p^l(v)} = \left(\int |\nabla_l u|^p v + \int |u|^p v\right)^{1/p}. \tag{1}$$

Здесь v — почти всюду положительная функция из $L(loc) = L_1(loc)$; $v^{1-p'} \in L(loc)$; $p' = \frac{p}{p-1}$; $1 < p < \infty, l > n$

$$|\nabla_l u| = \left(\sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2\right)^{1/2} \quad ; \quad D^\alpha u = \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

$L_p, L_p(loc)$ — лебегово пространство функций $L_p(R^n)$ с нормой

$$\|u\|_p = \left(\int |u|^p dt\right)^{1/p}. \tag{2}$$

R^n — n-мерное вещественное евклидово пространство.

Пусть $L(X,Y)$ — пространство линейных непрерывных операторов, действующих из банахового пространства X в банахово пространство Y.

N — аппроксимативным числом оператора $A \in L(X,Y)$ называют следующее число:

$$a_N(A) = inf_K \left\| A - K \right\|,$$

где inf берется по совокупности всех конечномерных операторов $K \in L(X,Y)$ размерности $\leq N$. Здесь $a_0(A)$ — норма оператора А.

Рассмотрим пространства X, Y с соответствующими нормами $\|\bullet\|_X,\ \|\bullet\|_Y$. Говорят, что X вложено в Y (запись $X \to Y$), если $X \subset Y$ и существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

При этом ограниченный оператор $E : X \to Y$, где $Ex = x$, называют оператором вложения.

Основной результат

Пусть $E:\ W_p^l(v) \to L_p$ – оператор вложения пространства $W_p^l(v)$ в L_p.

Положим $N(\lambda,\ E) = \sum_{a_k(E)>\lambda} 1, (\lambda > 0)$, где $N(\lambda,\ E)$ есть функция распределения аппроксимативных чисел $a_k(E)$. Через I^n будем обозначать совокупность открытых кубов вида

$$Q = Q_d = Q_d(x) = \left\{ y \in R^n:\ |y_i - x_i| < \frac{d}{2},\ \ i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Пусть $|E|$ – лебегова мера $E \subset R^n$. Неотрицательную функцию $v \in L(loc)$ называют весом.

Вес v на R^n удовлетворяет условию A_∞ (запись $v \in A_\infty$), если существуют такие $\delta, \tau \in (0,1)$, что для всех $Q \in I^n$ выполняется неравенство $\int\limits_e v \leq \tau \int Qv$, как только $e \subset Q, |e| \leq \delta |Q|$.

Пусть

$$d(x,v) = sup_{d>0} \left\{ d:\ M_{p,l}(x, d|v) \leq 1 \right\}, \tag{3}$$

где

$$M_{p,l}(x, d|v) = d^{l-n} \left(\int_{Q_d(x)} v^{1-p'} \right)^{1/p'} \left(\int_{Q_d(x)} v \right)^{1/p} \tag{4}$$

и

$$K(x,d) = d^{l-n/p'} \left(\int_{Q_d(x)} v^{1-p'} \right)^{1/p'}. \tag{5}$$

Применяя неравенство Гельдера, получим

$$M_{p,l}(x, d|v) = d^{l-n} \left(\int_Q v^{1-p'} \right)^{1/p'} \left(\int_Q v \right)^{1/p} \geq d^l.$$

Отсюда справедливо

$$1 = \ sup_{d>0} \left\{ d:\ d^l \leq 1 \right\} \geq sup_{d>0} \left\{ d:\ M_{p,l}(x, d|v) \leq 1 \right\} = d(x,v).$$

В дальнейшим через $Q(x)$ будет обозначаться куб $Q_d(x)$ при

$$d = d(x, v).$$

Будем считать, что весовая пара (v,v) на R^n удовлетворяет условию $\Pi_{p,l}$ относительно функции (запись $(v,v) \in \Pi_{p,l}$), если существует положительная функция $d(x)$ на R^n такая, что для $x: M_{p,l}(x, d|v) \geq 1$. Рассмотрим λ-характеристический размер $S(\lambda, x)$, определенный для $\forall \lambda > 0$ и $x \in R^n$ следующим равенством:

$$S(\lambda, x) = \sup_{d>0} \left\{ d : K(x,d) \leq \lambda \right\}. \tag{6}$$

Для дальнейшего вычисления нам нужны будут следующие леммы.

Лемма 1. Справедливы утверждения:

а) Пусть $0 < d\,(x,v) < \infty,\ 0 < c < 1,\ 0 < c_1 \le 1-c$. Тогда $c_1 d\,(x,v) \le d\,(t,v)$ для $t \in cQ(x)$.

b) Пусть $0 < S(\lambda,x) < \infty,\ 0 < c < 1,\quad c_1 = (1+c)^{n-l}$. Тогда $S\,(c_1\lambda,t) \le (1+c)\,S\,(\lambda,x)$ для $t \in cQ_d\,(x)\,,\ d = S\,(\lambda,x)$.

Доказательство.

а) Положим $\tilde d = d\,(x,v)$ и $d = (1-c)\,\tilde d$. Тогда куб $Q_d\,(t) \subset \widetilde{Q}$ для любого $t \in c\widetilde{Q} = cQ_{\tilde d}\,(x)\,.$

Из этих равенств и формулы (4) справедливо, что:

$$M_{p,l}\,(x,d|v) = d^{l-n}\left(\int_{Q_d(t)} v^{1-p'}\right)^{1/p'}\left(\int_{Q_d(t)} v\right)^{1/p} \le$$

$$\le (1-c)^{l-n}\tilde d^{l-n}\left(\int_{\widetilde{Q}} v^{1-p'}\right)^{1/p'}\left(\int_{\widetilde{Q}} v\right)^{1/p} \le (1-c)^{l-n} M_{p,l}\left(x,\tilde d|v\right) \le 1.$$

Отсюда имеем, что $d\,(t,v) \ge d = (1-c)\,\tilde d = c_1 d\,(x,v)\,.$

b) Пусть $d^* = S\,(\lambda,x)$ и $Q^* = Q_{d^*}$. Тогда куб $Q_d\,(t) \supset Q^*$для любого $t \in cQ^*$и при всех $d \ge (1+c)\,d^*$. Следовательно, из формул (5), (6) и из сказанного выше имеем

$$(K(x,d))^{p'} = d^{lp'-n}\int\limits_{Q_d(t)} v^{1-p'} \ge \left(\frac{d}{d^*}\right)^{lp'-n}(K(x,d^*))^{p'} >$$

$$> (1+c)^{lp'-n}\lambda^{p'} = (c_1\lambda)^{p'}.$$

Откуда следует требуемая оценка $S\,(c_1\lambda,t) \le (1+c)\,S\,(\lambda,x)$.

Лемма 2. Пусть весовая функция $v \in A_\infty$, $M_{p,l}\,(x,d|v) \ge 1, Q = Q_d = Q_d\,(x)$. Тогда справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_p(Q)} \le cK\,(x,d)\left(\int_Q |\nabla_l u|^p v + \int_Q |u|^p v\right)^{\frac{1}{p}},\ u \in C_0^\infty(Q_d), \tag{7}$$

где $c > 0$ не зависит от x и d.

Доказательство леммы 2 приведено в [1]. Пусть $v \in \Pi_{p,l}$. Введем следующие множества $\Omega_\lambda, \Omega^\lambda$:

$$\Omega_\lambda = \{x : S(\lambda,x) < d(x,v)\}\,, \Omega^\lambda = \{x : S(\lambda,x) \ge d(x,v)\}\,.$$

Рассмотрим вспомогательную теорему:

Теорема 1. Существует постоянная $c_0 \ge 1$ такая, что при всех $c \ge c_0$ справедлива оценка

$$N\,(\lambda,\ E) \le c\int_{\Omega_{c,\lambda}} \frac{dt}{S^n\,(c^{-1}\lambda,t)}, \tag{8}$$

где $\Omega_{c,\lambda} = \left\{x : S\left(c^{-1}\lambda,t\right) \le cd(t,v)\right\}$.

Доказательство теоремы вытекает из леммы 1 (см. [2]).

Теорема 2. Пусть $v \in A_\infty$ и удовлетворяет следующим условиям:

1. Существует $L < \infty$ такое, что для любого $Q \in I^n$ справедливо

$$\frac{1}{Q}\int_Q v^{1-p'} \le L < \infty.$$

2. Для любого $R > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\frac{1}{Q}\int_Q v^{1-p'} < \varepsilon,$$

как только $Q \subset R^n \backslash Q_R\,(0)\,$. Тогда существует постоянная $c_0 \ge 1$ такая, что при всех $c \ge c_0$ справедлива оценка

$$N\,(\lambda,E) \le c\lambda^{-\frac{n}{l}}\left|\{x : K\,(x,cd\,(x,v)) > \lambda\}\right|. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть v удовлетворяет условию (1). Тогда для $Q = Q_d(x)$ и из формулы (5) имеем

$$K\left(x,d\right)=d^{l-n/p'}\left(\int_{Q_d(x)}v^{1-p'}\right)^{1/p'}\leq\ Ld^l,$$

откуда следует оценка

$$S\left(\lambda,x\right)=\sup_{d>0}\left\{d:K\left(x,d\right)\leq\lambda\right\}\ \geq\sup_{d>0}\left\{d:Ld^l\leq\lambda\right\}\ =\left(L^{-1}\lambda\right)^{\frac{1}{l}}. \tag{10}$$

В силу определения (6) для любого числа $c_1 > c$ имеем

$$\Omega_{\lambda\ ,c}=\left\{x:S\left(c^{-1}\lambda,x\right)\leq cd(x,v)\right\}\subset\left\{x:K\left(x,c_1d(x,v)\right)>\lambda\right\}. \tag{11}$$

Учитывая (10) и (11), из теоремы 1 выводим требуемую оценку

$$N\left(\lambda,\ E\right)\leq c\int_{\Omega_{c,\lambda}}\ S^{-n}\left(c^{-1}\lambda,t\right)dt\leq c\big(L^{-1}\lambda\big)^{-\frac{n}{l}}\left|\Omega_{\lambda\ ,c}\right|=c_2\lambda^{-\frac{n}{l}}\left|\left\{x:K\left(x,c_1d\left(x,v\right)\right)>\lambda\right\}\right|,$$

где $c_2 = cL^{n/l}$.

Список литературы

1 Кусаинова Л.Г. Весовые неравенства вложений / Л.Г. Кусаинова // Доклады МН АН РК. — 1998. — № 6. — С. 23–32.

2 Лизоркин П.И. Оценки аппроксимативных чисел оператора вложения для пространств соболевского типа с весами / П.И. Лизоркин, М.О. Отелбаев // Труды Математического института АН СССР. — Т. 170. — 1984. — С. 213–232.

М.С. Айтенова, Г.Ш. Искакова, К.К. Фазылов

Тарату функциясын жоғарыдан бағалау туралы

Эллипстік операторларды зерттегенде салмақты Соболев кеңістігін Лебег кеңістігіне енгізуді зерттеу қажет. Бұл енгізуді алу үшін бірқатар сандық сипаттамалар бар, солардың бірі — жуықтау сандары. Мақалада салмақты Соболев кеңістігін Лебег кеңістігіне енгізудің жуықтау сандарының тарату функциясын жоғарыдан бағалауы дәлелденген. Жуықтау сандарының тарату функциясы түсініктерімен байланысты негізгі анықтамалар және осы функциялар үшін сәйкес енгізу операторының бағалауы көрсетілген. Алынған нәтижені өзіне-өзі түйіндес дифференциалдық операторлардың спектрлік қасиеттерін зерттеуде қолдану мүмкін.

Кілт сөздер: жуықтау сандар, тарату функциясы, сипаттамалық мөлшер, Соболев кеңістігі, Лебег кеңістігі, ашық кубтар, салмақты функция.

M.S. Aitenova, G.Sh. Iskakova, K.K. Fazylov

About upper bound of the distribution function

It is necessary to study Sobolev's weighting space embedding into the Lebesgue space in the research of the elliptic operators. There exist a number of numerical characteristics for such embeddings. Approximate numbers are one of them. An upper bound of the distribution function of the approximate numbers of Sobolev's weighting space into the Lebesgue space is proved in this paper. Basic definitions related to notion of the distribution function of the approximate numbers are considered by us. Estimates of the appropriate embedding operator are obtained for this function. The result obtained can be employed in the study of the spectral properties of self-adjoint differential operators.

Keywords: approximate numbers, distribution function, characteristic size, Sobolev's space, Lebesg's space, open cubes, weighting function.

References

1 Kusainova, L.G. (1998). Vesovye neravenstva vlozhenii [Weighted investment inequalities]. *Doklady MN AN RK — Reports of the Ministry of Education of the Republic of Kazakhstan, 6,* 23–32 [in Russian].

2 Lizorkin, P.I. & Otelbaev, M.O. (1984). Otsenki approksimativnyh chisel operatora vlozheniia dlia prostranstv sobolevskoho tipa s vesami [Estimates of the approximative numbers of the embedding operator for spaces of Sobolev type with weights]. *Trudy Matematicheskoho Instituta Akademii Nauk SSSR — Proceedings of the Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the USSR, 170,* 213–232 [in Russian].