

Список литературы

1. Жанбусинова Б.Х. О периодическом решении счетной системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка // Вестн. КарГУ. Сер. Математика. — 2004. — № 1. — С. 36–39.
2. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. — Киев: Вища шк., 1976.

ӘОЖ 517.2

Қ.Жетпісов

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті

**АЛГЕБРАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДЕГІ КОНГРУЭНЦИЯ ҚАТЫНАСЫ
ЖӘНЕ ОНЫ ОҚЫП-ЗЕРТТЕУДІҢ ӘДІСТЕМЕЛІК ТҮРҒЫЛАРЫ**

В данной статье изучается связь между отношением конгруэнции, определенной в данной алгебраической системе, и некоторой ее подсистемой. Предлагается методологический подход к изучению данной связи для исследования алгебраической системы. Отношение конгруэнции рассматривается с позиции выявления свойств алгебраических систем.

In this article we study relationship between the relation of congruence, defined in a given algebraic system, and some its subsystem. We propose methodological approach to studying of given relationship for research of an algebraic system. The relation of congruence is considered from the position of exposure of properties of algebraic systems.

1. Конгруэнция туралы теоремалар

Алгебралық жүйелер өзінің негізгі құраушыларын бір-бірімен өте табиғи біріктіреді, сол себепті ол математикалық объектілерді кескіндеудің әмбебап түрі. Бұл әмбебаптылық көптеген математикалық объектілер түрінде, белгілі бір деңгейде, нақты заттардың шынайы бейнесін осы заттарға тән функция мен қатынас, қасиеттер мен тәуелділіктер түрінде беруге болатындығын көрсетеді. Алгебралық құрылымдар туралы көзқарас ұзақ тарихи даму процесінде қалыптасқан.

Сандарға амалдар қолдану мен олардың қарапайым қасиеттерін ұғыну арқылы сандық жүйелердің құрылымдық қасиеттері туралы алғашқы көзқарас қалыптасты. Соңында табиғатты сандық емес объектілерге көшу, классикалық құрылымдар: группалар, сақиналар, өрістер, векторлық кеңістіктер. Бұл құрылымдардың абстрактілі берілуі жалпы концепцияның қалыптасуына, сонымен қатар қазіргі заманғы формаль аксиомалық теориялар әдісінің қалыптасуына көмегін тигізді.

Теоретикалық-философиялық тұрғыдан алғанда құрылым деп «объектінің өз-өзіне қатысты бүтіндігі мен теңбе-теңдігін қанағаттандыратын оның орнықты байланыстар жиынтығын» түсінеміз, яғни әр түрлі сыртқы және ішкі өзгерістерде негізгі қасиеттері сақталады. Сыртқы және ішкі өзгерістерге қатысты орнықтылық туралы көзқарас математикалық құрылымдарды изоморфизмге дейінгі дәлдікпен оқып-зерттеу концепциясында өз орнын тапты.

Академик А.Н.Колмогоров бұл концепцияны келесі түрде тұжырымдаған [1]: «Математиканың арнайы бөлімдері белгілі бір текті құрылымдарға тиісті құрылымдармен айналысады. Құрылымдардың әрбір тегі сәйкес жиындар теориясының тілінде өрнектелген аксиомалар жүйесімен анықталады. Математикті тек қана құрылымның қабылданған аксиомалар жүйесінен алынатын қасиеттері қызықтырады, яғни ол құрылымдарды изоморфизмге дейінгі дәлдікпен оқып-зерттейді».

Математиканы құруды құрылымдық түрде қарау идеясы жиындар теориясы, абстрактілі алгебра, топология, математикалық логика және басқа да ғылымдардың қарқынды дамуы арқасында іске асты. Математикалық білімді құрылымдық жүйелеуде Н.Бурбаки деген жалған атпен белгілі француз математиктер тобының қосқан үлесі өте зор. Олар өздерінің жүйелеуінің негізіне формаль аксиомалық теориялар әдісін қойды және негізгі математикалық құрылым ретінде алгебралық, топологиялық және реттік құрылымдарды бөліп алды. Сонымен, қазіргі заманғы математика әдістемесі мен оның қол-

дану мәдениетінің қалыптасуын түсіну үшін формаль аксиомалық теориялар әдісі мен математикалық құрылымдарды оқып-зерттеуді игеру қажет.

«Алгебралық жүйелер» ұғымы мен алгебралық жүйелерді изоморфизмге дейінгі дәлдікпен оқып-зерттеу концепциясы «жиын», «жиындардың декарттық көбейтіндісі», «сәйкестік», «бейнелеу», «сәйкестіктің анықталу облысы», «бинарлық алгебралық амал» және тағы басқа фундаменталды математикалық ұғымдарды терең білуді талап етеді.

Жоғарыда келтірілген ұғымдардың көпшілігі бізге мектеп курсындағы математикадан таныс, бірақ олардың мектептегі тұжырымдалуы жоғарғы мектептегі математиканы оқып-үйренуге жарамды бола бермейді. Мектеп бағдарламасындағы математикада функциялар мен олардың графиктерін оқып-зерттеуге жарамды бола бермейді. Мектеп бағдарламасындағы математикада функциялар мен олардың графиктерін оқып-зерттеуге біршама көп уақыт бөлінетіндігіне қарамастан, көптеген мектеп бітірушілер «жиындардың декарттық көбейтіндісі», «сәйкестік», «бейнелеудің анықталу облысы» мен «мәндер облысы» сияқты ұғымдарды жете түсіне бермейді. Бейнелеудің түрлерін шатастырады. Бинарлық қатынастардың (теңдік, параллельдік, перпендикулярлық, теңшамалық, ұқсастық, бөлінгіштік, тиісті болу, қамтылу және тағы басқа) мысалдармен мектепке үнемі кездесетіндеріне қарамастан, олар осы қатынастың қарапайым қасиеттерін атап көрсетіп, оларды сәйкес таңбалық тілде жаза білмейді.

Мектеп курсындағы математикада оқушы күрделі және кері функцияларды оқып-үйрену барысында бейнелеулерге қолданылатын амалдардың мән-мағынасына көңіл аудармайды.

Жоғары оқу орындарындағы математиканы оқып-үйрену мәселесіне қатысты байқайтынымыз, жоғары оқу орындарындағы математикалық пәндер дәстүрлі түрде үш негізгі пәндердің айналасында шоғырланған, олар: математикалық талдау, жоғарғы алгебра және аналитикалық геометрия. Осы пәндердің қалыптасуы мен дамуы барысында олардың методологиясы, таңбалаулары, алғашқы ұғымдар мен қатынастар жүйесі қалыптасты. Бұл ерекшеліктер форма түрінде олардың мазмұнына әсер етті. Алгебра, модель, алгебралық жүйе, изоморфизм және гомоморфизм қатынастары сияқты математикалық ұғымдар мен қатынастар, осыған байланысты негізгі пәндерді дәстүрлі түрде баяндауда өзіне жақын пәндердің формасына және біртіндеп енгізілуіне өз іздерін қалдырды. Көрсетілген ұғымдар қажетінше берілген топтағы пәндер шекарасында енгізіледі, қолданылады және осы пәндердің барлық шарттарын қанағаттандырады. Көпшілік жағдайда бұл ұғымдардың тұжырымдалуы басқа топтағы негізгі пәндердің ерекшеліктерін бейнелейді.

Университеттер мен педагогикалық институттар математика мамандығының студенттері математикалық пәндерді оқып-үйрену барысында бір топ алгебралық жүйелермен (алгебралар, модельдер) танысады, олар сандық жүйелер, реттелген жиындар, группалар, сакиналар, өрістер, векторлық және топологиялық кеңістіктер, тағы басқа да жүйелер. Олар қазіргі заманға сай қабылдау мәдениетін қалыптастыру негізінен алгебрамен байланысты пәндердің құралдарымен іске асады.

Бірақ осы пәндер деңгейінде, қазіргі уақытта, классикалық алгебралық құрылымдардың ішкі даму ерекшеліктерін бейнелейтін көзқарас басымырақ. Көпшілік жағдайда қазіргі заманғы алгебрада (және алгебралық жүйелер теориясында) «гомоморфизм» ұғымын оқып-үйрену және фактор алгебраны құру әдістемесі «конгруэнция» ұғымына негізделген. Жоғары оқу орындарында оқылатын жоғарғы алгебра курсына бұл ұғым өз қолданылуын қажетті деңгейде таппай келеді. Группаларда оның баламасы ретінде «нормаль бөлгіш» ұғымы алынса, сакиналарда «идеал» ұғымы қарастырылады.

Векторлық кеңістіктерді оқып-үйретуде «сызықтық бейнелеу» және қайтымды «сызықтық оператор» ұғымдары енгізіледі. Бірақ бұл ұғымдардың жалпы алгебра тұрғысынан алғанда «гомоморфизм» және «изоморфизм» ұғымдарының баламасы екендігіне көп көңіл аударылмайды. Осылардың барлығы алгебралық жүйелерді изоморфизмге дейінгі дәлдікпен оқып-үйренуде алгебралық жүйелердің гомоморфизмі туралы бірінші теоремаға негізделген бір ғана конструкцияны (негіздеу әдісі) группаға, сакинаға, векторлық кеңістікке, тағы да басқа алгебралық жүйелерге қатысты қолдануда, осы конструкцияға тән идея мен әдістің ортақтығын түсінуде студенттерге қиындықтар тудырады.

Математика оқулықтарында дәстүрлі түрде берілетін көптеген анықтамалар енгізілген ұғымның мәнін қажеттілікке қарай және анықтай бермейді. Олар көпшілігінде оның теориялық сипаттамасын, тарихи қалыптасуын, дамуын және қазіргі деңгейге дейін қалай трансформацияланғандығын аша бермейді. Математикалық ұғымды беруде оның интуитивті математикалық түсініктен қазіргі заманғы нақты ұғымға дейінгі (жоғарғы абстракциялы) қалыптасу жолы мен тарихына баса назар аудару қажет. Алгебралық жүйелердің ұғымдарын қарапайым талдау негізгі үш құраушы «элементтерді» жеке бөліп қарауға көмектеседі, олар: жиын, алгебралық амал, қатынас (предикат). Барлық осы «элементтер» жиындар теориясы деңгейінде анықталады және оқып-зерттеледі. Осыған сәйкес, «алгебралық

жүйе» ұғымының пропедевтикасы, біріншіден, алгебралық операция мен қатынасты анықтау үшін қажетті теория-жиынтық ұғымдар жүйесін анықтау мен оқып-үйретуді ұсынады. Бұл ұғымдар — «жындардың декарттық көбейтіндісі», «сәйкестік», «бейнелеу», «сәйкестіктің анықталу облысы» және «мәндер облысы».

«Алгебралық жүйе» ұғымының негізі — жиын. Жиынды амалдар мен қатынастардың бос жиынынан тұратын қарапайым алгебралық жүйе деп қарастыруға болады. Осы жүйелерге қатысты қолданылатын «ішкі жүйе», «конгруэнция», «фактор-жүйе» және «гомоморфизм» ұғымдары сәйкесінше, «ішкі жиын», «эквиваленттік», «фактор-жиын» және «сәйкестік» ұғымдарына трансформацияланады. Осы тұрғыдан алғанда «таза» жиын алгебралық жүйелерді пропедевтивтік оқып-үйренудің бастауы болып табылады. Қатынастарды (предикаттарды) оқып-үйренудегі жалпы көзқарас негізінен бинарлық қатынастарға аударылады, көпшілік жағдайда эквиваленттік қатынасқа баса көңіл аударылады, себебі ол конгруэнция қатынасының «таза» кері бейнесі.

«Биекцияға дейінгі дәлдікпен» фактор-жиындарды сипаттау сызбасы бейнелеулердің көріністері туралы теореманы, немесе бейнелеулердің композициялы құру туралы теореманы, алудың негізі болып табылады. Бұл теоремада жиындардың кез келген бейнелеулерін үш бейнелеулердің көбейтіндісі түрінде өрнектеуге болатындығы туралы айтылады. Олар: сюръективті, биективті, инъективті бейнелеулер. Әр түрлі алгебралық жүйелердегі конгруэнциялардың, фактор-жүйелердің, гомоморфизмдердің мысалдарын қарастыру арқылы ортақ конструкциялардағы идеялар мен әдістердің арасын анықтайық.

Анықтама 1 [2]. $\langle A; f_1^{n_1}, f_2^{n_2}, \dots \rangle$ алгебрасында анықталған E эквиваленттік қатынасы конгруэнция деп аталады, егер кез келген $f_i^{n_i} \in \sigma(\sigma = \{f_1^{n_1}, f_2^{n_2}\})$, кез келген $x_i, y_i \in A$ үшін $x_i E y_i$ болғандықтан, $f_i^{n_i}(x_1, \dots, x_{n_i}) E f_i^{n_i}(y_1, \dots, y_{n_i})$ орындалса.

Теорема 1. Егер A жиынындағы E қатынасы рефлексивті, симметриялы, транзитивті болса, онда A жиыны осы қатынас бойынша $\{A_1, A_2, \dots\}$ іргелес кластарға бөлінеді және кез келген $x, y \in A$ үшін $x E y$ орынды, сол уақытта, тек қана сол уақытта, егер олар бір класта жатса. Керісінше, егер A жиыны E қатынасы арқылы өзара қиылыспайтын іргелес кластарға бөлінсе, онда ол рефлексивті, симметриялы және транзитивті болады.

Теорема 2 [3]. G группасының кез келген E конгруэнциясы арқылы анықталған іргелес кластары осы группаның кейбір нормаль бөлгіші арқылы анықталады. Керісінше, G группасының әрбір нормаль бөлгіші H -қа осы группада анықталған кейбір конгруэнция сәйкес келеді.

Анықтама 2. R сақинасының ішкі сақинасы I идеал деп аталады, егер кез келген $a \in I, x \in R$ үшін $ax \in I$ және $xa \in I$ орындалса.

Теорема 3. R сақинасында анықталған конгруэнция мен оның кейбір идеалының арасында бірмәнді сәйкестік бар. Конгруэнция арқылы анықталған әрбір класқа оған сәйкес келетін идеал бойынша анықталған іргелес класс сәйкес келеді.

Сақинаны векторлық кеңістік ретінде қарастырсақ, жоғарыда айтылған тұжырымдарды векторлық кеңістікке де көшіруге болады.

Анықтама 3 [1]. $\langle A, f^1 \rangle$ алгебралық жүйесі унар деп аталады, мұндағы f_1 — A жиынында анықталған бір орынды амал.

Теорема 4. Айталық, $\langle A, f^1 \rangle$ бір бүтін унар болсын. Онда A -да анықталған бірлік емес эквиваленттік қатынас осы жиында анықталған конгруэнция болады сол уақытта, тек қана сол уақытта, егер $y \in A$ табылып, кез келген $x_1, x_2 \in A$ үшін $(x_1, x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ немесе $\exists k_1, k_2 : f^{k_1}(y) = x_1, f^{k_2}(y) = x_2$ шарттары орындалса.

Группа, сақина, өріс, векторлық кеңістік сияқты алгебралық жүйелердегі оларды анықтаған конгруэнцияның көмегімен анықталған бөліктері (мысалы, нормаль бөлгіш, идеал т.б.) осы жүйелерде анықталған амалдарды сақтайтын жаңа жүйелер құруға көмектеседі. Бұл жүйелерді фактор-алгебралар деп атайды. Гомоморфизм және изоморфизм туралы теоремалар негізгі алгебра мен фактор-алгебраның арасындағы тығыз байланысты көрсетеді. Мысалы, векторлық кеңістіктегі сызықтық операторлар мен қайтымды сызықтық операторлар осының айқын дәлелі. Әдістемелік тұрғыдан алғанда кез келген алгебралық жүйенің негізі жиынында анықталған конгруэнция қатынасы анықтай білу осы жүйені толық оқып-үйренудің бірден-бір әдісі. Мұндай алгебралық жүйелердің құрамында негізгі

амалдардың бірі арқылы анықталатын группаның көрінісі бар. Сондықтан бұл алгебралық жүйенің көптеген ерекшеліктері осы группаның нормаль бөлгіштері арқылы анықталады.

2. Фактор-группаны құрудың әдістемесі (технологиясы)

Студенттерді «алгебралық жүйе» ұғымымен таныстырудың пропедевтивтік процесі және алгебралық жүйелерді изоморфизмге дейінгі дәлдікпен оқып-үйрену мәселесін шешудің ғылыми-әдістемелік тұрғыларын меңгеру (игеру) үш кезеңнен тұрады:

1) қарапайым жағдайда «таза» жиынды амалдар мен қатынастардың бос жиынтығынан тұратын алгебралық жүйе түрінде қарастыруда алғашқы көріністерінің әдістемелік сипаттамасының көрсетілген мәселеге байланысты ұғымдарды енгізу технологиясы мен конструкциясын қалыптастыру;

2) биекцияға дейінгі дәлдікпен фактор-жиынды анықтау мен қолданудың сызбасын (схемасын) сипаттау;

3) бейнелеудің композициялық көріністерінің көбейткіштерін табу (анықтау) (сюръекциялардың, биекциялардың, инъекциялардың көбейтіндісі түрінде).

Практикада көрсетілген кезеңдерді қарастыруды талдауда табиғаттары әр түрлі жиындардағы эквиваленттік қатынастардың мысалдары қарастырылады. Бұл эквиваленттік қатынастарды осы жиында алгебралық жүйенің құрылымы анықталғанда ол конгруэнцияға айналатындай етіп таңдап аламыз. Мұндай қатынастардың ішіндегі ең маңыздысы осы қатынас арқылы құрылған конгруэнцияның көмегімен фактор-группа құруға келтіретіндері.

Бірнеше мысалдар қарастырайық.

1. Айтылық, C — өзінде декарттық координаталар жүйесі анықталған жазықтағы нүктелер жиыны, O — нүктесі координаталар басы болсын.

Кез келген $P_1, P_2 \in C$ үшін $P_1 \sim P_2 \Leftrightarrow |OP_1| = |OP_2|$ деп алайық. Әрине, « \sim » — эквиваленттік қатынас. Бұл жағдайда $[P]_{\sim} = \{P' | P' \in C \& P' \sim P\}$ — эквиваленттік класы центрі бас нүктеде жатқан, радиусы $|OP|$ болатын шеңберде жатқан нүктелер жиынын береді.

$C/\sim = \{[P], | P \in C\}$ — фактор жиыны центрі бас нүктеде жатқан барлық концентрлі шеңберлер жиынын құрайды.

C/\sim — фактор жиыны мен теріс емес нақты сандар жиындарының арасында биективті (өзара бір мәнді) сәйкестіктің бар екендігін түсіну қиын емес.

2. R — нақты сандар өрісіндегі өлшемдері $n \times n$ болатын барлық қайтымды матрицалар жиыны $GL(n, R)$ берілсін. Кез келген $A, B \in GL(n, R)$ үшін $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$, мұндағы $|A|$ өрнегі A матрицасының анықтаушысы деп аталады.

« \sim » — эквиваленттік қатынас болады, және $[A]_{\sim}$ класы анықтауыштары тең барлық матрицалардан тұрады. Фактор жиын нольден өзгеше барлық нақты сандар жиынымен биективті сәйкестікте.

3. Айталық, S_n — n дәрежелі барлық орналастырулар жиыны болсын. Кез келген $\phi, \psi \in S_n$ орналастырулары үшін $\phi \sim \psi \Leftrightarrow \text{sgn } \phi = \text{sgn } \psi$ деп алайық. $\text{sgn } \phi$ -функциясы

$$\text{sgn } \phi = \begin{cases} 1, & \text{егер } \phi \text{ жұп орналастыру болса,} \\ -1, & \text{егер } \phi \text{ тақ орналастыру болса,} \end{cases}$$

ережесімен анықталады.

« \sim » — эквиваленттік қатынас. Фактор-жиын тек ғана екі кластан (жұп және тақ орналастыру кластары) тұрады және $\{-1; +1\}$ жиынымен биективтік сәйкестікте болады.

Практикалық дағдыны қалыптастырудың келесі кезеңі фактор-группаларды құру.

Бұл нақты группаның нақты ішкі группасы бойынша оң (сол) іргелес кластарын құру әдісін игерумен сипатталады. Жалпылама жоспарда негізгі жұмыс H — ішкі группасы бойынша G -группасының « \sim_o » — оң (« \sim_c » — сол) іргелес кластарын құрумен айқындалады. G -группасындағы жазу мультипликативті (көбейту) болған жағдайда « \sim_o » қатынасы келесі түрде анықталады:

$$(\forall x, y \in G)(x \sim_o y \Leftrightarrow y \cdot x^{-1} \in H).$$

Осыған ұқсас \sim_c қатынасы табылады.

Группаның анықтамасын қолданып, \sim_o , \sim_c қатынастарының эквиваленттік екендігін оңай дәлелдеуге болады.

Мысалы, « \sim_c » қатынасының транзитивтігін көрсетейік.

\sim_c қатынасы келесі түрде анықталады:

$$(\forall x, y \in G)(x \sim_c y \Leftrightarrow y^{-1} \cdot x \in H). \quad (1)$$

Айталық, $a, b, c \in G$ және $a \sim_c b$, $b \sim_c c$ болсын.

Онда (1) бойынша алатынымыз

$$b^{-1} \cdot a \in H \text{ және } c^{-1} \cdot b \in H.$$

Бұнда H ішкі группаның негізгі жиыны болғандықтан, ол «*» амалына қарағанда тұйықталған, яғни

$$(c^{-1} \cdot b)(b^{-1} \cdot a) \in H. \quad (2)$$

Бірақ $(c^{-1} \cdot b)(b^{-1} \cdot a) = (c^{-1} \cdot (b \cdot b^{-1})) \cdot a = (c^{-1} \cdot b) \cdot a = c^{-1} \cdot a$, яғни

$$(c^{-1} \cdot b)(b^{-1} \cdot a) = c^{-1} \cdot a. \quad (3)$$

(2) мен (3) алатынымыз: $c^{-1} \cdot a \in H$. Онда (1) бойынша $a \sim_c c$. « \sim » — транзитивті қатынас.

\sim_o (\sim_c) қатынастары G -жиынындағы эквиваленттік болғандықтан, келесі проблемалық жағдайдың қойылымы орынды. Группалық амал мен G -ішкі группасы терминдерінде H -ішкі группасы бойынша құрылған G -группасының $[a]_{\sim_c}$ ($[a]_{\sim_o}$) сол (оң) класын қалай сипаттауға болады? Яғни студенттерге $[a]_{\sim_c} = a \cdot H$ және $[a]_{\sim_o} = a \cdot H$ теңдіктерін дәлелдеу ұсынылады.

H -ішкі группасы бойынша G -группасының оң іргелес кластарын сипаттау үшін, ең алдымен, екі $x, y \in G$ элементтерінің бір ғана класқа тиісті болуының сипаттамалық белгілерін анықтау қажет. Бұл жұмысты \sim_o қатынасының анықтамасынан бастау қажет. Нақты группада $y \cdot x^{-1} \in H$ шарты осы группа мен оның ішкі группаларының негізгі амалға тән қасиеттері терминінде өрнектелуі мүмкін. Әріректе ол, G/H -фактор жиынының құрылымы туралы белгілі бір жорамал жасауға көмегін тигізеді. Студенттерге жоғарыдағы 1)–3) мысалдарды осы тұрғыдан қарастыруды ұсынуға болады.

Әрине, бірден G -группасының H -ішкі группасы туралы айтпай, G -жиынының H -ішкі жиынын алып, алдымен оның G -группасының негізгі амалына қатысты тұйықталғандығына көз жеткізу қажет, яғни $H = \langle H; \cdot; {}^{-1}; 1 \rangle$ алгебрасының G -группасының ішкі группасы болатындығына.

Бұл, біріншіден, «ішкі группа» ұғымын дұрыс түсінуді бекітсе, екіншіден, амалдың қасиеттерін сипаттайтын бірнеше нәтижелерді студенттердің есіне салады.

1'. 1)-мысалды комплекс жазықтыққа интерпретациясы $G^* = \langle G; \cdot; {}^{-1}; 1 \rangle$ — мультипликативті комплекс сандар группасын қарастырайық.

Айталық, $H = \{z \mid z \in C^* \ \& \ |z| = 1\}$, мұндағы $|z|$ өрнегі — z санының модулі.

H -жиынының негізгі амалға қатысты тұйықталған болатындығын тексеру қиын емес.

Егер $z_1, z_2 \in H$ болса, онда $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = 1 \cdot 1 = 1$, яғни $z_1 \cdot z_2 \in H$. Бұл жерде екі комплекс санның көбейтіндісінің модулінің олардың модульдерінің көбейтіндісіне тең болатындығын студенттердің есіне сала кеткен орынды. Айталық, енді $x, y \in C^*$ болсын. Онда x және y бір оң іргелес класта жатады сол уақытта, тек ғана сол уақытта, егер

$$x \sim y_0 \Leftrightarrow y \cdot x^{-1} \in H \Leftrightarrow |y \cdot x^{-1}| = 1 \Leftrightarrow |y| \cdot |x|^{-1} = 1 \Leftrightarrow |x| = |y|.$$

Сонымен, z_1 және z_2 комплекс сандары бір іргелес класта жатады сол уақытта, тек ғана сол уақытта, егер комплекс жазықтықта осы сандар бейнелейтін нүктелер координата басынан бірдей арақашықтықта жатса.

1-мысалды еске түсіру арқылы бірден H -ішкі группасы бойынша құралған G^* -группасының іргелес кластарының құрылымы туралы көрнекі көріністі аламыз.

2'. Айталық, $H = \{A \mid A \in GL(n, R) \ \& \ |A| = 1\}$ болсын.

$H = \langle H; \cdot; {}^{-1} \rangle$ жүйесі — $GL(n, R) = \langle GL(n, R); \cdot; {}^{-1}; E \rangle$ — группасының ішкі группасы.

Студенттерге осы мысалды қарастыру барысында матрицалар теориясының келесі теңдіктерін естеріне түсіре кетуге болады:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \text{ және } |A^{-1}| = (|A|)^{-1}.$$

A және B матрицаларының бір іргелес класқа тиістілік шартын анықтайық.

Айталық, $A, B \in GL(n, R)$ болсын. Онда A және B матрицалары H ішкі группасы бойынша $GL(n, R)$ группасының бір оң іргелес класында жатады сол уақытта, тек ғана сол уақытта, егер

$$A \sim_0 B \Leftrightarrow B \cdot A^{-1} \in H \Leftrightarrow |B \cdot A^{-1}| = 1 \Leftrightarrow |B| \cdot |A^{-1}| = 1 \Leftrightarrow |B| = |A|.$$

Сонымен, A және B матрицалары бір оң іргелес класта жатуы үшін олардың анықтауыштарының тең болуы қажетті және жеткілікті, яғни қайтадан 2-мысалға келдік.

3'. Айталық, $A_n = \{\phi \mid \phi \in S_n \text{ \& sgn } \phi = 1\}$ болсын.

$A_n = \{A_n; ;^{-1}; e\}$ жүйесінің $S_n = \langle S_n; ;^{-1}; e \rangle$ группасының ішкі группасы болатындығын тексеру қиын емес.

ϕ және ψ орналастырулары бір оң іргелес класта жатады сол уақытта, тек ғана сол уақытта, егер

$$\phi \sim_0 \psi \Leftrightarrow \psi \phi^{-1} \in A_n \Leftrightarrow \text{sgn}(\psi \cdot \phi^{-1}) = 1 \Leftrightarrow \text{sgn} \psi \cdot (\text{sgn} \phi^{-1}) = 1 \Leftrightarrow \text{sgn} \psi = \text{sgn} \phi.$$

Яғни қайтадан 3-мысалдың шартына келдік.

Келесі кезең фактор-группа құруға көшу.

Істелетін негізгі жұмыс — G -группасының барлық ішкі группалар жиынынан нормаль ішкі группаны бөліп алу.

Анықтама бойынша, H -ішкі жиыны — G -группасының нормаль бөлгіші $\Leftrightarrow (\forall h \in H)(\forall g \in G)(g^{-1}hg \in H)$.

Жұмыстың осы кезеңінде G -группасының барлық нормаль бөлгіштер жиынтығы мен барлық фактор-группалар жиынтығының арасында биективті сәйкестіктің бар екендігін негіздеу.

Осы бағытта 1' – 3' -мысалдарын қайта қарастырайық.

1". G^* абельдік группа болғандықтан, онда H -жиыны — G группасының нормаль ішкі группасы. Онда жоғарыдағы ой қорытудан $G^*/H \cong R_+^*$, мұндағы R_+^* оң нақты сандардың мультипликативті ішкі группасы болатындығын оңай түсінеміз.

Изоморфизм $\phi([z])_{\sim_c} = |z|$ бейнелеуімен анықталады.

2''. Кез келген $A \in H$ және $B \in GL(n, R)$ үшін $|B^{-1} \cdot A \cdot B| = |B^{-1}| \cdot |A| \cdot |B| = |B^{-1}| \cdot |B| = 1$ болса, онда H -жиыны — $GL(n, R)$ группасының нормаль ішкі группасы және $GL(n, R)/H \cong R^*$, мұндағы R^* — нақты сандардың мультипликативті группасы.

Изоморфизм $\phi([A])_{\sim_c} = |A|$. Бұл жағдайда студенттерге ϕ бейнеленуінің сюръективті екендігін тексеру қажет.

3''. Жоғарыда келтірілген мысалдарға ұқсас

$$S_n/A_n \cong \langle \pm 1 \rangle; ;^{-1}; 1 \rangle$$

изоморфизмін кез келген $\delta \in S_n$ орналастыруы үшін $\phi([\delta])_{\sim_c} = \text{sgn} \delta$ ережесінің көмегімен анықтау арқылы беруге болады.

Қорытынды кезеңде i, i', i'' ($i = 1, 2, 3$) мысалдарына ұқсас фактор-группаны құрудың қажетті тәжірибесін алғаннан соң гомоморфизм туралы теореманы қолданып, фактор-группаны сипаттауға көшуге болады (гомоморфизмді композициялы құру туралы теорема).

Фактор-группаны сипаттау және бірден алу мақсатында группалардың гомоморфизмі туралы теореманы келесі түрде қолданамыз:

G_1/H фактор-группасының G_1 группасына изоморфты болатындығын көрсету үшін, G_1 -группасының G_2 -группасына $\phi: G_1 \rightarrow G_2$ гомоморфизмін ядросы H -ішкі группасымен $\ker \phi = H$ сәйкес келетіндей етіп құрамыз.

Біздің мысалдарымызда сәйкесінше мұндай гомоморфизмдердің ролін

$$\phi(z) = |z|; \quad \phi(A) = |A|; \quad \phi(\delta) = \operatorname{sgn} \phi$$

бейнелеулері атқарады.

3. Конгруэнциялар мен фактор-группалар

Жоғары оқу орындарының алгебра курсының типтік жоспарында группалар теориясы мен сақиналар теориясының бастапқы бөлімін оқып-үйренуге қарастырылған.

Осыған сәйкес жоғарғы алгебра курсына фактор-жүйе құру әдістемесі фактор-группалар мен фактор-сақиналардың мысалдарын құрумен негізделеді. Сондықтан алгебралардың гомоморфизмі туралы бірінші теорема группалар мен бірлік элементті коммутативті сақиналар класы үшін тұжырымдалады. Бұл теорема жоғарғы алгебраның көптеген бөлімдерінде қолданылады. Бұл теореманың жай ішкі өрістердің типін сипаттау мен өрістің жай алгебралық кеңеюін құрудағы ролін ерекше атап өтуге болады.

«Изоморфизм», «гомоморфизм», «фактор-группа» және «фактор-сақина» ұғымдарына байланысты тақырыпты баяндаудың тұрғыларын «конгруэнция» ұғымымен негіздеуге болады.

Айталық, $G = \langle G; *; ' ; e \rangle$ группа болсын.

Онда «конгруэнция» ұғымына сәйкес, G -группасындағы эквиваленттік G конгруэнция деп аталады, егер келесі шарттар орындалса:

$$(\forall a, b, c \in G) (((adc) \& (bdd)) \Rightarrow (a * b) \delta (c * d)); \quad (4)$$

$$(\forall a; b \in G) (a \sigma b \Rightarrow a' \sigma b'). \quad (5)$$

(4) және (5) шарттар «конгруэнция» ұғымын енгізудің негізгі мағынасы G -группасының негізгі амалын табиғи түрде эквиваленттік кластарға көшіру екендігін көрсетеді.

$$[a]_{\sigma} * [b]_{\sigma} = [a * b]_{\sigma}; \quad (6)$$

$$[a]_{\sigma} * [b]_{\sigma} = [a * b]_{\sigma}. \quad (7)$$

(6) және (7) ережелермен берілген $*$ және $'$ амалдардың G/σ анықталуын (4) және (5) шарттар қамтамасыз етеді. (Мысалы, (1)-шарт $*$ — амалының кластардағы тәуелсіздігін қамтамасыз етеді).

Сонымен, «конгруэнция» ұғымы тікелей «фактор-группа» ұғымына жәрдем жасайды.

Студенттерге өзіндік жұмыс ретінде келесі тұжырымдардың дұрыстығын тексеруді беруге болады.

а) $\langle [e]_{\sigma}; *; ' ; e \rangle$ — өрнегі — G группасының ішкі группасы;

б) кез келген $a \in G$ үшін $[a]_{\sigma} = (a * [e]_{\sigma})$;

в) кез келген $a \in G$ үшін $(a * [e]_{\sigma}) = ([e]_{\sigma} * a)$;

г) $\langle [e]_{\sigma}; *; ' ; e \rangle$ -өрнегі — G -группасының нормаль ішкі группасы.

Әдебиеттер тізімі

1. Гончаров С.С., Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф. Введение в логику и методологию науки. — М.: Интерпракс, 1994.
2. Мальцев А.И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.
3. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1982. — 288 с.