

Анализ изолиний нормальных  $p + q = const$  и касательных  $\tau = const$  напряжений, построенных для различных моментов времени, показывает практически идентичный описанному характер их распределения. Однако уровень напряжений, место расположения локальных экстремумов, появление и образование зон растягивающих напряжений в различные моменты времени отличаются друг от друга. Отверстие оказывает заметное влияние и на характер распределения скоростей движения в отдельных точках полосы.

### Список литературы

1. *Навал И.К., Сабодаш П.Ф.* Численное решение задачи о распространении волн напряжений в сплошном цилиндре переменного радиуса // Известия АН МССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. — 1974. — № 3. — С. 27–35.
2. *Аширбаев Н.К., Байтелиев Т.Б., Каримбаев Т.Д.* Аналитическое исследование влияния инородных включений на параметры волнового движения в упругом прямоугольнике // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1987. — № 4. — С. 128–133.
3. *Чебан В.Г., Навал И.К., Сабодаш П.Ф., Чередниченко Р.А.* Численные методы решения задач динамической теории упругости. — Кишинев: Штиинца, 1976. — 225 с.
4. *Ковишов А.Н.* О дифракции нестационарной упругой волны на цилиндрической полости // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1976. — № 4. — С. 115–121.
5. *Ковишов А.Н., Неццетов И.И.* О дифракции нестационарной поперечной волны на цилиндрической полости // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1982. — № 5. — С. 72–77.
6. *Хэбберстед.* Численное решение двумерной задачи о распространении упругих волн в стержнях различной конфигурации // Прикладная механика: Тр. Амер. об-ва инж.-механиков. Сер. Е. — 1971. — Т. 38. — № 1. — С. 62–69.
7. *Клифтон Р.Дж.* Разностный метод в плоских задачах динамической упругости // Механика: Сб. пер. — 1968. — № 1. — С. 103–122.
8. *Ержанов Ж.С., Каримбаев Т.Д., Байтелиев Т.Б.* Двумерные волны напряжений в однородных и структурно-неоднородных средах. — Алма-Ата: Наука, 1983. — 171 с.
9. *Ержанов Ж.С., Каримбаев Т.Д., Байтелиев Т.Б.* Волны напряжений в однородных и неоднородных средах. — Алматы: Ғылым, 1998. — 142 с.
10. *Аширбаев Н.К.* Влияние характера изменения внешней нагрузки на распространение динамических возмущений в упругой однородной среде // Механика и моделирование процессов технологии. — 2005. — № 1. — С. 37–41.

УДК 621.752(031)

Ж.Б.Бакиров, В.Ф.Михайлов

Карагандинский государственный технический университет

### МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

*Әр түрлі кездейсоқ процестердің түрлері қарастырылады, олар үшін стохастикалық айырма теңдеулерін қолданып, дискреттік ұқсастықтар алынады. Олардың статистикалық өңделуі шығу процесінің негізгі ықтималдық сипаттамаларын алу мүмкіндігін береді.*

*Different types of random processes are considered. Discreet analogues applying stochastic difference equations are given for those types. Their statistical computing important probabilistic characteristics availability of output process is enabled.*

При цифровом моделировании на ЭВМ арифметические операции проводят в фиксированные моменты времени (дискретно). Поэтому непрерывные процессы, представляющие внешние возмущения, и вызванные ими колебания механической системы необходимо представлять в дискретной форме.

Если случайное воздействие имеет дробно-рациональную спектральную плотность, то его можно рассматривать как результат прохождения нормального белого шума через линейную систему с постоянными коэффициентами, называемую формирующим фильтром.

Изложим общую методику вывода уравнения фильтра. Спектральную плотность случайного процесса представим в виде

$$S_y = C^2 \frac{\sigma^2 F_{(\omega)}}{2\pi H_{(i\omega)} H_{(-i\omega)}},$$

где  $H_{(i\omega)}$  — полином, корни которого лежат в правой полуплоскости;  $F_{(\omega)}$  — действительная четная функция частоты, у которой коэффициент при наибольшей степени  $\omega$  равен единице.

С другой стороны, из спектрального метода следует

$$S_y = |W_{(i\omega)} W_{(-i\omega)}| S_{\xi} = |W_{(i\omega)}|^2 S_{\xi},$$

где  $S_{\xi} = \sigma^2 / 2\pi$  — спектральная плотность белого шума;  $W_{(i\omega)}$  — передаточная функция уравнения фильтра в пространстве частот.

Модуль передаточной функции представим в виде

$$|W_{(i\omega)}|^2 = \frac{C^2 R_{(i\omega)} R_{(-i\omega)}}{H_{(i\omega)} \cdot H_{(-i\omega)}}.$$

Приравняв два последних выражения для  $S_y$ , получим:

$$R_{(i\omega)} R_{(-i\omega)} = F_{(\omega)}.$$

Отсюда определяем степенную функцию  $R_{(i\omega)}$ , корни которой также лежат в правой полуплоскости.

Используя свойство передаточной функции, можно записать:

$$y_{(i\omega)} = W_{(i\omega)} \sigma \xi = C \frac{R_{(i\omega)}}{H_{(i\omega)}} \sigma \xi,$$

где  $\xi$  — нормальный белый шум единичной интенсивности.

Положим  $i\omega = p$  и запишем уравнение фильтра в пространстве изображения

$$H_{(p)} Y_{(p)} = C \sigma R_{(p)} \xi_{(p)}.$$

Заменив далее оператор  $p$  на  $d/dt$ , а изображения процессов их оригиналами, получим окончательно уравнение фильтра.

Запишем уравнения фильтра для наиболее часто используемых моделей случайных процессов. Для экспоненциально-коррелированного процесса со спектральной плотностью

$$S_{(\omega)} = \frac{\sigma^2 \alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}$$

имеем:

$$C = \sqrt{2\alpha}; \quad H_{(i\omega)} = \alpha + i\omega; \quad R_{(i\omega)} = 1.$$

Тогда уравнение фильтра примет вид

$$\dot{y} + \alpha y = \sigma \sqrt{2\alpha} \xi \quad (1)$$

Для процесса со спектральной плотностью

$$S_{(\omega)} = \frac{2\alpha\sigma^2}{\pi} \cdot \frac{\beta^2 + \alpha^2}{(\omega^2 - \beta^2 - \alpha^2) + 4\alpha^2\omega^2} \quad (2)$$

имеем:

$$C = 2\Omega\sqrt{\alpha}; \quad H_{(i\omega)} = \Omega^2 - \omega^2 + 2\alpha i\omega; \quad R_{(i\omega)} = 1; \quad \Omega^2 = \beta^2 + \alpha^2.$$

Следовательно,

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \Omega^2 y = 2\Omega\sqrt{\alpha}\sigma\xi. \quad (3)$$

Для косинусоидального процесса со спектральной плотностью

$$S_{(\omega)} = \frac{2\alpha\sigma^2}{\pi} \cdot \frac{\beta^2 + \alpha^2 + \omega^2}{(\omega^2 - \beta^2 - \alpha^2) + 4\alpha^2\omega^2} \quad (4)$$

имеем:

$$C = \sqrt{2\alpha}; H_{(i\omega)} = \Omega^2 - \omega^2 + 2\alpha i\omega; R_{(i\omega)} = i\omega + \Omega.$$

Тогда уравнение фильтра примет вид

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \Omega^2 y = \sqrt{2\alpha}\sigma(\dot{\xi} + \Omega\xi).$$

Введем новый процесс

$$\dot{y} = U + \sigma\sqrt{2\alpha}\xi.$$

Тогда уравнение фильтра можно переписать так:

$$\dot{y} = U + \sigma\sqrt{2\alpha}\xi, \\ \dot{U} + 2\alpha U + \Omega^2 y = \sigma\sqrt{2\alpha}(\Omega - 2\alpha)\xi.$$

Многие вычислительные комплексы имеют блоки, генерирующие последовательность нормально распределенных псевдослучайных чисел единичной интенсивности. Также программы несложно составить и пользователю.

Для моделирования случайных процессов их значения задают в фиксированные моменты времени  $t_i$ . Для этого уравнения фильтра заменяются их дискретными аналогами — стохастическими разностными уравнениями. Это можно сделать, например, по методу Рунге-Кутты. Однако существуют более эффективные и более точные методы получения стохастических разностных уравнений [1].

Уравнение формирующего фильтра в векторной форме может быть представлено в виде

$$\dot{y} = A_{(t)}y + B_{(t)}\xi, \quad (5)$$

где  $y_{(t)}$  —  $n$ -мерный вектор фазовых переменных фильтра;  $\xi_{(t)}$  —  $m$ -мерные белые шумы с интенсивностями  $D_\xi$ .

Для получения дискретной модели случайного воздействия необходимо вместо (5) получить стохастическое разностное уравнение. Решение уравнения (5) имеет вид

$$y_{(t)} = G_{(t,t_0)}x_{(t_0)} + \int_{t_0}^t G_{(t,\tau)}B_{(\tau)}\xi_{(\tau)}d\tau,$$

где матрица  $G$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{G}_{(t,\tau)} = A_{(\tau)}G_{(t,\tau)}, \quad (6)$$

при начальном условии  $G_{(\tau,\tau)} = I$ . Здесь  $I$  — единичная матрица порядка  $n$ .

Считая, что вектор  $y_{(t)}$  определяется в фиксированные моменты времени, получаем стохастическое разностное уравнение:

$$y_{(t_{i+1})} = G_{(t_{i+1},t_i)}y_{(t_i)} + \lambda_{(t_i)},$$

где

$$\lambda_{(t_i)} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} G_{(t_{i+1},\tau)}B_{(\tau)}\xi_{(\tau)}d\tau.$$

Случайный вектор  $\lambda_{(t_i)}$  можно выразить через вектор дискретного белого шума  $\xi_{(t_i)}$ , т.е. через последовательность независимых векторных случайных величин

$$\lambda_{(t_i)} = Q\xi_{(t_i)},$$

где квадратная матрица  $Q$  порядка  $n$  определяется из условия равенства интенсивностей векторов в левой и правой частях этого выражения:

$$D_{\lambda_{(t_i)}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} G_{(t_{i+1},\tau)}B_{(\tau)}D_\xi B_{(\tau)}^T G_{(t_{i+1},\tau)}^T dt = QIQ^T. \quad (7)$$

Таким образом, дискретная модель случайного воздействия описывается стохастическим разностным уравнением

$$y_{(t_{i+1})} = G_{(t_{i+1},t_i)}y_{(t_i)} + Q\xi_{(t_i)}.$$

Получим эти уравнения для вышеприведенных моделей случайных процессов. Рассмотрим экспоненциально-коррелированное воздействие, которое описывается (1). Тогда  $A = -\alpha$ ,  $B = \sigma\sqrt{2\alpha}$ . Из решения уравнения (6) имеем

$$G = \exp[-\alpha(t - \tau)].$$

Подставляя  $D_\xi$ ,  $B$ ,  $G$  в интегралы (12), получаем:

$$D_\lambda = \sigma^2 2\alpha \int_{t_i}^{t_{i+1}} \exp[-2\alpha(t_{i+1} - \tau)] d\tau = \sigma^2 [1 - \exp(-2\alpha h)],$$

где  $h = t_{i+1} - t_i$  — шаг дискретизации нагрузки.

Сравнивая далее левые и правые части выражения (7), получаем:

$$Q = \sigma [1 - \exp(-2\alpha h)]^{1/2}.$$

Таким образом, случайный процесс моделируется разностным уравнением

$$y_{i+1} = y_i \exp(-\alpha h) + \sigma [1 - \exp(-2\alpha h)]^{1/2} \xi_i,$$

где  $\xi_i$  — последовательности нормально распределенных случайных чисел единичной интенсивности.

Для получения последовательности псевдослучайных чисел можно воспользоваться одним из алгоритмов, описанных в [2]. Наиболее простым является следующий алгоритм:

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{12} \alpha_j - 6,$$

где  $\alpha_j$  — последовательность случайных чисел, равномерно распределенных на интервале  $[0;1]$ . Они могут быть генерированы с помощью подпрограммы URAND, приведенной в [2].

Рассмотрим теперь процесс со скрытой периодичностью, для которого уравнение фильтра имеет вид (3). Обозначив  $y = y_1$ ,  $\dot{y} = y_2$ , запишем это уравнение в нормальной форме Коши:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\Omega^2 y_1 - 2\alpha y_2 + 2\sigma\Omega\sqrt{\alpha}\xi. \end{aligned}$$

Тогда в уравнении (5)

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & -2\alpha \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 2\sigma\Omega\sqrt{\alpha} \end{vmatrix}.$$

Матричное уравнение (6) запишем в виде системы четырех дифференциальных уравнений I порядка

$$\dot{X} = CX, \quad (8)$$

где

$$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_{11} \\ G_{12} \\ G_{21} \\ G_{22} \end{vmatrix}; \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\Omega^2 & 0 & -2\alpha & 0 \\ 0 & -\Omega^2 & 0 & -2\alpha \end{vmatrix}.$$

Этой системе соответствует следующее матричное характеристическое уравнение:

$$C - sI = 0,$$

где  $s$  — характеристический показатель;  $I$  — единичная матрица размерности  $4 \times 4$ . Чтобы система имела ненулевое решение, необходимо, чтобы определитель характеристического уравнения был равен нулю. Отсюда получаем алгебраическое уравнение четвертой степени:

$$s^4 + 4\alpha s^3 + (4\alpha^2 + 2\Omega^2)s^2 + 4\alpha\Omega^2 s + \Omega^4 = 0.$$

Подстановкой  $s = r - \alpha$  это уравнение приводится к виду

$$r^4 + 2v^2 r^2 + v^4 = 0,$$

где

$$v^2 = \Omega^2 - \alpha^2.$$

Тогда корни характеристического уравнения будут равны

$$s_{1,2} = s_{3,4} = -\alpha \pm iv.$$

Отсюда следует, что

$$x_i = e^{-\alpha \bar{t}} (a_i \cos v \bar{t} + b_i \sin v \bar{t}) \quad (\bar{t} = t - \tau).$$

Из начальных условий для уравнения (6) имеем

$$x_{1(0)} = x_{4(0)} = 1, x_{2(0)} = x_{3(0)} = 0.$$

Отсюда находим:

$$a_1 = a_4 = 1, a_2 = a_3 = 0.$$

Подставив далее  $x_i$  в первые два уравнения системы (8), получаем:

$$\begin{aligned} b_3 &= -\alpha b_1 - v a_1, a_3 = -\alpha a_1 + v b_1; \\ b_4 &= -\alpha b_2 - v a_2, a_4 = -\alpha a_2 + v b_2. \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$b_1 = \alpha / v; b_2 = 1 / v; b_3 = -\Omega^2 / v; b_4 = -\alpha / v.$$

Подстановка этих постоянных в последние два уравнения системы (8) дает тождественные равенства. Тогда решение матричного уравнения (6) примет вид

$$G_{(t,\tau)} = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi + \alpha \psi & \psi \\ -\Omega^2 \psi & \varphi - \alpha \psi \end{vmatrix}, \quad (9)$$

где

$$\varphi = e^{-\alpha \bar{t}} \cos v \bar{t}; \psi = v^{-1} e^{-\alpha \bar{t}} \sin v \bar{t}.$$

Определим по формуле (7) дисперсию векторной случайной величины

$$D_{\lambda(t_i)} = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix} = 4\alpha\sigma^2\Omega^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \begin{vmatrix} \psi^2 & \varphi\psi - \alpha\psi^2 \\ \varphi\psi - \alpha\psi^2 & (\varphi - \alpha\psi)^2 \end{vmatrix} d\tau. \quad (10)$$

Опуская промежуточные вычисления, запишем окончательный результат:

$$\begin{aligned} D_{21} &= D_{12} = \alpha\sigma^2(\Omega/v)^2(1 - \cos 2vh)\exp(-2\alpha h); \\ D_{11} &= \sigma^2\rho_1; D_{22} = \sigma^2\Omega^2\rho_2; \\ \rho_{1,2} &= 1 - (\Omega/v)^2 e^{-2\alpha h} \mp (\alpha/v)[\sin 2vh \mp (\alpha/v)\cos 2vh]e^{-2\alpha h}. \end{aligned}$$

Далее из (12) следует

$$D_{\lambda} = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{vmatrix}.$$

Отсюда

$$q_{11}q_{21} + q_{12}q_{22} = D_{12} = D_{21}; q_{11}^2 + q_{12}^2 = D_{11}; q_{21}^2 + q_{22}^2 = D_{22}.$$

Так как два уравнения здесь совпали, то один из коэффициентов ( $q_{12}$  или  $q_{21}$ ) можно принять произвольно. Полагая  $q_{12} = 0$ , получаем:

$$q_{11} = \sqrt{D_{11}}; q_{21} = D_{12} / \sqrt{D_{11}}; q_{22} = \sqrt{D_{22} - D_{12}^2 / D_{11}}. \quad (11)$$

Таким образом, рекуррентный алгоритм для моделирования с постоянным шагом  $h$  случайного процесса со спектральной плотностью (2) имеет вид

$$\begin{aligned} y_{1(i+1)} &= G_{11}y_{1(i)} + G_{12}y_{2(i)} + q_{11}\xi_{1(i)}, \\ y_{2(i+1)} &= G_{21}y_{1(i)} + G_{22}y_{2(i)} + q_{21}\xi_{1(i)} + q_{22}\xi_{2(i)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим теперь косинусоидальный процесс (4). Уравнение фильтра путем введения обозначений  $y_1 = y$ ,  $y_2 = u$  можно свести к виду (5), где матрица  $A$  остается как в предыдущем случае, а

$$B = \sigma\sqrt{2\alpha} \begin{vmatrix} 1 \\ \Omega - 2\alpha \end{vmatrix}.$$

Тогда матрица  $G_{(t,\tau)}$  имеет вид (9), а элементы подынтегральной матрицы (10) будут равны

$$\begin{aligned} d_{11} &= [\varphi + (\Omega - \alpha)\psi]^2, \\ d_{22} &= [(\Omega - 2\alpha)\varphi - (\Omega^2 + \alpha\Omega - 2v^2)\psi]^2, \\ d_{12} &= d_{21} = [\varphi(\Omega - 2\alpha) - (\Omega^2 + \alpha\Omega - 2\alpha^2)\psi][\varphi + (\Omega - \alpha)\psi]. \end{aligned}$$

Опуская промежуточные вычисления, имеем:

$$D_{11} = \sigma^2 \left[ 1 - \frac{\Omega - \alpha}{v^2} (\Omega + \alpha \cos 2vh) e^{-2ah} \right],$$

$$D_{12} = -2\alpha\sigma^2 \frac{\Omega - \alpha}{v^2 \Omega^2} [\Omega^3 + \alpha^3 - e^{-2ah} (\Omega^3 + \alpha^3 \cos 2vh + v^3 \sin 2vh)],$$

$$D_{22} = \alpha\sigma^2 \frac{\Omega - \alpha}{v^2} \left\{ \alpha^2 - v^2 + \Omega^3 / \alpha - e^{-2ah} \left[ \Omega^3 / \alpha + (\alpha^2 - v^2) \cos 2vh + 2\alpha v \sin 2vh \right] \right\}$$

Таким образом, моделирование рассматриваемого процесса вновь осуществляется с помощью системы (12) с использованием соотношений (11).

### Список литературы

1. Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. — М.: Наука, 1980. — 368 с.
2. Фурунджиев Р.И. Вычислительная техника и ее применение. — Минск: Вицэйш. шк., 1984. — 461 с.

УДК 622.23.05:622.235

Б.М.Кенжин

Карагандинский государственный технический университет

### ТЕХНИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ВИБРАЦИОННО-СЕЙСМИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

*Мақала дiрiлдi-сейсмикалық құрылғының техникалық орнықтылығын талдау әдiсiн әзiрлеуге арналған. Механикалық жүйелердiң орнықтылығының классикалық теориясының негiзгi қағидаларына талдау жасау негiзiнде «техникалық орнықтылық» ұғымы қалыптасты, зерттеудiң негiзгi кезеңдерi және алдынгы нәтижелерi анықталды.*

*Paper is devoted elaboration of a method of the analysis of technical stability of vibration seismic devices. On the basis of the analysis of basic theses of classical theories of mechanical systems stability the concept «technical stability» is formulated, the basic investigation phases are developed and preliminary results are received.*

Сопоставление расчетных и истинных значений выходных показателей виброисточников, а также корреляционный анализ экспериментальных результатов свидетельствует, что их значения определяются не только ожидаемыми значениями параметров систем, но и их отклонениями от этих значений. Под «ожидаемыми» значениями в дальнейшем будем понимать значения, которые задаются при настройке параметров механической системы. Отклонения от ожидаемых параметров приводят к отклонению показателей источника, что отрицательно сказывается на устойчивости движения. Оценка отклонения выходных показателей может быть проведена с использованием основных положений устойчивости механических систем.

В настоящее время имеется достаточно исследований устойчивости механических систем [1]. Достоинствами алгебраических критериев устойчивости Рауса-Гурвица [2] и частотных критериев Найквиста, Михайлова и других [3] является то, что они позволяют исследовать устойчивость анализируемой системы без трудоемких приемов интегрирования. Однако при этом обнаруживается ряд недостатков:

- необходимость выполнения дополнительных расчетов, не относящихся непосредственно к получению информации о рабочих характеристиках изучаемых систем;
- малая физическая наглядность и сложность, как самих критериев, так и путей их использования при исследовании;
- необходимость привлечения дополнительных методов для выявления областей устойчивости.

Наиболее приемлемым к исследованию устойчивости механических систем, на наш взгляд, является комплексный метод, сформулированный в [1]. Для исследования устойчивости какого-либо режима движения предполагается, что он каким-либо образом нарушен, и движение описывается функ-