УДК 517.983.23

Л.К.Кусаинова, А.В.Ухман

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана

ОБ АСИМПТОТИКЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АППРОКСИМАТИВНЫХ ЧИСЕЛ ДВУХВЕСОВОГО ОПЕРАТОРА ХАРДИ С УСЛОВИЕМ ОБОБЩЕННОЙ МОНОТОННОСТИ. I.

Мақалада $L_p(R^+)$ Лебег кеңістігінен $L_q(R^+)$ Лебег кеңістігіне, мұндағы $R^+=(0,\infty)$, $1<p\le q<\infty$, әсер ететін, жалпыланған бір сарындылық шарттарымен берілген екісалмақты Харди операторы қарастырылған. «Локалды орта» терминінде $u(x)$ және $v(x)$ функцияларынан S операторының аппроксимативтік сандарының функцияларын санайтын жоғарғы бағалаулар алынған.

The Hardy integral operator $S: L_p(R^+)\to L_q(R^+)$ defined by is considered. Under general monotonic condition on u upper estimates for the counting function of the approximation numbers $a_n(S)$ are obtained when $1<p\le q<\infty$.

В работе рассматривается двухвесовой оператор Харди

$$Sf(x)=v(x)\int_0^x u(y)f(y)dy \tag{1}$$

с условием обобщенной монотонности, действующий из пространства Лебега $L_p(R^+)$ в $L_q(R^+)$, $R^+=(0,\infty)$, $1<p\le q<\infty$. В терминах локальных средних от $u(x)$ и $v(x)$ получены верхние оценки считающей функции аппроксимативных чисел оператора S.

Пусть E,F — пара банаховых пространств, $L(E,F)$ — совокупность всех линейных ограниченных операторов, действующих из E в F. Через $L_n(E,F)$ обозначим множество всех конечномерных операторов $A\in L(E,F)$, размерность образа которых $rank(A)\le n$. Величина

$$a_n(T)=\inf_{L\in L_n}\|T-A\|$$

называется n-ным аппроксимативным числом оператора $T\in L(E,F)$. Числа $a_n(T)$ являются наибольшими среди всех s-чисел, дающих нам информацию об аппроксимативных возможностях компактного оператора.

Сформулируем вначале результаты работы. Пусть Q — промежуток в $R=(-\infty,\infty)$. Через $L(Q,loc)$ обозначается пространство локально суммируемых в Q функций. Для измеримого $e\subset Q$ далее $|e|=\int_e dx$, $w(e)=\int_e wdx$, $\Delta=(a,b)$, $-\infty\le a<b\le\infty$; $\Delta^-=a$, $\Delta^+=b$, B — множество всех конечных $\Delta\subset R^+$. Положим $\Delta_h(x)=(x-h/2,x+h/2)$. Для $\alpha>0$ и $\Delta=\Delta_h(x)$ интервал $\alpha\Delta=\Delta_{\alpha h}(x)$. Далее $\Delta(x)=\left(\frac{x}{2},\frac{3x}{2}\right)$, $B^*=\bigcup_{x>0}\{\Delta:\Delta\subset\Delta(x)\}$. Пусть $f\in L(R^+,loc)$. Положим

$$M^*f(x)=\sup_{x\in\Delta\in B^*}\frac{1}{|\Delta|}\int_\Delta |f|\,dt.$$

Класс G^M. Будем говорить, что функция $\rho\in L([0,\infty);loc)$ удовлетворяет условию обобщенной монотонности, если существует такое $\theta>0$, что

$$\frac{1}{t}\int_0^t \rho dt\le\theta\rho(t) \text{ для любого } t>0.$$

Запись $\rho\in G^M$.

Очевидно, что G^M содержит все монотонно неубывающие веса ρ из $L([0,\infty),loc)$ с $\theta=1$.

В дальнейшем

$$K(\Delta)=\left(\int_{\Delta}|u|^{p'}\right)^{1/p'}\left(\int_{\Delta}|v|^{q}\right)^{1/q},\ p'=\frac{p}{p-1}.$$

Положим

$$K(x)=K(\Delta(x)).$$

Теорема 1. Пусть $1<p\le q<\infty$, $w_1=|u|^{p'}\in G^M$ и

$$K_{uv}=\sup_{x>0}K(x)<\infty.$$

Тогда оператор

$$S\in L\big(L_p(R^+)\big)\to L\big(L_q(R^+)\big).$$

При этом

$$\|S\|\le cK_{uv},\ c=c\big(p,q,\theta\big).$$

Положим

$$\varPhi\big(x\big)=\Big(M^*(|u|^{p'})(x)\Big)^{1/p'}\Big(M^*(|u|^{p'})(x)\Big)^{1/q}.$$

Обозначим через $N(\lambda;S)=\sum\limits_{a_n(S)>\lambda}1$ функцию распределения (считающую функцию) аппроксимативных чисел $a_n(S)$.

Теорема 2. Пусть $1<p\le q<\infty$, $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{p'}$, $w_1=|u|^{p'}\in G^M$, и пусть $\varPhi=\varPhi_{uv}\in L_r(R^+)$. Тогда имеет место оценка

$$N(\lambda;S)\le\left(\frac{c}{\lambda}\right)^r\int\limits_{\left\{x>0:x^{\frac{1}{r}}\varPhi(x)>c^{-1}\lambda\right\}}\varPhi^r(x)dx, \tag{2}$$

где $c=c(p,q,\theta)$.

Теорема 3. Пусть $1<p\le q<\infty$, $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{p'}$. Пусть функции u,v удовлетворяют условиям:

1) $|u|$ монотонно не убывает и $|u|(2x)\le\theta_1|u|(x),x>0,$

2) $\theta_2^{-1}\le\dfrac{|v(t)|}{|v(x)|}\le\theta_2$, если $t\in\Delta(x),x>0$,

3) $uv\in L_r(R^+)$.

Тогда справедлива оценка

$$N(\lambda;S)\le\left(\frac{c}{\lambda}\right)^r\int\limits_{\left\{x>0:x^{\frac{1}{r}}|u(x)v(x)|>c^{-1}\lambda\right\}}|uv|^r\,dx, \tag{3}$$

где $c=c(p,q,\theta_1,\theta_2)$.

Приведем здесь некоторые сравнения результатов данной работы с полученными ранее. Наиболее общие результаты, связанные с оценками асимптотики $a_n(S)$, содержатся на настоящее время в [1]. В частности, в [1] получены следующие оценки. Пусть $uv\in L_r(R^+)$ и

$$1<p\le q\le 2 \text{ либо } 2\le p\le q<\infty.$$

Тогда имеют место оценки

$$c_1C(u,v)\le\underline{\lim}\,n^{\frac{1}{r}}a_n(T)\le\overline{\lim}\,n^{\frac{1}{r}}a_n(T)\le c_2C(u,v),$$

где $c_i=c_i(p,q),C(u,v)=\left(\int_0^\infty|uv|^r\right)^{1/r}$. Нетрудно увидеть, что тогда

$$c_1C(u,v)\le n^{1/r}a_n(S)\le c_2C(u,v),\ n\ge n_0,$$

где n_0 некоторое, вообще говоря, неопределяемое натуральное число. Из теоремы 2 и 3 данной работы следует, что (в условиях теорем) для всех $n \ge 1$.

$$a_{n+1}(s) \le c\phi^{-1}(n),$$

где $\psi(\lambda) = \lambda^{-r} \int\limits_{\{x>0:x^{1/r}\Phi(x)>\lambda\}} \Phi^r dx.$.

Из (3) также следует предельное неравенство

$$\overline{\lim} n^{1/r} a_n(s) \le c(p,q,\theta_1,\theta_2)C(uv).$$

Лемма 1. ([2], §1.) Пусть $h(x)$ — положительная и ограниченная функция, определенная на ограниченном множестве $E \subset R^+$, и $0 < h(x) < x$ для любого $x > 0$. Тогда существует не более чем счетное семейство интервалов $\{\Delta_j, j \in J\}$, $\Delta_j = (x_j - h(x_j)/2, x_j + h(x_j)/2)$ кратности 2 и разделяющееся на не более чем 4 подсемейств $\{\Delta_j, j \in J_i\}$ непересекающихся интервалов.

Такие покрытия мы будем называть B-покрытиями.

Пусть ρ_1, ρ_2 веса на $\Delta = (a,b) \subset R^+$. Обозначим через $W_p^1(\Delta;\rho_1,\rho_2)$ пространство всех абсолютно непрерывных в R^+ функций F таких, что

$$\| F; W_p^1(\Delta;\rho_1,\rho_2) \| = \left(\int_a^b |F'|^p \rho_1 dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |F|^p \rho_2 dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Условие $\pi_{p,(\delta,\tau)}$. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $\tau > 0$. Будем говорить, что весовая пара (ρ_1, ρ_2) в R^+ удовлетворяет условию $\pi_{p,(\delta,\tau)}$, если для любого

$$M_\delta(x,\rho_1,\rho_2) \| = \left(\int\limits_{\Delta(x)} \rho_1^{1-p'} \right)^{1/p'} \inf_e \left(\int\limits_{\Delta(x)-e} \rho_2 dx \right)^{1/p} \ge \tau,$$

где $\inf$ берется по всем $e \subset \Delta(x)$ с $|e| \le \delta |\Delta(x)|$.

Лемма 2. [3, 1.5] Пусть $1 < p \le q < \infty$ и $(\rho_1, \rho_2) \in \pi_{p,(\delta,\tau)}$. Тогда для любого $\Delta = \Delta(x)$ справедливо неравенство

$$\left(\int\limits_\Delta |v(x)F(x)|^q \right)^{1/q} \le c \left(\int\limits_\Delta \rho^{1-p'} \right)^{1/p'} \left(\int\limits_\Delta |v|^q \right)^{1/q} \| F; W_p^1(\Delta;\rho_1,\rho_2) \|,$$

где $c = c(p,q,\delta,\tau)$.

Теорема А. [3, 1.8] Пусть $1 < p \le q < \infty$, $(\rho, w) \in \pi_{p,(\delta,\tau)}$ и

$$K_{\rho,v} = \sup_{x>0} \left(\int\limits_{\Delta(x)} \rho^{1-p'} \right)^{1/p'} \left(\int\limits_{\Delta(x)} |v|^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Тогда имеет место оценка

$$\| F; L_{q,v} \| \le c K_{\rho,v} \| F; W_p^1(R^+;\rho_1,\rho_2) \|, \tag{4}$$

где $c = c(p,q,\delta,\tau)$.

В (4) весовая норма

$$\| F; L_{qv} \| = \left(\int_0^\infty |v(x)F|^q \, dx \right)^{1/q}.$$

Теорема В. [4, 1.3] Пусть $1 < p \le q < \infty$. Тогда конечная постоянная C_0 в неравенстве

$$\left(\int_0^\infty |w(x) \int_0^x g|^q \, dx \right)^{1/q} \le C_0 \left(\int_0^\infty |\rho g|^p \, dx \right)^{1/p}$$

эквивалентна величине

$$C = \sup_{x>0} \left(\int_0^x |\rho|^{-p'} \right)^{1/p'} \left(\int_x^\infty |w|^q \right)^{1/q}.$$

Лемма 3. Пусть $|u|^{p'} \in G^M, \rho = |u|^{-p}, w^p = (p-1)|u|^{p'} U^{-p}$, где $U(x) = \int_0^x |u|^{p'}$. Тогда весовая пара $(\rho, w^p) \in \pi_{p,(\delta,\tau)}$.

Доказательство леммы 3. Для любого $\Delta = \Delta(x)$ и $e \subset \Delta$ с $|e| \le |\Delta|$ в силу условия $|u|^{p'} \in G^M$

$$M_\delta(x;p,w) = \left(\int_{\Delta(x)} \rho\right)^{1/p'} \inf_e \left(\int_{\Delta(x)-e} w^p\right)^{1/p} \ge \frac{2}{3}(p-1)^{1/p}\theta^{-1}\frac{1}{|\Delta|}\left(\int_{\Delta(x)} |u|^{p'}\right)^{1/p'} \inf_e \left(\int_{\Delta(x)-e} |u|^{-p}\right)^{1/p} \ge$$

$$\ge \frac{2}{3}(p-1)^{1/p}\theta^{-1}\frac{|\Delta - e|}{|\Delta|} \ge \tau, \quad ,$$

где $\tau = \frac{2}{3\theta}(1-\delta)(p-1)^{1/p}$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $0 \ne f \in L_p$, $F(x) = \int_0^x fu.$ Тогда

$$\frac{\|Sf\|_q}{\|f\|_p} = \|F; L_{q,v}\| \left(\int_0^\infty \left|\frac{1}{u}F'\right|^p\right)^{-1/p}. \tag{5}$$

Рассмотрим неравенство

$$\int_0^\infty |wF|^p\, dx \le C_0^p \int_0^\infty \left|\frac{1}{u}F'\right|^p dx, C_0 < \infty. \tag{6}$$

Полагая $g = u^{-1}F'$, перепишем (6) в виде:

$$\int_0^\infty \left| w\int_0^x ug\right|^p dx \le C_0^p \int_0^\infty |g|^p\, dx.$$

В силу теоремы В существует $c_1 = c_1(p,q)$ такое, что

$$C_0 \le c_1 \sup_{x>0} U^{1/p'}(x)\left(\int_x^\infty w^p dx\right)^{1/p} < \infty,$$

где $U(x) = \int_0^x |u|^{p'}$. Функцию w^p зададим через условие

$$\int_x^\infty w^p dx = U^{-p/p'}(x) \text{ для любого } x > 0. \tag{7}$$

Дифференцируя (7), получим, что $w^p = (p-1)|u|^{p'} U^{-p}$. Итак, для w^p в (7) и $\rho = |u|^{-p}$

$$\|F; W_p^1(R^+;\rho,w^p)\| \le (1+c_1)\left\|\frac{1}{u}F'\right\|_p. \tag{8}$$

При этом пара $(\rho, w^p) \in \pi_{p,(\delta,\tau)}$. Но тогда из теоремы А и (8) следует, что

$$\|S; L_p(R^+) \to L_q(R^+)\| \le \sup_{\|f\|_p \le 1} \frac{\|F\|_{q,v}}{\left\|\frac{1}{u}F'\right\|_p} \le (1+c_1) \sup_{F \in W_p^1(\rho,w)} \frac{\|F\|_{q,v}}{\|F; W_p^1(\rho, w^p)\|} \le cK_{u,v},$$

где $c = c(p,q,\theta,\delta)$.

Положим

$$R_\Delta f(x) = v(x)\int_a^x fu - \frac{1}{|v|^q(\Delta)}\int_\Delta \left|v(x)\int_a^x fu\right|^q dx, \quad \Delta = (a,b).$$

Лемма 4. [1, 2.1] Пусть $1 < p \le q < \infty$, $\Delta = (a,b) \in B.$ Норма

$$\|R_\Delta; L_p(\Delta) \to L_q(\Delta)\| \le \theta_0 K(\Delta), \tag{9}$$

где постоянная $\theta_0 = \theta_0(p,q)$.

Лемма 5. Пусть $1 < p \le q < \infty$, $w_1 = |u|^{p'} \in G^M$, $\Omega_\lambda = \{x > 0 : K(x) > \lambda\} \ne \varnothing$ и пусть

$$\lim_{x\to 0} K(x) = \lim_{x\to\infty} K(x) = 0.$$

Тогда существует конечномерный оператор $L : L_p(R^+) \to L_q(R^+)$ такой, что

$$\| S - L \| \le c\lambda. \tag{10}$$

При этом

$$rank(L) \le 4\lambda^{-r} \int\limits_{\left\{x>0:x^{\frac{1}{r}}\Phi(x)>c^{-1}\lambda\right\}} \Phi^r(x)dx \tag{11}$$

Постоянная $c = c(p,q,\theta)$.

Доказательство леммы 5. Пусть $0 < a_\lambda < b_\lambda < \infty$ такие числа, что

$$K(x) \le \lambda, \text{ если } 0 < x \le a_\lambda \text{ либо } x \ge b_\lambda.$$

Пусть $\{\Delta_j, j \in J\}$ — B-покрытие Ω_λ интервалами $\Delta_j = \Delta\,(x_j)$. Поскольку $K(\Delta_j) > \lambda$ и все $\Delta_j \subset \left(\frac{1}{2}a_\lambda, \frac{3}{2}a_\lambda\right)$, то $card(J) < \infty$. Семейство $\{\Delta_j, j \in J\}$ запишем в виде $\{\Delta_{m_j}, j \in J\}$, $card(J) = n$ по возрастанию центров x_{m_j}. Имеем здесь два случая:

(i) Δ_{m_j} не пересекаются,

(ii) найдутся такие j, $j+1$ что $\Delta^+_{m_j} > \Delta^-_{m_{j+1}}$.

В случае (i) полагаем $Q_j = \Delta_{m_j}$. В случае (ii) совокупность интервалов $\{\Delta_{m_j}\}$ мы можем разбить на m, $1 \le m \le n$, групп $\{\Delta_{m_j}, j \in \Lambda_l\}$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\Delta^+_{m_k} < \Delta^-_{m_j} \text{ если } m_k \in \Lambda_s, m_j \in \Lambda_l, s < l.$$

Положим

$$b_i = \max_{j\in\Lambda_i} \Delta^+_{m_j}, \mathop{mix}_{j\in\Lambda_i} \Delta^-_{m_j} = a_i.$$

Заметим, что $a_1 \le a_\lambda$, $b_1 \ge b_\lambda$. Если $m = 1$, то $a_i = \Delta^-_i$, $b_i = \Delta^+_i$.

Представим R^+ как $R^+ = (0,a_1] \cup (a_1,b_1) \cup (b_1,a_2) \cup (a_2,b_1) \cup \ldots \cup (a_m,b_m) \cup [b_m,\infty)$. В случае $m = 1$ поступаем следующим образом. Образуем промежутки $Q_1 = \Delta_{m_1}, Q_j = \Delta_{m_j} - \Delta_{m_{j-1}}$ при $1 < j \le n.$ Каждому Q_j соотнесем оператор $L_j = \chi_j S - R_j$, где $\chi_j = \chi Q_j$, а $R_j = R_{Q_j}$. Положим $L = \sum_{j=1}^{n} L_j$. Заметим, что $rank(L) = n$. Далее мы будем также использовать B-покрытие $\{\Delta_k, k \in J^1\}$ множества $\Omega^b_\lambda = \{0 < x < b, x \notin Q_j, 1 \le j \le n\}, b > b_1.$ Для произвольного $f \in L_p c \| f \|_p = \left\| \frac{1}{u} F' \right\|_p \le 1,$ где $F(x) = \int\limits_0^x fu$.

В силу леммы 1 и лемм 2 и 3

$$\int\limits_0^b \left|Sf - Lf\right|^q dx \le \sum_{k\in J^1} \int\limits_{\Delta_k} \left|Sf\right|^q dx + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{Q_j} \left|Sf - L_j f\right|^q dx = \sum_{k\in J^1} \int\limits_{\Delta_k} \left|\upsilon(x)F\right|^q dx + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{Q_j} |R_j(f\chi_j)|^q \, dx \le$$

$$\le c_1 \sum_{k\in J^1} K(\Delta_j)^q \left\|F; W^1_p(\Delta_k; p, \omega^p)\right\|^q + c_2 \sum_{j=1}^{n} K(\Delta_j)^q \left(\int\limits_{Q_j} |f|^p\right)^{q/p} \le 2^{3q} c_1 \lambda^q \left(\left\|\frac{1}{u}F'\right\|^p_p + \left\|\varpi F\right\|^p_p\right)^{q/p} \le$$

$$\le \left(c_1 2^{3q}\left(1 + c^p_0\right)^q + c_2\right)\lambda^q \left\|f\right\|^q_p \le \left(c_3\lambda\right)^q,$$

где $c_3 = c_3(p,q,\theta)$. Осталось перейти к пределу при $b \to \infty$.

Если $m>1$, то вначале мы выстроим группы полупромежутков $\left\{Q_{l_j}, 1\le j\le n_l\right\}$, где $Q_{11}=\Delta_{m_1}$, $Q_{1j}=\Delta_{m_j}-\Delta_{m_{j-1}}$, $1<j\le n_1$, $n_1=card(\Lambda_1)$, $Q_{21}=\Delta_{m_{m_1+1}}$, $Q_{2j}=\Delta_{m_{m_1+j}}-\Delta_{m_{m_1+i-1}}$, $2\le j\le n_2$, $n_2=card(\Lambda_2)$ и т.д. до группы $\left\{Q_{mj},1\le j\le n_m\right\}$, $n_m=card(\Lambda_m)$. Каждой группе промежутков $\left\{Q_{i_j},1\le j\le n_i\right\}$ соотнесем сумму операторов $\sum\limits_{j=1}^{n_i} L_{lj}$, где $L_{lj}=\chi_{lj}S-R_{lj}, \chi_{lj}=\chi_{Q_{lj}}, R_{lj}=R_{Q_{lj}}$. Положим $L=\sum\limits_{l=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n_l}L_{lj}$. Множество $\Omega_\lambda\subset\bigcup\limits_{l=1}^{m}\bigcup\limits_{j=1}^{n_l}Q_{lj}$, поэтому $K(x)\le\lambda$ для всех

$$x\in\Omega_\lambda^b=\left\{0<x<b, x\notin Q_{lj}, 1\le l\le m, 1\le j\le n_l\right\},\quad b>\max_l b_l.$$

Далее, аналогично случаю (i) выводим оценку (10). Из определения $\Phi(t)$ следует, что для любого $t\in\Delta(x), x\in\Omega_\lambda$

$$x\Phi^r(t)\ge\left|\Delta(x)\right|\left(\frac{1}{|\Delta(x)|}\int\limits_{\Delta(x)}|u|^{p'}\right)^{r/p'}\left(\frac{1}{|\Delta(x)|}\int\limits_{\Delta(x)}|v|^{q}\right)^{r/q}=K^r(x)>\lambda^r.$$

Пусть $\left\{\Delta_j, j\in J_i\right\}$ подсемейства непересекающихся интервалов покрытия $\left\{\Delta_j, j\in J\right\}$. В любом из рассматриваемых случаев

$$rank(L)=n\le\sum_i\sum_{j\in J_i}\lambda^{-r}K(\Delta_j)\le 4\lambda^{-r}\max_j\sum_{j\in J_i}\int\limits_{\Delta_j}\Phi^r dt\le 4\lambda^{-r}\int\limits_{\left\{x^{-\frac{1}{r}}\Phi(x)>\lambda\right\}}\Phi^r(t)dt.$$

Доказательство теоремы 2. Из определения M^*f следует, что для любого $t\in\Delta(x)$

$$K^r(x)=\left(\frac{1}{|\Delta(x)|}\int\limits_{\Delta(x)}|u|^{p'}\right)^{r/p'}\left(\frac{1}{|\Delta(x)|}\int\limits_{\Delta(x)}|v|^{q}\right)^{r/q}\Delta(x)|\le|\Delta(x)|\Phi^r(t).$$

Поэтому $K^r(x)\le\int\limits_{\Delta_j}\Phi^r(x)$. Теперь нетрудно вывести, что условие $\Phi=\Phi_{uv}\in L_r(R^+)$ влечет равенство

$$\lim_{x\to 0}K(x)=\lim_{x\to\infty}K(x)=0.$$

Если $K(x)\le\lambda$ для всех $x>0$, то в силу теоремы 1 $a_0(S)=\|S\|\le c_1\lambda$, где $c_1=c_1(p,q,\theta)$. Следовательно, $N(c_1\lambda;S)=0$. Пусть теперь Ω_λ не пусто. Обращаясь к лемме 5, запишем оценку $a_n(S)\le c_2\lambda$, где n подчинено оценке (11), но тогда

$$N(c\lambda;S)\le N(c_2\lambda;S)\le 4\lambda^{-r}\int\limits_{\left\{x>0: x^{\frac{1}{r}}\Phi(x)>c^{-1}\lambda\right\}}\Phi^r(x)dx,,$$

где $c=\max\left\{4,c_1,c_2\right\}=c\left(p,q,\theta\right)$. Замена $\lambda'=c\lambda$ приводит к требуемой оценке.

Доказательство теоремы 3. Пусть $x\in\Delta\in B^*$, т.е. существует такое $\Delta(y)$, что $x\in\Delta\subset\Delta(y)$. Из условия 1) теоремы 3 следуют оценки

$$\frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{\Delta}|u|^{p'}\le|u|^{p'}(\Delta^+)\le\theta_1^{2p'}|u|^{p'}(x),$$

откуда имеем

$$\left[\left(M^*|u|^{p'}\right)(x)\right]^{1/p'}\le\theta_1^2|u(x)|. \tag{12}$$

Из условия 2) теоремы 3 следует, что

$$\left(\frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{\Delta}|v|^{q}\right)^{1/q}\le\theta_2|v(y)|\le\theta_2^2|v(x)|,$$

откуда

$$\left[\left(M^*|v|^{q}\right)(x)\right]^{1/q}\le\theta_2^2|v(x)|. \tag{13}$$

Функция $|u|^{p'} \in G^M$ с $\theta = 1$, а из (12), (13) и условия 3) теоремы 3 непосредственно вытекает, что:

$$\Phi \in L_r(R^+) \text{ и } \left(\frac{c}{\lambda}\right)^r \int\limits_{\left\{x>0: x^{\frac{1}{r}}\Phi(x)>c^{-1}\lambda\right\}} \Phi^r(x)dx \le \left(\frac{\theta_1\theta_2 c}{\lambda}\right)^r \int\limits_{\left\{x>0: x^{\frac{1}{r}}|uv|(x)>(\theta_1\theta_2 c)^{-1}\lambda\right\}} |uv|^r\, dx.$$

Теперь мы можем утверждать, что (3) следует из (2).

Список литературы

1. *Ломакина Е.Д.* Оценки характеристических чисел интегральных операторов: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. — Хабаровск, 2006.
2. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов. — М., 1978.
3. *Кусаинова Л.К.*// Дис. … д-ра физ.-мат. наук. — Алма-Аты, 1999.
4. *Мазья В.Г.* Пространства Соболева. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. — С. 416.

УДК 517.983.23

А.В.Ухман

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана

ОБ ОЦЕНКАХ СНИЗУ СЧИТАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ АППРОКСИМАТИВНЫХ ЧИСЕЛ ДВУХВЕСОВОГО ОПЕРАТОРА ХАРДИ С УСЛОВИЕМ ОБОБЩЕННОЙ МОНОТОННОСТИ. II.

Мақалада $L_p(R^+)$ Лебег кеңістігінен $L_q(R^+)$ Лебег кеңістігіне, мұндағы $R^+ = (0,\infty)$, $1 < p \le q < \infty$, әсер ететін, екісалмақты Харди операторы қарастырылған. u және v функциялары реттіліктің анықталған локалдық шарттарын қанағаттандырған жағдайда орта шамамен екісалмақты Харди операторының аппроксимативтік сандарының функцияларын санайтын төменгі бағалалары алынған.

The Hardy integral operator $S: L_p(R^+) \to L_q(R^+)$ defined by is considered. Under local regular conditions on u and v lower estimates for the counting function of the approximation numbers $a_n(S)$ are obtained, when $1 < p \le q < \infty$.

В работе рассматривается двухвесовой оператор Харди

$$Sf(x) = v(x)\int_0^x ufdy, \tag{1}$$

действующий из пространства Лебега $L_p(R^+)$ в $L_p(R^+)$, $R^+ = (0,\infty)$, $1 < p \le q < \infty$. Для случая, когда функции u и v удовлетворяют определенным локальным условиям регулярности в среднем получены нижние оценки считающей функции (функции распределения) аппроксимативных чисел оператора (1).

Пусть E, F — пара банаховых пространств, $L(E,F)$ — совокупность всех линейных ограниченных операторов, действующих из E в F. Через $L_n(E,F)$ обозначим множество всех конечномерных операторов $A \in L(E,F)$, размерность образа которых $rankA \le n$. Величина

$$a_n(S) = \inf_{L \in L_n} \| T - A \|$$

называется n-ным аппроксимативным числом оператора $T \in L(E,F)$.