

А.Х. Агтаев¹, С.А. Искаков², М.И. Рамазанов²

¹Институт прикладной математики и автоматизации, Нальчик, Россия;
²Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова, Казахстан
 (E-mail: isagyndyk@mail.ru)

Граничная задача для дробно-нагруженного уравнения Лаврентьева-Бицадзе

В статье исследована граничная задача для дробно-нагруженного уравнения Лаврентьева-Бицадзе в прямоугольной области, с нелокальными граничными условиями. Подобные граничные задачи изучались в работах [1-3]. Задача, исследуемая в этой работе, отличается от рассмотренных ранее тем, что, во-первых, область в гиперболической части является не характеристической, а во-вторых, в уравнении имеются дробно-нагруженные слагаемые, что позволяет выявить некоторые особенности рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: граничная задача, нагруженные уравнения, дробная производная, метод разделения переменных.

1 Постановка задачи

Пусть $Q_1 = \{x, t | 0 < x < 2\pi, 0 < t < T\}$, $Q_2 = \{x, t | 0 < x < 2\pi, -T < t < 0\}$, $Q = Q_1 \cup Q_2$. В области Q рассматривается следующая граничная задача:

$$\begin{cases} -D_t^2 u^{(1)}(x, t) - D_x^2 u^{(1)}(x, t) + \lambda_1 D_t^{\frac{1}{2}} u^{(1)}(x, t_1) = f^{(1)}(x, t), & (x, t) \in Q_1; \\ D_t^2 u^{(2)}(x, t) - D_x^2 u^{(2)}(x, t) + \lambda_2 u^{(2)}(x, t_2) = f^{(2)}(x, t), & (x, t) \in Q_2. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p u^j(0, t)}{\partial x^p} &= \frac{\partial^p u^j(2\pi, t)}{\partial x^p}; \\ \frac{\partial^p u^{(1)}(x, T)}{\partial t^p} &= \mu_p \frac{\partial^p u^{(2)}(x, -T)}{\partial t^p}, p = 0, 1. \end{aligned}$$

То есть, при $(x, t) \in Q_1$ будем иметь

$$-\frac{\partial^2 u^{(1)}(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^{(1)}(x, t)}{\partial x^2} + \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u^{(1)}(x, t_1) = f^{(1)}(x, t); \quad (2)$$

$$\begin{cases} u^{(1)}(0, t) = u^{(1)}(2\pi, t); \\ \frac{\partial u^{(1)}(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u^{(1)}(2\pi, t)}{\partial x}; \end{cases} \quad (3)$$

и при $(x, t) \in Q_2$

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^{(2)}(x, t)}{\partial x^2} + \alpha_2 u^{(2)}(x, t_2) = f^{(2)}(x, t), \quad (4)$$

$$\begin{cases} u^{(2)}(0, t) = u^{(2)}(2\pi, t); \\ \frac{\partial u^{(2)}(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u^{(2)}(2\pi, t)}{\partial x}; \end{cases} \quad (5)$$

также предполагаем выполнение условий

$$\begin{cases} u^{(1)}(x, T) = \mu_0 u^{(2)}(x, -T); \\ \frac{\partial u^{(1)}(x, T)}{\partial t} = \mu_1 \frac{\partial u^{(2)}(x, -T)}{\partial t}, \end{cases} \quad (6)$$

где $D_t^{\frac{1}{2}} u^{(1)}(x, t_1)$ — дробная производная в смысле Римана-Луивилля порядка $1/2$ на линии $t = t_1$.

Далее положим, что:

$$\begin{cases} T < +\infty, & f^{(1)} \in L_1(Q_1), & f^{(2)} \in L_2(Q_2), & \mu_0, \mu_1 \in C; \\ \alpha_1, \alpha_2 \in C, & t_1 \in (0, T), & t_2 \in (-T, 0) \end{cases} \quad (7)$$

— заданные функции и числа.

Заданное уравнение (1) является уравнением смешанного (эллиптико-гиперболического) типа, а из-за наличия слагаемого $\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u^{(1)}(x, t_1)$ его называют дробно-нагруженным. Основная цель данного исследования – изучить вопросы L_2 -сильной разрешимости граничных задач (2)–(6) при условиях (7).

2 Критерий однозначно сильной разрешимости

Для решения задачи (1) введем следующее обозначение:

$$s \in S = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\};$$

$$\Delta_s = \begin{pmatrix} \frac{\sin sT + \mu_1 shsT}{s} & \cos sT - \mu_0 chsT & \alpha_2 \cdot \frac{\cos sT - 1}{s^2} & \alpha_1 \cdot \frac{1 - chsT}{s^2} \\ \cos sT - \mu_1 chsT & s(-\sin sT + \mu_0 shsT) & -\alpha_2 \frac{\sin sT}{s} & \alpha_1 \cdot \frac{shsT}{s} \\ \alpha_2 \frac{\sin s(t_2+T)}{s} & \alpha_2 \cos s(t_2+T) & -1 - \alpha_2 \frac{1 - \cos s(t_2+T)}{s^2} & 0 \\ A_{41} & A_{42} & 0 & A_{44} \end{pmatrix},$$

где

$$A_{41} = \alpha_1 \cdot \mu_1 \left(\frac{1}{s\sqrt{\pi t_1}} \cdot shsT - \frac{1}{2\sqrt{s}} \cdot e^{s(t_1-T)} \cdot erf\sqrt{st_1} - \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \cdot e^{sT} \cdot daw\sqrt{st_1} \right);$$

$$A_{42} = \alpha_1 \cdot \mu_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}} \cdot chsT - \frac{\sqrt{s}}{2} \cdot e^{s(t_1-T)} \cdot erf\sqrt{st_1} + \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{sT} \cdot daw\sqrt{st_1} \right);$$

$$A_{44} = 1 + \frac{\alpha_1}{s^2} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}} + \frac{1}{\sqrt{\pi t_1}} \cdot chsT - \frac{\sqrt{s}}{2} \cdot e^{s(t_1-T)} \cdot erf\sqrt{st_1} + \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{sT} daw\sqrt{st_1} \right].$$

Здесь

$$erf x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt, \quad daw x = \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) dt.$$

Теорема 1. Для любых $f^j, \mu_p, \alpha, t_k, T$, удовлетворяющих требованиям (7), граничные задачи (2)–(6) имеют единственное L_2 -сильное решение тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$|\Delta_s| \neq 0; \quad s \in S. \quad (8)$$

Условие (8) в терминах данных (7) дает полное описание корректных граничных задач вида (2)–(6).

Следствие. Пусть при условиях теоремы 1 в уравнении (1) отсутствуют нагруженные слагаемые, т.е. $\alpha_k = 0, k = 1, 2$. Тогда для того, чтобы граничные задачи (2)–(6) имели единственное L_2 -сильное решение, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\begin{vmatrix} \frac{\sin sT + \mu_1 shsT}{s} & \cos sT - \mu_0 chsT \\ \cos sT - \mu_1 chsT & s(-\sin sT + \mu_0 shsT) \end{vmatrix} \neq 0; \quad s \in S. \quad (9)$$

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы будем проводить методом разделения переменных, т.е. ищем решение задач (2)–(6) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x, t) &= \sum_{s \in S} u_s^{(1)}(t) \cdot \exp\{is \cdot x\}; \\ u^{(2)}(x, t) &= \sum_{s \in S} u_s^{(2)}(t) \cdot \exp\{is \cdot x\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Учтем соответствующие разложения для правых частей уравнений (2), (4)

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x, t) &= \sum_{s \in S} f_s^{(1)}(t) \exp\{is \cdot x\}; \\ f^{(2)}(x, t) &= \sum_{s \in S} f_s^{(2)}(t) \exp\{is \cdot x\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Граничные задачи (2)–(6) можно свести к изучению краевых задач для счетной системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\frac{d^2 u_s^{(1)}(t)}{dt^2} + s^2 u_s^{(1)}(t) + \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1) = f_s^{(1)}(t) \text{ при } t \in (0; T); \quad (12)$$

$$\frac{d^2 u_s^{(2)}(t)}{dt^2} + s^2 u_s^{(2)}(t) + \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2) = f_s^{(2)}(t) \text{ при } t \in (-T; 0); \quad (13)$$

$$\begin{cases} u_s^{(1)}(T) = \mu_0 u_s^{(2)}(-T) \\ \frac{du_s^{(1)}(T)}{dt} = \mu_1 \frac{du_s^{(2)}(-T)}{dt} \end{cases} \quad (14)$$

Введем системы чисел $\{\nu_s, s \in S\}$, $\{\varphi_s, s \in S\}$, пока временно неизвестные, с помощью которых вместо задач (12)–(14) будем рассматривать следующие граничные задачи:

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u_s^{(1)}(t)}{dt^2} + s^2 u_s^{(1)}(t) + \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1) = f_s^{(1)}(t), & t \in (0; T), \\ u_s^{(1)}(T) = \mu_0 \nu_s & \frac{du_s^{(1)}(T)}{dt} = \mu_1 \varphi_s, & s \in S. \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_s^{(2)}(t)}{dt^2} + s^2 u_s^{(2)}(t) + \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2) = f_s^{(2)}(t), & t \in (-T; 0), \\ u_s^{(2)}(-T) = \nu_s & \frac{du_s^{(2)}(-T)}{dt} = \varphi_s, & s \in S. \end{cases} \quad (16)$$

Найдем решение уравнения (15). Перенесем нагруженное слагаемое в правую сторону, обозначим $f_s^{(1)}(t) - \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1) = F_s^{(1)}(t)$ и будем считать $F_s^{(1)}(t)$ временно известной, тогда уравнение (15) будет иметь следующий вид:

$$-\frac{d^2 u_s^{(1)}(t)}{dt^2} + s^2 u_s^{(1)}(t) = F_s^{(1)}(t). \quad (17)$$

Решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$u_{o.o.} = C_1 e^{-st} + C_2 e^{st} = C_1 ch st + C_2 sh st.$$

Для получения частного решения неоднородного уравнения воспользуемся методом Коши:

$$K(t, \tau) = C_1(\tau) chst + C_2(\tau) shst; \quad (18)$$

$$\begin{cases} K(t, \tau)|_{t=\tau} = C_1(\tau) chs\tau + C_2(\tau) shs\tau = 0; \\ K'_t(t, \tau)|_{t=\tau} = C_1(\tau) shs\tau + C_2(\tau) chs\tau = \frac{1}{s}. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} chs\tau & shs\tau \\ shs\tau & chs\tau \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & shs\tau \\ \frac{1}{s} & chs\tau \end{vmatrix} = -\frac{shs\tau}{s}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} chs\tau & 0 \\ shs\tau & \frac{1}{s} \end{vmatrix} = \frac{chs\tau}{s}.$$

Найдем отсюда

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{shs\tau}{s}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{chs\tau}{s}.$$

Подставим найденные C_1, C_2 в соотношение (18), получим

$$K(t, \tau) = -\frac{1}{s} [shst \cdot chs\tau - chst \cdot shs\tau] = \frac{1}{s} shs(t - \tau).$$

Таким образом, частное решение будет иметь вид

$$u_s^{(1)} \text{ ч.р.}(t) = \int_t^T \frac{sh(t - \tau)}{s} \cdot F_s^{(1)}(\tau) d\tau.$$

Теперь запишем общее решение уравнения (17)

$$\begin{aligned} u_{o.p.}^{(1)} &= C_1 ch st + C_2 sh st + \int_t^T \frac{sh s(t - \tau)}{s} \cdot F_s^{(1)}(\tau) d\tau = \\ &= C_1 ch st + C_2 sh st + \int_t^T \frac{sh s(t - \tau)}{s} \cdot f_s^{(1)}(\tau) d\tau - \int_t^T \frac{sh s(t - \tau)}{s} \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1) d\tau. \end{aligned} \quad (19)$$

Прделаем тоже самое с уравнением (16), получим решение однородного уравнения $u_{o.o.} = \tilde{C}_1 \cos st + \tilde{C}_2 \sin st$, общее решение которого имеет вид

$$u_{o.p.}^{(2)} = \tilde{C}_1 \cos st + \tilde{C}_2 \sin st + \int_{-T}^t \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \cdot F_s^{(2)}(\tau) d\tau = \tilde{C}_1 \cos st + \tilde{C}_2 \sin st + \int_{-T}^t \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \cdot f_s^{(2)}(\tau) d\tau - \int_{-T}^t \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2) d\tau. \quad (20)$$

Теперь найдем C_1, C_2 и \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 из условий (15)–(16) $u_s^{(1)}(T) = \mu_0 \nu_s, \frac{du_s^{(1)}(T)}{dt} = \mu_1 \varphi_s, s \in S$ и $u_s^{(2)}(-T) = \nu_s, \frac{du_s^{(2)}(-T)}{dt} = \varphi_s, s \in S$.

Тогда

$$u_s^{(1)}(T) = C_1 ch sT + C_2 sh sT = \mu_0 \nu_s, \\ \frac{du_s^{(1)}(T)}{dt} = sC_1 shsT + sC_2 chsT = \mu_1 \varphi_s.$$

отсюда находим C_1, C_2

$$C_1 = \mu_0 \nu_s chsT - \frac{\mu_1 \varphi_s}{s} \cdot shsT, \\ C_2 = \frac{\mu_1 \varphi_s}{s} \cdot chsT - \mu_0 \nu_s \cdot shsT$$

и из соотношений

$$u_s^{(2)}(-T) = \tilde{C}_1 \cos s(-T) + \tilde{C}_2 \sin s(-T) = \nu_s, \\ \frac{du_s^{(2)}(-T)}{dt} = -s\tilde{C}_1 \sin s(-T) + s\tilde{C}_2 \cos s(-T) = \varphi_s$$

находим \tilde{C}_1, \tilde{C}_2

$$\tilde{C}_1 = \nu_s \cos s(-T) - \frac{\varphi_s}{s} \sin s(-T), \\ \tilde{C}_2 = \frac{\varphi_s}{s} \cos s(-T) + \nu_s \sin s(-T).$$

Найденные C_1, C_2 и \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 подставляем в (19) и (20) соответственно, получаем следующие представления:

$$u_s^{(1)}(t) = \mu_0 \nu_s ch s(t-T) + \frac{\mu_1 \varphi_s}{s} sh s(t-T) + \int_t^T \frac{sh s(t-\tau)}{s} \cdot F_s^{(1)}(\tau) d\tau = \\ = \mu_0 \nu_s ch s(t-T) + \frac{\mu_1 \varphi_s}{s} sh s(t-T) + \int_t^T \frac{sh s(t-\tau)}{s} \cdot f_s^{(1)}(\tau) d\tau - \\ - \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1) \frac{1 - chs(t-T)}{s^2} \quad (21)$$

и

$$u_s^{(2)}(t) = \nu_s \cos s(t+T) + \frac{\varphi_s}{s} \sin s(t+T) + \int_{-T}^t \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \cdot f_s^{(2)}(\tau) d\tau - \\ - \int_{-T}^t \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2) d\tau = \nu_s \cos s(t+T) + \frac{\varphi_s}{s} \sin s(t+T) + \\ + \int_{-T}^t \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \cdot f_s^{(2)}(\tau) d\tau - \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2) \cdot \frac{1 - \cos s(t+T)}{s^2}. \quad (22)$$

В этих представлениях неизвестными являются

$$\nu_s, \varphi_s, \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1), \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2).$$

Для их нахождения используем представления (21) и (22). Вначале найдем представления для производных решений задач (15) и (16):

$$\begin{aligned} \frac{du_s^{(1)}(t)}{dt} &= \int_t^T f_s^{(1)}(\tau) \cdot chs(t-\tau) d\tau + \mu_1 \varphi_s \cdot chs(t-T) + \\ &+ \mu_0 \nu_s \cdot s \cdot shs(t-T) + \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1) \frac{shs(t-T)}{s}. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_s^{(2)}(t)}{dt} &= \int_{-T}^t f_s^{(2)}(\tau) \cdot \cos s(t-\tau) d\tau + \varphi_s \cdot \cos s(t+T) - \\ &- \nu_s \cdot s \cdot \sin s(t+T) - \alpha_1 u_s^{(2)}(t_2) \frac{\sin s(t+T)}{s}. \end{aligned} \quad (24)$$

Далее, используя условия сопряжения

$$\begin{cases} u_s^{(1)}(0+) = u_s^{(2)}(0-) \\ \frac{du_s^{(1)}(0+)}{dt} = \frac{du_s^{(2)}(0-)}{dt} \end{cases},$$

на линии $t = 0$ в области Q получим

$$\begin{aligned} \mu_0 \nu_s chs(-T) + \frac{\mu_1 \varphi_s}{s} shs(-T) + \int_0^T \frac{shs(-\tau)}{s} \cdot f_s^{(1)}(\tau) d\tau - \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1) \frac{1 - chs(-T)}{s^2} = \\ = \nu_s \cos sT + \frac{\varphi_s}{s} \sin sT + \int_{-T}^0 \frac{\sin s(-\tau)}{s} \cdot f_s^{(2)}(\tau) d\tau - \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2) \cdot \frac{1 - \cos sT}{s^2} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^T f_s^{(1)}(\tau) \cdot chs(-\tau) d\tau + \mu_1 \varphi_s \cdot chs(-T) + \mu_0 \nu_s \cdot s \cdot shs(-T) + \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1) \frac{shs(-T)}{s} = \\ = \int_{-T}^0 f_s^{(2)}(\tau) \cdot \cos s(-\tau) d\tau + \varphi_s \cdot \cos sT - \nu_s \cdot s \cdot \sin sT - \alpha_1 u_s^{(2)}(t_2) \frac{\sin sT}{s}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \mu_0 \nu_s chsT - \frac{\mu_1 \varphi_s}{s} shsT - \int_0^T \frac{shs\tau}{s} \cdot f_s^{(1)}(\tau) d\tau - \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1) \frac{1 - chsT}{s^2} = \\ = \nu_s \cos sT + \frac{\varphi_s}{s} \sin sT - \int_{-T}^0 \frac{\sin s\tau}{s} \cdot f_s^{(2)}(\tau) d\tau - \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2) \cdot \frac{1 - \cos sT}{s^2} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^T f_s^{(1)}(\tau) \cdot chs\tau d\tau + \mu_1 \varphi_s \cdot chsT - \mu_0 \nu_s \cdot s \cdot shsT - \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1) \frac{shsT}{s} = \\ = \int_{-T}^0 f_s^{(2)}(\tau) \cdot \cos s\tau d\tau + \varphi_s \cdot \cos sT - \nu_s \cdot s \cdot \sin sT - \alpha_1 u_s^{(2)}(t_2) \frac{\sin sT}{s}. \end{aligned}$$

В итоге получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sin sT}{s} + \mu_1 \frac{shsT}{s} \right) \cdot \varphi_s + (\cos sT - \mu_0 chsT) \cdot \nu_s - \frac{1 - \cos sT}{s^2} \cdot \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2) + \\ & \quad + \frac{1 - chsT}{s^2} \cdot \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1) = F_s^1; \\ & (\cos sT - \mu_1 chsT) \cdot \varphi_s + s(-\sin sT + \mu_0 shsT) \cdot \nu_s - \frac{\sin sT}{s} \cdot \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2) + \\ & \quad + \frac{shsT}{s} \cdot \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1) = F_s^2, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} F_s^1 &= \int_{-T}^0 \frac{\sin s\tau}{s} \cdot f_s^{(2)}(\tau) d\tau - \int_0^T \frac{sh s\tau}{s} \cdot f_s^{(1)}(\tau) d\tau; \\ F_s^2 &= - \int_{-T}^0 \cos s\tau \cdot f_s^{(2)}(\tau) d\tau + \int_0^T chs\tau \cdot f_s^{(1)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь проделываем следующее: от обеих частей равенства (21) берем дробные производные порядка 1/2 и в полученном равенстве полагаем $t = t_1$. Тогда имеем

1. $D_t^{\frac{1}{2}} \left[\frac{shs(t-T)}{s} \right]_{t=t_1} = -\frac{1}{s\sqrt{\pi t_1}} \cdot shsT + \frac{1}{2\sqrt{s}} \cdot e^{s(t_1-T)} \cdot erf\sqrt{st_1} + \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \cdot e^{sT} \cdot daw\sqrt{st_1}.$
2. $D_t^{\frac{1}{2}} [ch s(t-T)]_{t=t_1} = -\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}} \cdot chsT + \frac{\sqrt{s}}{2} \cdot e^{s(t_1-T)} \cdot erf\sqrt{st_1} - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{sT} \cdot daw\sqrt{st_1}.$
3. $\left[1 + \alpha_1 \cdot D_t^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1 - chs(t-T)}{s^2} \right\} \right]_{t=t_1} = 1 + \frac{\alpha_1}{s^2} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}} + \frac{1}{\sqrt{\pi t_1}} \cdot chsT - \frac{\sqrt{s}}{2} \cdot e^{s(t_1-T)} \cdot erf\sqrt{st_1} + \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{sT} \cdot daw\sqrt{st_1} \right].$
4. $D_t^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_t^T \frac{shs(t-\tau)}{s} \cdot f_s^{(1)}(\tau) d\tau \right\}_{t=t_1} = \frac{1}{s\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\xi}} \left[\int_{\xi}^T shs(\xi-\tau) \cdot f_s^{(1)}(\tau) d\tau \right] d\xi \right\}_{t=t_1} =$
 $= \frac{1}{s\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t f_s^{(1)}(\tau) d\tau \int_0^{\tau} \frac{shs(\xi-\tau)}{\sqrt{t-\xi}} d\xi + \int_t^T f_s^{(1)}(\tau) d\tau \int_0^t \frac{shs(\xi-\tau)}{\sqrt{t-\xi}} d\xi \right\}_{t=t_1} = \frac{1}{s\sqrt{\pi}} \left\{ f_s^{(1)}(t_1) \dots \right.$
 $\dots \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \cdot erf\sqrt{st_1} + \frac{2}{\sqrt{s}} \cdot shst_1 \cdot daw\sqrt{st_1} \right) + \int_0^{t_1} f_s^{(1)}(\tau) \left[\sqrt{s} \cdot e^{-s\tau} \cdot daw\sqrt{st_1} - \sqrt{s} \cdot daw\sqrt{s(t_1-\tau)} \right] +$
 $+ \frac{\sqrt{\pi s}}{2} \cdot e^{s(t_1-\tau)} \left(erf\sqrt{st_1} - erf\sqrt{s(t_1-\tau)} \right) d\tau + \int_{t_1}^T f_s^{(1)}(\tau) \left[\frac{\sqrt{s} \cdot \sqrt{\pi}}{2} e^{s(t_1-\tau)} \cdot erf\sqrt{st_1} - \frac{1}{\sqrt{t_1}} chs\tau + \right.$
 $\left. + \sqrt{s} \cdot e^{st_1} \cdot daw\sqrt{st_1} \right] d\tau \left. \right\}.$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \cdot \mu_1 \left(\frac{1}{s\sqrt{\pi t_1}} \cdot shsT - \frac{1}{2\sqrt{s}} \cdot e^{s(t_1-T)} \cdot erf\sqrt{st_1} - \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \cdot e^{sT} \cdot daw\sqrt{st_1} \right) \cdot \varphi_s + \\ & + \alpha_1 \cdot \mu_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}} \cdot chsT - \frac{\sqrt{s}}{2} \cdot e^{s(t_1-T)} \cdot erf\sqrt{st_1} + \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{sT} \cdot daw\sqrt{st_1} \right) \cdot \nu_s + \\ & + \left(1 + \frac{\alpha_1}{s^2} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}} + \frac{1}{\sqrt{\pi t_1}} \cdot chsT - \frac{\sqrt{s}}{2} \cdot e^{s(t_1-T)} \cdot erf\sqrt{st_1} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{sT} \cdot daw\sqrt{st_1} \right] \right) \cdot \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha_1 \frac{1}{s\sqrt{\pi}} \left\{ f_s^{(1)}(t_1) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \cdot \operatorname{erf} \sqrt{st_1} + \frac{2}{\sqrt{s}} \cdot \operatorname{sh} st_1 \cdot \operatorname{daw} \sqrt{st_1} \right) + \right. \\
 &\quad + \int_0^{t_1} f_s^{(1)}(\tau) \left[\sqrt{s} \cdot e^{-s\tau} \cdot \operatorname{daw} \sqrt{st_1} - \sqrt{s} \cdot \operatorname{daw} \sqrt{s(t_1 - \tau)} + \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\sqrt{\pi s}}{2} \cdot e^{s(t_1 - \tau)} \left(\operatorname{erf} \sqrt{st_1} - \operatorname{erf} \sqrt{s(t_1 - \tau)} \right) \right] d\tau + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_1}^T f_s^{(1)}(\tau) \left[-\frac{\sqrt{s} \cdot \sqrt{\pi}}{2} e^{s(t_1 - \tau)} \cdot \operatorname{erf} \sqrt{st_1} - \frac{1}{\sqrt{t_1}} \operatorname{ch} s\tau + \sqrt{s} \cdot e^{st_1} \cdot \operatorname{daw} \sqrt{st_1} \right] d\tau \right\}. \quad (27)
 \end{aligned}$$

В представлении (22) полагаем $t = t_2$, тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
 &\alpha_2 \cos s(t_2 + T) \cdot \nu_s + \frac{\alpha_2}{s} \sin s(t_2 + T) \cdot \varphi_s - \\
 &\quad - \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2) \left(1 + \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2) \cdot \frac{1 - \cos s(t_2 + T)}{s^2} \right) = F_s^4, \quad (28)
 \end{aligned}$$

где

$$F_s^4 = -\alpha_2 \int_{-T}^{t_2} \frac{\sin s(t_2 - \tau)}{s} \cdot f_s^{(2)}(\tau) d\tau. \quad (29)$$

Теперь из системы уравнений (25) и (28) определим неизвестные величины φ_s , ν_s , $\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1)$, $\alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)$, $\forall s \in S$:

$$\varphi_s = \frac{|\Delta_{\varphi_s}|}{|\Delta_s|}, \quad \nu_s = \frac{|\Delta_{\nu_s}|}{|\Delta_s|}, \quad \alpha_1 u_s^{(1)}(t_1) = \frac{|\Delta_{\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1)}|}{|\Delta_s|}, \quad \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2) = \frac{|\Delta_{\alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)}|}{|\Delta_s|}, \quad (30)$$

где матрицы Δ_{φ_s} , Δ_{ν_s} , $\Delta_{\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1)}$, $\Delta_{\alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)}$ получаются из матрицы Δ_s заменой соответствующих столбцов элементами F_s^1 , F_s^2 , F_s^3 , F_s^4 .

Далее, подставляя (30) в (21) и (22), получаем окончательное представление решений граничных задач (15), (16):

$$\begin{aligned}
 u_s^{(1)}(t) &= \frac{|\Delta_{\nu_s}|}{|\Delta_s|} \cdot \mu_0 \cdot \operatorname{ch} s(t - T) + \frac{|\Delta_{\varphi_s}|}{|\Delta_s|} \cdot \mu_1 \cdot \frac{\operatorname{sh} s(t - T)}{s} + \int_t^T \frac{\operatorname{sh} s(t - \tau)}{s} \cdot f_s^{(1)}(\tau) d\tau - \\
 &\quad - \frac{|\Delta_{\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1)}|}{|\Delta_s|} \cdot \frac{1 - \operatorname{ch} s(t - T)}{s^2}, \quad s \in S; \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_s^{(2)}(t) &= \frac{|\Delta_{\nu_s}|}{|\Delta_s|} \cdot \cos s(t + T) + \frac{|\Delta_{\varphi_s}|}{|\Delta_s|} \cdot \frac{\sin s(t + T)}{s} + \int_{-T}^t \frac{\sin s(t - \tau)}{s} \cdot f_s^{(2)}(\tau) d\tau - \\
 &\quad - \frac{|\Delta_{\alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)}|}{|\Delta_s|} \cdot \frac{1 - \cos s(t + T)}{s^2}, \quad s \in S. \quad (32)
 \end{aligned}$$

Теперь обсудим вопрос об установлении L_2 -оценок для решений (31)-(33), равномерных по $s \in S$, т.е. оценок вида

$$\left\| u_s^{(1)}(t) \right\|_{L_2(0,T)} \leq C_1 \left\| f_s^{(1)} \right\|_{L_2(0,T)}, \quad s \in S; \quad (33)$$

$$\|u_s^{(2)}(t)\|_{L_2(-T,0)} \leq C_2 \|f_s^{(2)}\|_{L_2(-T,0)}, \quad s \in S, \quad (34)$$

где постоянные C_1, C_2 не зависят от s .

Для этого рассмотрим вначале случай отсутствия нагруженных слагаемых. Из (31), (32) получаем следующие представления для искомых решений ($s \in S$):

$$u_s^{(1)}(t) = \int_t^T \frac{sh s(t-\tau)}{s} \cdot f_s^{(1)}(\tau) d\tau + \frac{|\tilde{\Delta}_{\varphi_s}|}{|\tilde{\Delta}_s|} \cdot \mu_1 \cdot \frac{sh s(t-T)}{s} + \frac{|\tilde{\Delta}_{\nu_s}|}{|\tilde{\Delta}_s|} \cdot \mu_0 \cdot ch s(t-T); \quad (35)$$

$$u_s^{(2)}(t) = \int_{-T}^t \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \cdot f_s^{(2)}(\tau) d\tau + \frac{|\tilde{\Delta}_{\varphi_s}|}{|\tilde{\Delta}_s|} \cdot \frac{\sin s(t+T)}{s} + \frac{|\tilde{\Delta}_{\nu_s}|}{|\tilde{\Delta}_s|} \cdot \cos s(t+T), \quad (36)$$

где из (21) имеем

$$\begin{aligned} |\tilde{\Delta}_s| &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\sin sT}{s} + \mu_1 \frac{shsT}{s} & \cos sT - \mu_0 chsT \\ \cos sT - \mu_1 chsT & s(-\sin sT + \mu_0 shsT) \end{array} \right| = \\ &= -1 - \mu_0 \mu_1 + (\mu_0 - \mu_1) \sin sT \cdot shsT + (\mu_0 + \mu_1) \cos sT \cdot chsT; \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\Delta}_{\varphi_s}| &= \left| \begin{array}{cc} \int_{-T}^0 \frac{\sin s\tau}{s} \cdot f_s^{(2)}(\tau) d\tau - \int_0^T \frac{sh s\tau}{s} \cdot f_s^{(1)}(\tau) d\tau & \cos sT - \mu_0 chsT \\ - \int_{-T}^0 \cos s\tau \cdot f_s^{(2)}(\tau) d\tau + \int_0^T chs\tau \cdot f_s^{(1)}(\tau) d\tau & s(-\sin sT + \mu_0 shsT) \end{array} \right| = \\ &= \int_{-T}^0 f_s^{(2)}(\tau) [\cos s(\tau+T) - \mu_0(\cos s\tau \cdot chsT - \sin s\tau \cdot shsT)] d\tau + \\ &+ \int_0^T f_s^{(1)}(\tau) [\mu_0 chs(\tau-T) - chs\tau \cdot \cos sT + shs\tau \sin sT] d\tau; \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\Delta}_{\nu_s}| &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\sin sT}{s} + \mu_1 \frac{shsT}{s} & \int_{-T}^0 \frac{\sin s\tau}{s} \cdot f_s^{(2)}(\tau) d\tau - \int_0^T \frac{sh s\tau}{s} \cdot f_s^{(1)}(\tau) d\tau \\ \cos sT - \mu_1 chsT & - \int_{-T}^0 \cos s\tau \cdot f_s^{(2)}(\tau) d\tau + \int_0^T chs\tau \cdot f_s^{(1)}(\tau) d\tau \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{s} \int_{-T}^0 f_s^{(2)}(\tau) [-\sin s(\tau+T) + \mu_1(\sin s\tau \cdot chsT - shsT \cdot \cos s\tau)] d\tau + \\ &+ \frac{1}{s} \int_0^T f_s^{(1)}(\tau) [\mu_1 shs(T-\tau) + shs\tau \cdot \cos sT + \sin sT \cdot chs\tau] d\tau. \end{aligned} \quad (39)$$

Подставляя (37)–(39) в (35), получаем

$$\begin{aligned} u_s^{(1)}(t) &= \frac{1}{s \cdot |\tilde{\Delta}_s|} \cdot \int_{-T}^0 f_s^{(2)}(\tau) \left\{ \mu_1 shs(t-T) \cdot \cos s(\tau+T) - \mu_0 \sin s(\tau+T) \cdot chs(t-T) + \right. \\ &\quad \left. + \mu_0 \mu_1 [\cos s\tau \cdot chs(2T-t) - shs\tau \cdot \cos s\tau] \right\} d\tau + \\ &+ \frac{1}{s \cdot |\tilde{\Delta}_s|} \cdot \int_0^T f_s^{(1)}(\tau) \left\{ \mu_0 \mu_1 shs(t-\tau) + \mu_0 \sin sT \cdot chs(t-T) chs\tau - \mu_1 \cos sT \cdot shs(t-T) chs\tau \right\} d\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{s \cdot |\tilde{\Delta}_s|} \int_t^T f_s^{(1)}(\tau) \left\{ -(1 + \mu_0 \mu_1) shs(t - \tau) + (\mu_0 - \mu_1) \sin sT \cdot shsT \cdot sh(t - \tau) + \right. \\
 & \left. + (\mu_0 + \mu_1) \cos sT \cdot chsT \cdot shs(t - \tau) \right\} d\tau. \tag{40}
 \end{aligned}$$

Формулы для решений (36) и (40) позволяют получить требуемые L_2 -оценки для самих функций $u_s^{(1)}(t)$, $u_s^{(2)}(t)$ и для их производных $\frac{du_s^{(1)}(t)}{dt}$, $\frac{du_s^{(2)}(t)}{dt}$, $\frac{d^2u_s^{(1)}(t)}{dt^2}$, $\frac{d^2u_s^{(2)}(t)}{dt^2}$:

$$\left\| u_s^{(1)}(t) \right\|_{L_2(0,T)} \leq C_1 \left[\left\| f_s^{(1)}(t) \right\|_{L_2(0,T)} + \left\| f_s^{(2)}(t) \right\|_{L_2(-T,0)} \right]; \tag{41}$$

$$\left\| u_s^{(2)}(t) \right\|_{L_2(0,T)} \leq C_2 \left[\left\| f_s^{(1)}(t) \right\|_{L_2(0,T)} + \left\| f_s^{(2)}(t) \right\|_{L_2(-T,0)} \right]; \tag{42}$$

$$\left\| \frac{du_s^{(1)}(t)}{dt} \right\|_{L_2(0,T)} \leq C_3 \left[\left\| f_s^{(1)}(t) \right\|_{L_2(0,T)} + \left\| f_s^{(2)}(t) \right\|_{L_2(-T,0)} \right]; \tag{43}$$

$$\left\| \frac{d^2u_s^{(1)}(t)}{dt^2} \right\|_{L_2(0,T)} \leq C_4 \left[\left\| s \cdot f_s^{(1)}(t) \right\|_{L_2(0,T)} + \left\| s \cdot f_s^{(2)}(t) \right\|_{L_2(-T,0)} \right]; \tag{44}$$

$$\left\| \frac{du_s^{(2)}(t)}{dt} \right\|_{L_2(0,T)} \leq C_5 \left[\left\| f_s^{(1)}(t) \right\|_{L_2(0,T)} + \left\| f_s^{(2)}(t) \right\|_{L_2(-T,0)} \right]; \tag{45}$$

$$\left\| \frac{d^2u_s^{(2)}(t)}{dt^2} \right\|_{L_2(0,T)} \leq C_6 \left[\left\| s \cdot f_s^{(1)}(t) \right\|_{L_2(0,T)} + \left\| s \cdot f_s^{(2)}(t) \right\|_{L_2(-T,0)} \right]. \tag{46}$$

Обсудим, например, получение (41). Для этого запишем представление (40) в виде

$$u_s^{(1)}(t) = \int_{-T}^0 G_{2s}(t, \tau) \cdot f_s^{(1)}(\tau) d\tau + \int_0^T G_{1s}(t, \tau) \cdot f_s^{(1)}(\tau) d\tau, \quad s \in S.$$

Для получения требуемых оценок достаточно показать равномерную по s ограниченность функций G_{1s} , G_{2s} , т.е.

$$\{|G_{1s}(t, \tau)|, |G_{2s}(t, \tau)|\} \leq K$$

для любых допустимых t, τ .

Для конечных s из условий теоремы эти неравенства справедливы. Остается рассматривать случаи: $s = 0$, $s = \pm\infty$. Пусть $s = 0$. Неравенства следуют из того факта, что в каждом слагаемом из $G_{1s}(t, \tau)$, $G_{2s}(t, \tau)$ присутствуют выражения вида $\left\{ \frac{sh s \beta}{s} \right\}$, $\left\{ \frac{\sin s \beta}{s} \right\}$, которые ограничены при $s \rightarrow 0$. В случае $s \rightarrow \pm\infty$ ограниченность $\{|G_{1s}(t, \tau)|, |G_{2s}(t, \tau)|\}$ следует из-за наличия в них гиперболических функций $\{sh, ch\}$ как в числителе, так и в знаменателе одного и того же порядка.

Аналогичное имеет место и для остальных оценок (42)-(46).

Оценки (41)-(42) остаются справедливыми в задаче (1) и при наличии нагруженных слагаемых. Для завершения доказательства теоремы теперь достаточно применить лемму из [4; 118].

Список литературы

- 1 Дженалиев М.Т. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений / М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов. — Алматы: Ғылым, 2010. — 334 с.
- 2 Кароль И.Л. О краевых задачах для уравнения смешанного типа / И.Л. Кароль // Вестн. ЛГУ. Сер. Математика, механика, астрономия. — 1956. — Т. 1, № 1. — С. 177–181.

- 3 Лаврентьев М.А. К проблеме уравнений смешанного типа / М.А. Лаврентьев, А.В. Бицадзе // ДАН СССР. — 1950. — Т. 70, № 3. — С. 373–376.
- 4 Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач / А.А. Дезин. — М.: Наука, 1980. — 207 с.

А.Х. Аттаев, С.А. Искаков, М.И. Рамазанов

Бөлшекті-жүктелген Лаврентьев-Бицадзе теңдеуі үшін шекаралық есеп

Мақалада тіктөртбұрышты облыста бөлшекті-жүктелген Лаврентьев-Бицадзе теңдеуі үшін локальді емес шекаралық есебі зерттелген. Осыған ұқсас шекаралық есептер [1-3] жұмыстарында қарастырылған. Бұл жұмыста зерттелетін есептің алдыңғы есептерден айырмашылығы, біріншіден, гипербола-лық бөліктің облысы сипаттамалық емес, екіншіден, теңдеуде бөлшекті-жүктелген қосылғыштардың бар болуы қарастырылып отырған есептің кейбір ерекшеліктерін анықтауға мүмкіндік береді.

Кілт сөздер: шекаралық есеп, жүктелген теңдеулер, бөлшек туынды, айнымалыларды бөлу әдісі.

A.Kh. Attaev, S.A. Iskakov, M.I. Ramazanov

Boundary value problem for the fractional-loaded Lavrent'ev-Bitsadze equation

In this paper we study the boundary value problem for a fractional-loaded Lavrent'ev-Bitsadze equation in a rectangular domain with nonlocal boundary conditions. Similar boundary value problems were studied in papers [1-3]. The problem studied in this paper differs from the problems considered earlier in that, firstly, the domain in the hyperbolic part is not characteristic, and secondly, there are fractional-loaded terms in the equation, which makes it possible to reveal certain features of the problem under consideration.

Keywords: boundary value problem, loaded equations, fractional derivative, method of separation of variables.

References

- 1 Jenaliyev, M.T. & Ramazanov, M.I. (2010). *Nahruzhennye uravneniia kak vozmushcheniia differentsialnykh uravnenii* [The Loaded Equations as Perturbations of Differential Equations]. Almaty: Hylym [in Russian].
- 2 Karol, I.L. (1956). O kraevykh zadachakh dlia uravneniia smeshannoho tipa [On boundary-value problems for a mixed-type equation]. *Vestnik LGU. Seria Matematika, mekhanika, astronomiia — Bulletin of Leningrad State University. Series Mathematics, mechanics, astronomy*, 1, 1, 177–181 [in Russian].
- 3 Lavrent'ev, M.A. & Bitsadze, A.V. (1950). K probleme uravnenii smeshannoho tipa [To the problem of equations of mixed type]. *DAN SSSR*, 1950, 70, 3, 373–376 [in Russian].
- 4 Dezin, A.A. (1980). *Obshchie voprosy teorii hranichnykh zadach* [General questions of the theory of boundary value problems]. Moscow: Nauka [in Russian].