4 *Weispfenning V.* The model-theoretic significance of complemented existential formulas // The Journal of Symbolic Logic. — Dec. 1981. — Vol. 46. — № 4. — P. 843–849.

5 *Ben-Yaacov I.* Positive model theory and compact abstract theories // Journal of Mathematical Logic. — 2003. — № 1. — P. 85–118.

6 *Ben-Yaacov I.* Compactness and independence in non first order frameworks // Bulletin of Symbolic logic. — 2005. — Vol. 11. — № 1. — P. 28–50.

7 *Baldwin J.T.*, *Kueker D.W.* Algebraically prime models // Ann. Math. Logic. — 1981. — 20. — P. 289–330.

8 *Gerald E.* Sacks. Saturated models Theory. — Moscow: Mir, 1976. — 192 p.

А.Р.Ешкеев

Δ -йонсондық теориялар

Мақалада теориялардың бір жаңа класының модельді-теоретикалық қасиеттері қарастырылды. Сол класта кейбір қосымша берілген шарттар бойынша сол теориялардың категориялық сұрақтары зерттелді. Олардың ω -категориялық және ω_1 -категориялық жағдайлары кейбір қосымша берілген шарттар арқылы көрсетілген. Қарастырылған класта жалғасулардың орнына батулармен жұмыс жасалды. Бұл теориялар йонсон теориялардың позитивті жалпыламасы болып табылады.

A.R.Eshkeev

Δ -jonsson's theories

In this article we considered some new class of theories and we have been considered model-theoretical properties of such theories. In particular with concernedsuch theories under some additional properties it was described ω -categorical and ω_1 -categorical cases. In this class of theories instead of continuations we considered particular case of embbedings-immersions. And this class of theories is became positive generalization of jonsson's theories.

УДК 510.67

А.Р.Ешкеев[1], Р.М.Оспанов[2], О.И.Ульбрихт[1]

[1]*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;*
[2]*Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева (E-mail modth1705@mail.ru)*

Решетки экзистенциальных формул Δ-йонсоновской теории

В статье рассмотрены теоретико-модельные свойства нового класса теорий Δ-йонсовских теорий. Были исследованы свойства решеток формул этих теорий и их связь с известными вопросами в теории моделей. В частности, исследованы свойства совершенности таких теорий и их связь, связанные с вопросами алгебры Линденбаума-Тарского.

Ключевые слова: йонсоновские теории, булева алгебра, модельный компаньон, экзистенциальная формула, бескванторное дополнение.

Введение

Выделим два направления в развитии теории моделей. В [1] их называют западной и восточной теорией моделей, так как один из основоположников теории моделей А.Тарский жил на западном побережье США с 1940 г., а другой А.Робинсон — на восточном. Западная теория моделей развивается в традициях Скулема и Тарского. Она в большей степени мотивировалась проблемами в теории чисел, анализе и теории множества, и в ней используются все формулы логики первого порядка.

Восточная теория моделей развивается в традициях Мальцева и Робинсона. Она мотивировалась проблемами в абстрактной алгебре, где формулы теорий обычно имеют самое большее два блока кванторов. Она делает ударение на множества бескванторных формул и экзистенциальных формул. В отличие от западной теории моделей, которая изучает полные теории, восточная теория моделей, вообще говоря, имеет дело с неполными теориями. Класс неполных теорий достаточно широк, поэтому можно ограничиться индуктивными теориями ($\forall\exists$-аксиоматизируемыми). В смысле полноты рассматриваемой теории максимальное требование, как правило, — $\forall\exists$-полнота. Всем этим условиям удовлетворяют йонсоновские теории. Таким образом сделаем вывод, что изучение йонсоновских теорий относится по своей сути к проблематике «восточной» теории моделей. В данной статье мы рассмотрим указанный выше вопрос в рамках изучения неполных теорий, а именно в классе йонсоновских теорий.

Следующие теории являются примерами йонсоновских теорий:

1) группы;

2) абелевы группы;

3) булевы алгебры;

4) линейные порядки;

5) поля характеристики p (p — простое число либо нуль);

6) упорядоченные поля.

Следующий результат является главным при описании теоретико-модельных свойств совершенных йонсоновских теорий.

Теорема 0.1 [2]. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;

2) T^* — модельный компаньон T;

3) $ModT^* = E_T$;

4) $T^* = T^f$,

где E_T — класс T — экзистенциально замкнутых моделей T; T^0 — оболочка Кайзера (максимальная $\forall\exists$ теория, взаимно модельно совместная с T); $T^f = Th(F_T)$, где F_T — класс генерических моделей T (в смысле конечного форсинга Робинсона); T^M — модельный компаньон йонсоновской теории T. Известны следующие факты и теоремы относительно связи йонсоновских теорий и их компаньонов [2].

Пусть T — йонсоновская теория. *Компаньоном* йонсоновской теории T называется такая теория $T^\#$ той же сигнатуры, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $(T^\#)_\forall = T_\forall$;

2) для любой йонсоновской теории T', если $T_\forall = T'_\forall$, то $T^\# = (T')^\#$.

3) $T_{\forall\exists} \subseteq T^\#$.

Естественными интерпретациями компаньона $T^\#$ являются T^*, T^0, T^f, T^M, T^e, где T-компаньон есть оболочка Кайзера; T^*-компаньон есть центр; T^M-компаньон есть модельный компаньон; T^f-компаньон есть конечный форсинг компаньон в смысле Робинсона; T^e-компаньон есть элементарная теория класса всех экзистенциально-замкнутых моделей теории T.

Факт 0.1. Для любой йонсоновской теории T эквивалентны следующие условия:

1) T совершенна;

2) T^* модельно полна.

Факт 0.2. Для любой полной для $\exists$-предложений йонсоновской теории T следующие условия эквивалентны:

1) T^* модельно полна;

2) для каждого $n < \omega$ $E_n(T)$ — булева алгебра, где $E_n(T)$ есть решетка $\exists$-формул с n свободными переменными.

Теорема 0.2. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;

2) T^* $\forall\exists$-аксиоматизируема.

Теорема 0.3. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) T совершенна;

2) $T^* = T^0$.

Теорема 0.4. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) T совершенна;

2) T имеет модельный компаньон.

Следующие леммы есть лёгкий результат применения указанных выше теорем.

Лемма 0.1. Если $T^{\#}$ — компаньон йонсоновской теории T и T^{M} — модельный компаньон T, то $T^{\#} = T^{M}$.

Лемма 0.2. Пусть T_1 и T_2 — йонсоновские теории. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) T_1 и T_2 взаимно модельно совместны;

2) $T_1^{\#} = T_2^{\#}$.

Пусть L — язык первого порядка. At есть множество атомарных формул данного языка. $B^{+}(At)$ — замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных. $Q(B^{+}(At))$ есть множество формул в пренексном нормальном виде, полученное с помощью применения кванторов ($\forall$ и $\exists$) к $B^{+}(At)$. Назовем формулу *позитивной*, если она принадлежит множеству $Q(B^{+}(At)) = L^{+}$. Теория называется *позитивно аксиоматизируемой*, если ее аксиомы позитивны. $B(L^{+})$ — это произвольная булева комбинация формул из L^{+}.

Определим Δ-морфизмы между структурами.

Пусть M и N — структуры языка, $\Delta \subseteq B(L^{+})$. Отображение $h: M \to N$ называется Δ*-гомоморфизмом* (символически $h: M \xrightarrow[\Delta]{} N$), если для любого $\varphi(\bar{x}) \in \Delta$, $\forall \bar{a} \in M$ из того, что $M \models \varphi(\bar{a})$, следует, что $N \models \varphi(h(\bar{a}))$. Модель M называется *началом* в N и мы говорим, что M продолжается в N, при этом h (M) называется *продолжением* M. Если отображение h инъективно, то говорят, что отображение h *погружает* M в N (символически $h: M \xleftrightarrow[\Delta]{} N$). В дальнейшем мы будем использовать термин Δ-продолжение и Δ-погружение. В рамках этого определения (Δ-гомоморфизма) легко заметить, что изоморфное вложение и элементарное вложение являются Δ-погружениями, когда $\Delta = B(At)$ и $\Delta = L$, соответственно.

Если C — класс L-структур, то мы говорим, что элемент M из C Δ *позитивно экзистенционально замкнут* в C, если каждый Δ-гомоморфизм из M в любой элемент из C является Δ-погружением.

Говорим, что теория T *допускает* Δ*-JEP*, если для любых двух Δ $A, B \in ModT$ существуют $C \in ModT$ и Δ-гомоморфизмы $h_1: A \xrightarrow[\Delta]{} C$, $h_2: B \xrightarrow[\Delta]{} C$.

Говорим, что теория T *допускает* Δ*-AP*, если для любых $A, B, C \in ModT$, таких что $h_1: A \xrightarrow[\Delta]{} C$, $g_1: A \xrightarrow[\Delta]{} B$, где h_1, g_1 — Δ-гомоморфизмы, существует $D \in ModT$ и $h_2: C \xrightarrow[\Delta]{} D$, $g_2: B \xrightarrow[\Delta]{} D$, где h_2, g_2 — Δ-гомоморфизмы, такие что $h_2 \circ h_2 = g_2 \circ g_1$.

Теория T называется Δ*-позитивной йонсоновской* (Δ-*PJ*)-теорией, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. T имеет бесконечную модель;
2. T позитивно $\forall\exists$-аксиоматизируема;
3. T допускает Δ-*JEP*;
4. T допускает Δ-*AP*.

Когда $\Delta = B(At)$, мы получаем обычную йонсоновскую теорию с той лишь разницей, что у нее только позитивные $\forall\exists$-аксиомы. Тем самым рассматриваемая теория устойчива относительно гомоморфизмов.

При изучении йонсоновских теорий главным инструментом их исследования является семантический метод, который заключается в следующем: элементарные свойства центра йонсоновской теории «транслируются» на саму теорию. При этом элементарная теория семантической модели йонсоновской теории аналогична позитивной робинсоновской теории и является инвариантом этой йонсоновской теории, так как все семантические модели одной и той же йонсоновской теории элементарно эквивалентны между собой. В связи с этим в том случае, если Δ-*PJ* теория нейонсоновская в классическом смысле, то мы под её семантической моделью будем понимать любую её универсальную область U, а под центром — следующее множество предложений $T_{\Delta}^{*} = Th_{\Delta}(U)$.

Мы хотим определить понятия Δ - йонсоновских теорий. В том случае, если при некотором фиксированном Δ рассматриваемая Δ -*PJ*-теория является йонсоновской в классическом смысле, применяем относительно неё все обозначения и результаты, как в [3].

В данной статье рассматриваются Δ-йонсоновские теории счетного языка первого порядка. Это теории, которые получаются из Δ-позитивных йосоновских теорий с помощью следующего действия. В определении Δ-позитивных йосоновских теорий всюду вместо Δ-продолжений будем рассматривать Δ-погружения. Далее в этой статье для экономии под йонсоновской теорией будет пониматься Δ-йонсоновская теория.

Получен ряд результатов, устанавливающих связь между свойствами йонсоновской теории, центрального пополнения данной йонсоновской теории и свойствами решетки классов эквивалентности экзистенциальных формул относительно этой теории. В терминах решетки формул, введенных в работе [4] (дополняемость, псевдо-дополняемость, слабая дополняемость, алгебра Стоуна), найдены необходимые и достаточные условия элиминации кванторов центрального пополнения йонсоновской теории, позитивной модельной полноты центрального пополнения йонсоновской теории, совершенности йонсоновской теории, йонсоновости центрального пополнения йонсоновской теории.

При изучении полных теорий одним из основных методов является метод использования свойств топологического пространства $S_n(T)$ ультрафильтров булевой алгебры $F_n(T)$ фиксированной теории *T*. С помощью этого метода исследуются такие классические понятия теории моделей, как стабильность модели и теории, насыщенность модели, однородность модели, диаграмма модели и т.д. В случае неполной теории мы можем рассмотреть решетку $E_n(T)$ экзистенциальных формул, которая является подрешеткой булевой алгебры $F_n(T)$. В силу незамкнутости экзистенциальных формул в общем случае относительно булевых логических операций свойства топологического пространства экзистенциальных типов существенно отличаются от полного случая. Понятно, что такой подход (ограничение $F_n(T)$ до $E_n(T)$) является обобщением случая, когда мы имеем дело с полными теориями. Так как йонсоновские теории являются, вообще говоря, неполными, было бы интересно рассмотреть свойства решетки экзистенциальных формул в связи с указанным выше контекстом (например, как в [4]). В данной работе, помимо семантического метода и других общих результатов, используются понятия и результаты из работ [1, 4–6].

1. Решетки экзистенциальных формул

Введем определения понятий и дадим связанные с ними результаты относительно решеточных свойств экзистенциальных формул, основываясь на [4–6].

Пусть L — язык первого порядка. Пусть T — индуктивная теория языка L. Обозначим через $E_n(L)$ множество всех экзистенциальных формул языка L с n свободными переменными, $E(L)=\bigcup\limits_{n<\omega} E_n(L)$. Пусть $E_n(T)$ — дистрибутивная решетка классов эквивалентности

$$\varphi^T=\{\psi\in E_n(L)\mid\ T\vdash\varphi\leftrightarrow\psi\},\ \varphi\in E_n(L),\ E(T)=\bigcup_{n<\omega}E_n(T).$$

Определение 1.1 [4]. Пусть $\varphi^T,\psi^T\in E_n(T)$ и $\varphi^T\cap\psi^T=0.$ Тогда ψ^T называется *дополнением* φ^T, если $\varphi^T\cup\psi^T=1$; ψ^T называется псевдо-дополнением φ^T, если для всех $\mu^T\in E_n(T)$ $\varphi^T\cap\mu^T=0\Rightarrow\mu^T\le\psi^T$; ψ^T называется слабым дополнением φ^T, если для всех

$$\mu^T\in E_n(T)\quad(\varphi^T\cup\psi^T)\cap\mu^T=0\Rightarrow\mu^T=0.$$

Определение 1.2 [4].

1) φ^T называется *дополняемым*, если φ^T имеет дополнение.

2) φ^T называется *слабо дополняемым*, если φ^T имеет слабое дополнение.

3) φ^T называется *псевдо-дополняемым*, если φ^T имеет псевдо-дополнение.

4) $E_n(T)$ называется *дополняемой*, если каждый $\varphi^T\in E_n(T)$ дополняем.

5) $E_n(T)$ называется *слабо дополняемой*, если каждый $\varphi^T\in E_n(T)$ слабо дополняем.

6) $E_n(T)$ называется *псевдо-дополняемым*, если каждый $\varphi^T\in E_n(T)$ псевдо-дополняем.

Далее рассмотрим формулы, устойчивые относительно расширений моделей и подмоделей.

Определение 1.3 [5]. Формула $\varphi(x_1,...,x_n)$ называется *устойчивой относительно расширений моделей в* $ModT$, если для любых моделей *A* и *B* теории *T* таких, что $A \subset B$, и для любых $a_1,...,a_n \in A$ из того, что $A \models \varphi[a_1,...,a_n] \Rightarrow B \models \varphi[a_1,...,a_n]$.

Теорема 1.1 [5]. Формула φ устойчива относительно расширений моделей в $ModT$ тогда и только тогда, когда существует экзистенциальная формула ψ такая, что $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Определение 1.4 [5]. Формула $\varphi(x_1,...,x_n)$ называется *устойчивой относительно подмоделей в* $ModT$, если для любых моделей *A* и *B* теории *T* таких, что $A \subset B$, и для любых $a_1,...,a_n \in A$ из того, что $B \models \varphi[a_1,...,a_n] \Rightarrow A \models \varphi[a_1,...,a_n]$.

Теорема 1.2 [5]. Формула φ устойчива относительно подмоделей в $ModT$ тогда и только тогда, когда существует универсальная формула ψ такая, что $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Рассмотрим понятие инвариантной формулы и связь между инвариантностью экзистенциальной формулы и дополняемостью её класса в $E(T)$.

Определение 1.5 [4]. Формула φ называется *инвариантной* в $ModT$, если она устойчива одновременно относительно расширений моделей в $ModT$ и относительно подмоделей в $ModT$.

Теорема 1.3 [4]. Экзистенциальная формула φ инвариантна в $ModT$ тогда и только тогда, когда φ^T дополняем в $E(T)$.

Теорема 1.4 [4]. Экзистенциальная формула φ инвариантна в $Mod(Th_{\forall\exists}(E_T))$, где E_T — класс экзистенциально замкнутых моделей теории *T*, тогда и только тогда, когда φ^T слабо дополняем в $E(T)$.

Введем необходимые определения и сформулируем известные результаты, которые устанавливают связь между модельной полнотой, элиминацией кванторов, позитивной модельной полнотой теории *T* и свойствами решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$.

Определение 1.6 [5]. Теория *T* называется модельно полной, если $T \cup \Delta_A$ полна в языке L_A для любой модели *A* теории *T*.

Теорема 1.5 [5].

1) Теория *T* модельно полна тогда и только тогда, когда каждая формула устойчива относительно подмоделей в $ModT$.

2) Теория *T* модельно полна тогда и только тогда, когда каждая формула устойчива относительно расширений моделей в $ModT$.

Определение 1.7 [5]. Отметим, что теория *T* допускает элиминацию кванторов в *L*, если для каждой формулы $\varphi(x_1,...,x_n)$ языка *L* существует бескванторная формула $\psi(x_1,...,x_n)$ такая, что

$$T \vdash \forall x_1 ... \forall x_n (\varphi(x_1,...,x_n) \leftrightarrow \psi(x_1,...,x_n)).$$

Теорема 1.6 [1].

1) Пусть T' — модельный компаньон теории *T*, где *T* — универсальная теория. В этом случае T' — модельное пополнение *T*, если и только если теория *T* допускает элиминацию кванторов.

2) Пусть T' — модельный компаньон теории *T*. В этом случае T' — модельное пополнение *T*, если и только если теория *T* обладает свойством амальгамируемости.

Определение 1.8 [3]. Теория *T* называется *подмодельно полной*, если $T \cup \Delta_A$ полна в L_A для любой подмодели *A* модели теории *T*.

Теорема 1.7 [3]. Теория *T* подмодельно полна тогда и только тогда, когда *T* допускает элиминацию кванторов.

Теорема 1.8 [4]. Теория *T* подмодельно полна тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное дополнение.

Определение 1.9 [3]. Теория *T* называется *позитивно модельно полной*, если она модельно полна и каждая экзистенциальная формула языка *L* эквивалентна в *T* позитивной экзистенциальной формуле.

В следующих теоремах, полученных в работе [4], устанавливается связь между выше определенными понятиями и свойствами решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$.

Теорема 1.9 [4]. Теория T позитивно модельно полна тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет позитивное экзистенциальное дополнение.

Теорема 1.10 [4]. Теория T имеет модельный компаньон тогда и только тогда, когда $E_n(T)$ слабо дополняема.

Определение 1.10 [6]. Решетка называется *алгеброй Стоуна*, если для любого её элемента верно следующее: псевдо-дополнение от псевдо-дополнения элемента равно самому элементу.

Теорема 1.11 [4]. Теория T имеет модельное пополнение тогда и только тогда, когда $E_n(T)$ — алгебра Стоуна.

Теорема 1.12 [4]. Теория $T_\forall$ имеет модельное пополнение тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет слабое бескванторное дополнение.

2. Йонсоновские теории, их центры и их связь на языке свойств решеток экзистенциальных формул этих теорий

Рассмотрим йонсоновские теории и установим связь между свойствами йонсоновской теории, центрального пополнения йонсоновской теории и свойствами решетки классов эквивалентности экзистенциальных формул относительно этой теории. Для этого мы будем использовать результаты из [4–6].

Дадим следующие определения.

Определение 2.1. Теория T называется *йонсоновской*, если

1) T имеет бесконечную модель;

2) T $\forall\exists$ - аксиоматизируема;

3) T обладает свойством совместного вложения (*JEP*), т.е. любые две модели $A \models T$ и $B \models T$ изоморфно вкладываются в некоторую модель $C \models T$;

4) T обладает свойством амальгамируемости (*AP*), т.е. если для любых $A, B, C \models T$ таких, что $f_1 : A \to B,\ f_2 : A \to C$ — изоморфные вложения, существуют $D \models T$, изоморфные вложения $g_1 : B \to D,\ g_2 : C \to D$ такие, что $g_1 f_1 = g_2 f_2$.

Определение 2.2 [3]. *Семантической моделью* C_T йонсоновской теории T называется ω^+-однородная-универсальная модель теории T (в смысле [3]).

Следующие определения даны в [3].

Определение 2.3 [3]. Пусть $\kappa \geq \omega$. Модель M теории T называется

– κ*-универсальной* для T, если каждая модель T мощности строго меньше κ изоморфно вкладывается в M;

– κ*-однородной* для T, если при любых двух моделях A и A_1 теории T, являющихся подмоделями M мощности строго меньше κ, и изоморфизме f: $A \to A_1$, для каждого расширения B модели A, являющегося подмоделью M и моделью T мощности строго меньше κ, существуют расширение B_1 модели A_1, являющееся подмоделью M, и изоморфизм g: $B \to B_1$, продолжающий f.

Определение 2.4 [3]. *Однородной-универсальной* для T моделью называется κ-однородная-универсальная для T модель мощности κ, где $\kappa \geq \omega$.

Определение 2.5 [3]. *Центром* (*центральным пополнением*) йонсоновской теории T называется $T^*=Th(C_T)$.

Определение 2.6 [3]. Йонсоновская теория T называется *совершенной*, если каждая семантическая модель C_T является насыщенной моделью T^*.

В работе [7] была установлена связь между совершенностью йонсоновской теории и существованием её модельного компаньона. В дальнейшем нам будут необходимы следующие утверждения.

Теорема 2.1 [3]. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) T совершенна;

2) T имеет модельный компаньон.

Теорема 2.2. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) T полна;

2) T модельно полна.

Была установлена связь между совершенностью йонсоновской теории и свойствами решетки $E_n(T)$. Имеет место следующее утверждение [3].

Теорема 2.3. Пусть T — полная для $\exists$-предложений йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;
2) T* модельно полна;
3) $E_n(T)$ — булева алгебра,

где полнота теории для $\exists$-предложений означает, что любые две модели этой теории относительно экзистенциальных предложений не отличаются друг от друга.

В связи с указанными выше результатами относительно введенных понятий нами получены результаты, связывающие понятия из [4] с йонсоновскими теориями.

В следующей теореме в терминах решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$ найдены необходимые и достаточные условия элиминации кванторов центрального пополнения йонсоновской теории T и позитивной модельной полноты центрального пополнения йонсоновской теории T.

Теорема 2.4. Пусть T — полная для $\exists$-предложений йонсоновская теория; T* — центр теории T. Тогда

1) T* допускает элиминацию кванторов тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное дополнение;

2) T* позитивно модельно полна тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет позитивное экзистенциальное дополнение.

Доказательство. 1) Пусть T* допускает элиминацию кванторов. Тогда по теореме 1.7 T* подмодельно полна. Тогда теория T* в силу определения модельно полна, и по теореме 2.3 $E_n(T)$ является булевой алгеброй, т.е. каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет некоторое дополнение. В силу элиминации кванторов T*, так как T* — пополнение теории T, то и относительно теории T каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет некоторое бескванторное дополнение.

Обратно, пусть каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное дополнение. Тогда $E_n(T)$ является булевой алгеброй и по теореме 2.3 T* модельно полна, а также в силу пункта 2 теоремы 1.5 мы имеем, что любая формула относительно теории T* эквивалентна некоторой экзистенциальной формуле, т.е. класс этой формулы принадлежит $E_n(T^*)$. В силу $\exists$-полноты теории T $E_n(T) = E_n(T^*)$. Следовательно, в силу того, что каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное дополнение и $E_n(T)$ является булевой алгеброй, любая формула в $E_n(T^*)$ бескванторна. Таким образом, теория T* допускает элиминацию кванторов.

2) Пусть теория T* позитивно модельно полна. Тогда в силу определения 1.9 теория T* модельно полна и для каждой экзистенциальной формулы φ существует позитивная экзистенциальная формула ψ такая, что $T^* \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. По теореме 2.3 $E_n(T)$ является булевой алгеброй, т.е. каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет экзистенциальное дополнение, и так как для каждой экзистенциальной формулы φ существует позитивная экзистенциальная формула ψ такая, что $T^* \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, получаем, что каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет позитивное экзистенциальное дополнение. Тем самым необходимое условие пункта 2 доказано.

Докажем достаточность пункта 2. Пусть каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет позитивное экзистенциальное дополнение. Тогда по теореме 1.9 теория T позитивно модельно полна, и, следовательно, по определению модельно полна. Тогда по теореме 2.2 мы имеем, что теория T полна, и так как теория T* является центральным пополнением теории T, мы получаем, что $T = T^*$. Таким образом, T* позитивно модельно полна.

Тем самым доказательство теоремы 2.4 завершено.

В следующей теореме в терминах решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$ найдены необходимые и достаточные условия совершенности йонсоновской теории T.

Теорема 2.5. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T — совершенна;
2) $E_n(T)$ слабо дополняема;
3) $E_n(T)$ — алгебра Стоуна.

Доказательство. Докажем из 1) в 2). Пусть йонсоновская теория T совершенна, тогда по теореме 2.1 она имеет модельный компаньон T^M. Из [1] известно, что $T^M = T^0$, где $T^0 = Th_{\forall\exists}(E_T)$ — оболочка Кайзера йонсоновской теории. Так как в силу определения модельного компаньона T^M модельно полна, по пункту 1 теоремы 1.5 вытекает, что каждая формула рассматриваемого языка устойчива относительно подмоделей в $ModT^M$. Следовательно, и каждая экзистенциальная формула этого языка устойчива относительно подмоделей в $ModT^M$, в то же время каждая экзистенциальная формула этого языка устойчива относительно расширений моделей в $ModT^M$, и, следовательно, по определению 1.5, эта формула инвариантна в $ModT^M$. Отсюда по теореме 1.4 следует, что каждая экзистенциальная формула слабо дополняема. Таким образом, $E_n(T)$ слабо дополняема.

Докажем из 2) в 1). Если $E_n(T)$ слабо дополняема, то по теореме 1.10 теория T имеет модельный компаньон. Тогда по теореме 2.1 T совершенна. Тем самым, 1) эквивалентно 2).

Докажем из 1) в 3). Заметим, что по пункту 2 теоремы 1.9 модельный компаньон йонсоновской теории является её модельным пополнением. Тогда из совершенности теории T по теореме 1.11 следует, что $E_n(T)$ — алгебра Стоуна.

Докажем из 3) в 1). Если $E_n(T)$ — алгебра Стоуна, то по теореме 1.11 теория T имеет модельный компаньон, и, следовательно, по теореме 2.1 теория T совершенна.

Тем самым доказательство теоремы 2.5 завершено.

В следующей теореме в терминах решетки формул найдены необходимые и достаточные условия йонсоновости центра йонсоновской теории.

Теорема 2.6. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) T^* — йонсоновская теория;
2) каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное слабое дополнение.

Для доказательства необходимости нам понадобится следующее утверждение:

Факт (*). [7]. Если модельный компаньон T^M определен, то определен модельный компаньон $(T_\forall)^M$ и $T^M = (T_\forall)^M$.

Доказательство. Докажем из 1) в 2). Пусть T^* — йонсоновская теория, тогда из [1] следует, что теория T совершенна. Тогда по теореме 2.1 теория T имеет модельный компаньон, равный теории T^*, который по пункту 2 теоремы 1.6 является модельным пополнением теории T. В силу взаимной модельной совместности теории T и теории $T_\forall$ всех универсальных следствий теории T и факта (*) модельное пополнение теории T является модельным пополнением теории $T_\forall$. Тогда по теореме 1.12 каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет слабое бескванторное дополнение.

Докажем из 2) в 1). Пусть каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное слабое дополнение. Тогда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет слабое дополнение, т.е. $E_n(T)$ слабо дополняема. Тогда по теореме 2.5 теория T совершенна. Тогда из [1] следует, что теория T^* является йонсоновской теорией.

Тем самым доказательство теоремы 2.6 завершено.

3. К вопросу А.Д.Тайманова в классе Δ-йонсоновских теорий

Данная часть работы обобщает результаты из [8] на случай Δ-йонсоновских теорий.

При изучении свойств моделей полных теорий первого порядка полезными являются сведения о булевых алгебрах (алгебрах Линденбаума-Тарского) $F_n(T)$, $n\in\omega$, теории T. В связи с этими булевыми алгебрами $F_n(T)$, $n\in\omega$, хорошо известен вопрос академика А.Д.Тайманова (можно ознакомиться в работе [7]):

(*) Какими свойствами должны обладать булевы алгебры B_n, $n\in\omega$, чтобы существовала полная теория T, такая что B_n была изоморфна $F_n(T)$, $n\in\omega$?

В [7] профессором Т.Г.Мустафиным были даны ответы на частные случаи этого вопроса. Им были получены следующие результаты:

Теорема 3.1 [7]. Для любой булевой алгебры B существует такая полная теория T, что:

а) $B \cong F_1(T)$;

б) если B конечная, то T категорична в счетной мощности;

в) если стоуновское пространство алгебры B счетно, то T тотально трансцендентна.

Теорема 3.2 [7]. Для того, чтобы для конечных булевых алгебр B_1, B_2 существовала такая категоричная в счетной мощности теория T, что $F_1(T) \cong B_1$, $F_2(T) \cong B_2$, необходимо и достаточно, чтобы число атомов B_2 было больше квадрата числа атомов B_1.

В связи с этим мы будем говорить, что вопрос (*) решается положительно для теории T, если существует такая последовательность булевых алгебр B_n, $n \in \omega$, что B_n изоморфна $F_n(T)$, $n \in \omega$.

Рассмотрим теорию T счетного языка первого порядка L.

Хорошо известно, что, работая с йонсоновскими теориями, в некоторых случаях мы имеем возможность ограничить себя экзистенциальными формулами и экзистенциально-замкнутыми моделями рассматриваемой йонсоновской теории. В этом случае вместо алгебр Линденбаума-Тарского $F_n(T)$, $n \in \omega$, следует рассматривать решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$, $n \in \omega$. Таким образом, указанный выше вопрос А.Д.Тайманова можно сформулировать следующим образом:

(**) Какими свойствами должны обладать решетки E_n, $n \in \omega$, чтобы существовала йонсоновская теория T, такая что E_n была бы изоморфна $E_n(T)$, $n \in \omega$?

Аналогично, мы будем говорить, что вопрос (**) решается положительно для йонсоновской теории T, если существует такая последовательность решеток E_n, $n \in \omega$, что E_n изоморфна $E_n(T)$, $n \in \omega$.

В связи с этими вопросами (*), (**) получены следующие результаты:

Теорема 3.3. Пусть T совершенная, полная для экзистенциальных предложений йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) положительное решение вопроса (**) относительно теории T;

2) положительное решение вопроса (*) относительно теории T^*, где T^* является центром теории T;

3) положительное решение вопроса (**) относительно # — компаньона теории T, $\# \in \{*, 0, m, f, e\}$, где 0-компаньон есть оболочка Кайзера; *-компаньон есть центр; m-компаньон есть модельный компаньон; f-компаньон есть конечный форсинг компаньон в смысле Робинсона; e-компаньон есть элементарная теория класса всех экзистенциально-замкнутых моделей теории T.

Доказательство следует из применения указанных выше теорем 2.5 и 2.6.

Если множество универсальных следствий йонсоновской теории также является йонсоновской теорией (что вообще говоря не всегда так), то тогда мы получим следующий результат.

Теорема 3.4. Пусть T — совершенная, полная для экзистенциальных предложений йонсоновская теория и теория $T_{\forall}$ является йонсоновской, где $T_{\forall}$— множество универсальных предложений, выводимых из T.

Тогда эквивалентны следующие условия:

1) положительное решение вопроса (**) относительно теории $T_{\forall}$, где $T_{\forall}$ — множество универсальных предложений, выводимых из T;

2) положительное решение вопроса (*) относительно теории T^*, где T^* является центром теории T.

Доказательство следует из теоремы 0.1 и теоремы 3.3.

Все неопределенные в этой статье определения понятий можно прочитать в [8].

References

1 *Weispfennin V.* The model-theoretic significance of complemented existential formulas // The Journal of Symbolic Logic. — Vol. 46. — № 4. — Dec. 1981. — P. 843–849.

2 *Yeshkeyev A.R., Ospanov R.M.* The connection of properties of the lattice $E_n(T)$ of existential formulas of Jonsson's theory with the properties of center of the theory T // Herald of KarSU. Ser. of Mathematics. — 2007. — № 2 (46). — P. 9–14.

3 *Yeshkeyev A.R., Ospanov R.M.* About PE_n (T) lattices of Δ-PJ-theories // Herald of KarSU. Series of Mathematics. — 2007. — № 4.

4 Handbook of mathematical logic: In 4 parts / Ed. Dzh.Barvaysa.-Part 1. Model theory: Lane. from English. — Moscow: Nauka; Home edition of physical and mathematical literature, 1982. — P. 126.

5 *Sikorski R.* Boolean algebra. — Moscow: Nauka, 1969. — 376 p.

6 *Mustafin T.G.* On Boolean algebra theories // Mathematics and physics research. — Karaganda: KSU Publ., 1974. — Issue 1. — P. 80–84.

7 *Begetaeva G.S., Yeshkeyev A.R.* On lattices of existential formulas of Jonsson's theory // All-Russian conference on the 100 -anniversary S.L.Edelmana. — Krasnoyarsk. 5–6, November, 2010. — P. 8–14.

8 *Yeshkeyev A.R.* Jonsson theory. — Karaganda: KSU Publ., 2009. — 250 p.

А.Р.Ешкеев, Р.М.Оспанов, О.И.Ульбрихт

Δ-йонсондық теориялардың экзистенциалды формулалардың торы

Мақалада жаңа Δ-йонсондық теориялардың кейбір модельді-теориялық және экзистенциалдық формулалардың торына қатысты йонсондық теориялардың орталық толығуының кейбір қасиеттері қарастырылды. Осы ұғымдардың арасындағы модельдер теориясында белгілі сұрақтарға сай байланыстар дәлелденді. Δ-йонсондық теориялардың кемелдегі және Линденбаум-Тарский алгебраларымен байланысты сұрақтар қарастырылды.

A.R.Eshkeev, R.M.Ospanov, O.I.Ulbriht

The lattices of existentional formulas of Δ-jonsson's theories

We are considering some model-theoretical properties of Δ-Jonsson's theory regarding the lattice of existential formulas of this theory. With this subject we are proved theorems about relations between these items. It is turns out that properties of perfectness of Jonsson's theories had description in terms of different kinds of completeness of the lattice of existential formulas of this theory. Also we considered links with famous question of A.D.Taimanov on Boolean algebras.

УДК 615.036.2

С.К.Жумагулова[1], Б.М.Саданова[2]

[1]Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;
[2]Карагандинский государственный технический университет (E-mail: - saulesha_81@mail.ru)

Исследование и разработка средств поиска в локальных коллекциях документов

В статье рассмотрен набор компонентов, который позволяет организовать поиск документов в интранет с использованием системы поиска на локальном компьютере Google Desktop Search. Приведено описание предлагаемого способа поиска информации в локальных сетях, а также принципиальная схема функционирования предлагаемого решения. Изучен алгоритм реализации данной системы в качестве Windows-сервисов. Охарактеризованы компоненты сервера. Проанализированы планы расширения функциональности приложения несколькими способами.

Ключевые слова: компонент хранилища, метаданные, пространство имен System.Collections, .NET Remoting, компонент сервера.

Трудно переоценить значение использования компьютера в современных предприятиях и организациях. Практически все процессы в них связаны с прямым или косвенным использованием компьютеров. Объемы хранилищ документов организаций исчисляются гигабайтами, а в некоторых случаях и терабайтами. При таких объемах поиск нужного документа (особенно в слабоструктурированных хранилищах) становится достаточно сложной проблемой. Он усугубляется тем, что часто в организации имеется несколько хранилищ документов, расположенных на разных серверах, и ручной поиск документа в таком случае становится практически невозможным.

Поэтому создание эффективных поисковых машин в электронных хранилищах организаций является актуальной задачей. Необходимо создать набор компонентов для поиска информации в локальных сетях с распределенными или сосредоточенными на одном компьютере хранилищами документов с использованием существующих (желательно бесплатных) программных средств.

Основным результатом выполненной работы является разработанный с использованием технологии .NET набор компонентов, который позволяет организовать поиск документов в интранет с использованием системы поиска на локальном компьютере Google Desktop Search [1].